Annalen der Physik und Chemie

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
Received May, 1897
Accession No. 65793 Class No.
PHYSICS
LIBRARY

ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND 55.

ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF.

NEUE FOLGE.

BAND 55.

DER GANZEN FOLGE 291. BAND.

UNTER MITWIRKUNG

DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT IN BERLIN

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK.

HERAUSGEGEBEN VON

G. UND E. WIEDEMANN.

NEBST FÜNF FIGURENTAFELN.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

LEIPZIG, 1895.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

(ARTHUR MEINER.)

PHYS

65793

Inhalt.

Neue Folge. Band 55.

Fünftes Heft.

Seite

1. W. König. Ueber einige Fälle achromatischer Interferenzen 1
2. C. Runge. Die Wellenlängen der ultravioletten Aluminiumlinien 44
3. E. Merritt. Ueber den Dichroismus von Kalkspath, Quarz und Turmalin für ultrarothe Strahlen 49
4. L. Zehnder. Ueber die Durchlässigkeit fester Körper für den Lichtäther 65
5. R. Reiff. Zur Dispersionstheorie 82
6. J. McCrae. Ueber Messung hoher Temperaturen mit dem Thermoelement und den Schmelzpunkt einiger anorganischer Salze 95
7. C. Forch. Experimentaluntersuchungen über die Wärmeausdehnung wässeriger Lösungen 100
8. V. Bjerknes. Ueber electrische Resonanz 121
9. W. Hallwachs. Ueber ein aperiodisches, magnet- und nachwirkungsfreies Quadrantelectrometer 170
10. G. Bauer. Ueber eine neue Methode zur experimentellen Bestimmung des specifischen Gewichtes von gesättigten Dämpfen 184
11. Th. Des Coudres. Formel für Diffusionsvorgänge in einem Cylinder von endlicher Länge bei Einwirkung der Schwere . 213

Seite

12. M. Planck. Ueber den Beweis des Maxwell'schen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes unter Gasmolecülen . . . 220
13. L. Boltzmann. Nochmals das Maxwell'sche Vertheilungsgesetz der Geschwindigkeiten 223

Geschlossen am 1. Mai 1895.

Sechstes Heft.

1. O. Wiener. Farbenphotographie durch Körperfarben und mechanische Farbenanpassung in der Natur 225
2. W. Hallwachs. Bemerkungen zu einer Arbeit des Hrn. Borgesius über ein Interferenzrefractometer etc. 282
3. J. E. Myers. Ueber den Einfluss gelöster Gase auf das Silbervoltameter 288
4. J. E. Myers. Ueber das Faraday'sche Gesetz bei Strömen von Reibungselectricität 297
5. P. Glan. Theoretische Untersuchungen über elastische Körper. I. Ueber Gestaltsänderungen 302
6. P. Glan. Theoretische Untersuchungen über elastische Körper. II. Von den elastischen Kräften und Temperaturveränderungen bei Gestaltsänderungen 321
7. W. Lietzau. Zur Kenntniss der Polarisationscapacität des Quecksilbers 338
8. O. Lehmann. Ueber Aureole und Schichtung beim electrischen Lichtbogen und bei Entladung in verdünnten Gasen . . 361
9. A. Righi. Ueber die Doppelbrechung der electrischen Strahlen 389
10. K. R. Koch. Ueber ein Normalbarometer für das Laboratorium 391
11. L. Bleekrode. Notiz über den Magnetismus des Asbests . . 398

Geschlossen am 1. Juni 1895.

Siebentes Heft.

1. E. Aschkinass. Ueber das Absorptionsspectrum des flüssigen Wassers und über die Durchlässigkeit der Augenmedien für rothe und ultrarothe Strahlen 401
2. P. Glan. Theoretische Untersuchungen über elastische Körper 432

Seite

3. Ch. Friedel. Ueber die Absorption der strahlenden Wärme durch Flüssigkeiten 453

4. J. M. Eder und A. Valenta. Die verschiedenen Spectren des Quecksilbers 479

5. F. Koláček. Ueber den axialen Charakter der Magnetkraftlinien, ein Schluss aus der Existenz des Hall'schen Phänomens 503

6. E. Pringsheim. Ueber die Leitung der Electricität durch heisse Gase 507

7. J. v. Geitler. Schwingungsvorgang in complicirten Erregern Hertz'scher Wellen 513

8. E. Ketteler. Ableitung der Gleichungen der electromagnetischen Lichttheorie aus den Erfahrungsthatsachen der Krystalloptik 525

9. E. Ketteler. Die Gesetze der Lichtbewegung in absorbirenden Krystallen 540

0. A. Raps. Expansionsluftpumpe 556

Geschlossen am 1. Juli 1895.

Achtes Heft.

1. A. Heydweiller. Der Temperatureinfluss auf die innere Reibung von Benzol und Aethyläther oberhalb ihres Siedepunktes 561

2. K. Wesendonck. Ueber einige Beobachtungen des Hrn. Villard, den kritischen Zustand betreffend. 577

3. P. Glan. Theoretische Untersuchungen über elastische Körper 582

4. V. Biernacki. Eine einfache objective Darstellung der Hertz'schen Spiegelversuche 599

5. F. Koláček. Die ponderomotorischen Wirkungen eines variablen Magnetfeldes auf geschlossene Stromleiter und ihre Verwerthung für die Bestimmung von Selbstinductionscoefficienten 604

6. E. Vogel. Ueber die galvanische Polarisation von Nickel, Kobalt und Eisen. 610

7. A. Oberbeck. Ueber den Verlauf der electrischen Schwingungen bei den Tesla'schen Versuchen. 623

8. P. Drude. Eine bequeme Methode zur Demonstration des electrischen Brechungsexponenten von Flüssigkeiten 633

9. G. Jaumann. Inconstanz des Funkenpotentiales 656

Seite

10. J. Elster und H. Geitel. Lichtelectrische Untersuchungen an polarisirtem Lichte 684
11. W. Voigt. Piezo- und Pyroelectricität, dielectrische Influenz und Electrostriction bei Krystallen ohne Symmetriecentrum . 701
12. F. Neesen. Selbstthätige Kolbenquecksilberluftpumpe . . . 732
13. A. Raps. Ueber einen neuen Compensationsapparat 737

Geschlossen am 1. August 1895.

Nachweis zu den Figurentafeln.

Taf. I. Merritt Fig. 1—4. — Forch Fig. 5.
„ II. Bauer Fig. 1—5.
„ III. Lehmann Fig. 1—25. — Lietzau Fig. 26—28.
„ IV. Aschkinass Fig. 1—8. — Raps Fig. 9—13. — Friedel Fig. 14.
„ V. Raps Fig. 1—4. — Vogel Fig. 5—9.

1895. ANNALEN № 5.
DER
PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND 55.

1. *Ueber einige Fälle achromatischer Interferenzen; von Walter König.*

Ueber achromatische Interferenzen ist in den letzten Jahren mancherlei geschrieben worden, von Lord Rayleigh Mascart, Macé de Lépinay u. A. Ich kann hinsichtlich der Literatur über den Gegenstand auf meine ausführlichen Berichte in den Beiblättern verweisen. Die Erörterung der sogenannten Talbot'schen Linien lenkte bei Gelegenheit von Vorträgen über die Interferenzerscheinungen meine Aufmerksamkeit auf solche Interferenzsysteme, deren Achromatisirung nur in einer Richtung möglich ist. Einige hierher gehörige Fälle sollen im folgenden behandelt werden. Die einfachste Art der Achromatisirung eines Interferenzsystemes besteht darin, dass man die Streifen durch ein Prisma betrachtet, ich will sie als die subjective Form der Achromatisirung bezeichnen. Diejenigen Interferenzerscheinungen aber, die nicht bei ausgedehnter Lichtquelle, sondern unter Anwendung eines Lichtspaltes oder -punktes erhalten werden, lassen noch eine andere Art der Achromatisirung zu, indem man den Lichtspalt oder -punkt spectral zerlegt und das so erhaltene Spectrum als Lichtquelle verwendet; ich will diese Art als objective Achromatisirung bezeichnen. Zu der letzteren Klasse von Interferenzerscheinungen gehören auch die Fresnel'schen und Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen. Von der objectiven Art der Achromatisirung soll im Folgenden ausschliesslich Gebrauch gemacht werden, weil sie die einschlägigen Verhältnisse leichter zu übersehen und bequemer zu formuliren gestattet.

I. Achromatisirung der Beugungsstreifen am geraden Rande eines Schirmes.

Der beugende Schirm bilde den negativen Theil der XY-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems; die Y-Axe

liege im Rande des Schirmes. Die Lichtquelle liege in der senkrechten Entfernung $z = a$ auf der einen, der Beobachtungspunkt in der senkrechten Entfernung $z = b$ auf der anderen Seite des Schirmes. Liegt die Lichtquelle genau in der ZY-Ebene, so bildet diese Ebene die geometrische Schattengrenze und in der Beobachtungsebene $z = b$ sind die Abstände der Maxima und Minima von der Schattengrenze gegeben durch die Gleichung:

$$x_0 = \sqrt{n - \tfrac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{b \cdot (a + b) \cdot \lambda}{a}},$$

wenn n eine beliebige ganze Zahl von 1 an und λ die Wellenlänge des Lichtes bedeuten; dabei entsprechen die Maxima den ungeraden, die Minima den geraden Werthen von n.[1]) Liegt die Lichtquelle in der Ebene $z = a$ nicht genau in der Z-Axe, sondern im Abstande x_1 von dieser, so trifft die Schattengrenze die Ebene $z = b$ in einem Abstande x_0' von der Z-Axe, der mit x_1 durch die Gleichung:

$$x_0' = -\frac{b}{a} x_1$$

zusammenhängt, und die x-Coordinaten der Maxima und Minima sind dann durch die Gleichung bestimmt:

$$x_0 = \sqrt{n - \tfrac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{b\,(a+b)\,\lambda}{a}} - \frac{b}{a} x_1,$$

vorausgesetzt, dass der Werth von x_1 klein genug gegen a ist, um die zweiten und höheren Potenzen von x_1 / a vernachlässigen zu können. Ist die Lichtquelle ein weisser Lichtpunkt oder ein weisser der Y-Axe paralleler Lichtspalt — d. h. ist x_1 für alle Farben gleich —, so entsteht aus der Uebereinanderlagerung der Streifen für die verschiedenen Farben ein chromatischer Effect, ähnlich den Farben der Newton'schen Ringe. Ist die Lichtquelle dagegen ein Spectrum, also x_1 eine Function der Wellenlänge, so erfahren die Streifen für die verschiedenen Farben Verschiebungen entsprechend den Verschiebungen der Schattengrenze; der chromatische Effect wird dadurch verändert, und kann unter Umständen aufgehoben werden. Letzteres ist der Fall, wenn die Streifen für verschiedene Farben sich decken,

1) S. Kirchhoff, Vorlesungen über mathem. Optik. p. 127—128.

also die x_0 von λ unabhängig sind. Die Bedingung der Achromatisirung ist also:

$$\frac{dx_0}{d\lambda} = \sqrt{n - \frac{1}{4}}\sqrt{\frac{b(a+b)}{a}}\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} - \frac{b}{a}\frac{dx_1}{d\lambda} = 0.$$

Die Gleichung lehrt zunächst, dass die Achromatisirung überhaupt nur zu erreichen ist, wenn $dx_1 / d\lambda$ positiv ist, da a, b und ebenso die Wurzelgrössen in der vorliegenden Rechnung positive Grössen bedeuten; die Farben müssen also so geordnet sein, dass x_1 mit wachsender Wellenlänge zunimmt; d. h. die Achromatisirung ist nur möglich, wenn der beugende Schirm vom violettem Ende her vor das Spectrum geschoben wird. Die Gleichung lehrt ferner, dass eine vollständige Achromatisirung für alle Farben nicht zu erreichen ist; dazu müsste die Vertheilung der Farben das durch die Gleichung:

$$\frac{dx_1}{d\lambda} = \frac{A}{\sqrt{\lambda}}$$

ausgedrückte Gesetz befolgen, eine Bedingung, die weder bei einem Beugungs- noch bei einem prismatischen Spectrum erfüllt ist. Die Achromatisirungsgleichung kann also, streng genommen, immer nur für eine einzelne Farbe erfüllt sein; ist sie es für die hellste Strahlengattung des Spectrums (λ_0), so wird der Effect am stärksten sein. Die Gleichung lehrt drittens, dass die Achromatisirung nicht zugleich für das ganze Streifensystem erreichbar ist, sondern streng genommen nur für eine bestimmte Stelle; denn für ein gegebenes Spectrum und einen gegebenen Abstand a des Spectrums vom Schirme stellt die Achromatisirungsgleichung eine Beziehung zwischen n und b dar, so dass also für die Streifen verschiedener Ordnung die Achromatisirung in verschiedenen Abständen vom Schirme eintritt; und zwar rückt die achromatisirte Stelle mit wachsendem b auf höhere Ordnungen.

Die Beobachtung bestätigt diese Sätze unmittelbar. Nur in einem Punkte bedarf die Beschreibung der Thatsachen noch einer Ergänzung. Wenn man die Beugungsstreifen mit einer Lupe oder einem Mikroskop betrachtet, so nimmt man sie bekanntlich nicht bloss dann wahr, wenn der anvisirte Punkt in Richtung der Lichtstrahlen hinter dem Schirme liegt, sondern auch dann, wenn er zwischen Schirm und Lichtquelle liegt

(virtuelle Beugungsstreifen). Die Beobachtung lehrt, dass für diese Punkte zur Erzielung einer achromatisirenden Wirkung der Schirm von der rothen Seite her in das Gesichtsfeld eingeführt werden muss. Dieser Gegensatz gegen das Verhalten der reellen Beugungsstreifen erklärt sich aus der einfachen Ueberlegung, dass in diesen Fällen die zur Interferenz gelangenden Strahlen von Punkten herzukommen scheinen, für die b negativ ist, also x_0' im Vorzeichen mit x_1 übereinstimmt.

Um von dem Verlauf der Erscheinungen und den in Betracht kommenden Dimensionen eine Vorstellung zu geben, mögen einige Messungen mitgetheilt werden, die, obwohl sie ohne besonderen Aufwand ausgeführt wurden, doch für die durch die Achromatisirungsgleichung ausgedrückte Grössenbeziehung eine ausreichende Bestätigung ergaben.

Die Versuchsanordnung war folgende: Ein verticaler Spalt wurde von einem Argandbrenner beleuchtet; ein Prisma entwarf von dieser Lichtlinie ein (virtuelles) Spectrum, dessen Breite durch Aenderung der Entfernung des Prismas vom Spalte nach Belieben verändert werden konnte. Das vom Prisma kommende Licht fiel zunächst auf eine Metallschneide, dann auf ein Quincke'sches Kathetometermikroskop von schwacher Vergrösserung. Mit diesem wurden die Beugungsstreifen beobachtet. Es konnte horizontal in Richtung der Lichtstrahlen an einer Scala verschoben werden; indem diese Verschiebungen von derjenigen Lage aus gerechnet wurden, in der das Mikroskop auf die Schneide selbst eingestellt war, ergaben sie unmittelbar die Grösse b, den Abstand der Streifenebene von der Ebene der Schneide. Um a zu ermitteln, wurde ein Fernrohr in einer grösseren Entfernung vom Prisma so aufgestellt, dass man in ihm einerseits durch das Prisma hindurch das Spectrum, andererseits über das Prisma hinweg eine am scheinbaren Ort des Spectrums horizontal aufgestellte Scala beobachten konnte. Die Scala wurde so eingestellt, dass sie gleichzeitig mit dem Spectrum vollkommen scharf erschien, wobei, um ein scharfes Spaltbild wahrzunehmen, der Argandbrenner durch eine Natronflamme ersetzt wurde. Die Scala lag dann am scheinbaren Ort des Spectrums, und ihr Abstand von der Schneide ergab die Grösse a. Zugleich konnte im Fernrohr auf der Scala, die sich mit dem Spectrum zum Theil deckte,

die Breite des Spectrums gemessen werden. Als solche wurde stets der Abstand der beiden Stellen des Spectrums notirt, die etwa der *F*- und der *C*-Linie entsprachen; diese Grösse, in mm ausgedrückt, werde mit ε bezeichnet. Die in unserer Gleichung vorkommende Grösse $dx_1 / d\lambda$ kann dann in erster Annäherung $= \varepsilon / (\lambda_1 - \lambda_2)$ gesetzt werden, wenn λ_1 und λ_2 die Wellenlängen 0,000656 und 0,000486 der *C*- und der *F*-Linie bedeuten; als Wellenlänge λ_0 der hellsten Strahlengattung wird der Mittelwerth $(\lambda_1 + \lambda_2)/2 = 0{,}000571$ benutzt. Eine etwas grössere Annäherung erreicht man offenbar dadurch, dass man dem besonderen Character des prismatischen Spectrums Rechnung trägt. Die Farbenvertheilung in einem solchen Spectrum lässt sich — wieder in erster Annäherung — darstellen durch das Gesetz:

$$x_1 = A - \frac{B}{\lambda^2}.$$

Dann ist

$$\left[\frac{dx_1}{d\lambda}\right]_{\lambda_0} = + \frac{2B}{\lambda_0^3}$$

und B lässt sich unmittelbar aus ε nach der Gleichung:

$$B = \frac{\lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \cdot \varepsilon = 0{,}5235 \times 10^{-6} \times \varepsilon$$

berechnen. Die Gleichung, die die Ordnungszahl des achromatisirten Streifens angiebt, lautet in diesem Falle:

$$n = \frac{1}{4} + \frac{16 \cdot B^2}{a \cdot \lambda_0^5} \cdot \frac{b}{a + b}.$$

Es ist zu berücksichtigen, dass n die Zahl der Maxima *und* Minima angiebt; will man nur die Minima zählen, wie es für die Beobachtuug am bequemsten ist, so hat man $n = 2p$ zu setzen; also

$$p = \frac{1}{8} + \frac{8 B^2}{a \lambda_0^5} \cdot \frac{b}{a + b}.$$

Aus dieser Gleichung kann man für gegebene Werthe von B und a entweder den zu einem bestimmten ganzzahligen Werthe von p gehörigen Werth von b, d. h. die Entfernung berechnen, in der die achromatisirende Wirkung gerade auf das $p$te Minimum fällt, oder man kann umgekehrt für gegebene Werthe von b den Ausdruck rechter Hand berechnen. Man erhält dann zwar im allgemeinen keinen ganzzahligen Werth; aber die nächstgelegenen ganzen Zahlen werden die Ordnungszahlen derjenigen Minima

bedeuten, an denen die achromatisirende Wirkung am stärksten hervortritt. In dieser Weise konnte die Theorie mit der Beobachtung verglichen werden. Die Thatsache der Achromatisirung wurde bei den Streifen niederer Ordnung unmittelbar an dem Mangel der Färbung erkannt; für die Streifen höherer Ordnung kam sie aber vor allem dadurch zur Erscheinung, dass sie hier die Streifen überhaupt erst sichtbar machte, die ohne Achromatisirung gar nicht wahrgenommen werden konnten. Natürlich erscheint dem Beobachter nicht bloss ein einzelner Streifen, sondern im allgemeinen eine ganze Streifengruppe achromatisch; die unteren und oberen Grenzen dieser Gruppen sind im Folgenden unter „beobachtet" angegeben, darunter als „berechnet" der aus der Gleichung sich ergebende Werth von p. Für die Vergleichung beider muss in Betracht gezogen werden, dass der berechnete Werth von p nicht gerade mit der Mitte der achromatischen Gruppe zusammenzufallen braucht Das ist für die niedrigsten und für die höchsten Ordnungszahlen des achromatischen Streifens durch die nach beiden Seiten begrenzte Sichtbarkeit der Streifen überhaupt ausgeschlossen. Es dürfte aber auch für die mittleren Ordnungszahlen nicht streng der Fall sein. Aus der Unsymmetrie in der Anordnung der Interferenzstreifen wäre zu folgern, dass der chromatische Effect von der achromatisirten Stelle aus nach niederen Ordnungen hin stärker als nach höheren hin anwachsen müsste, dass also die Ordnungszahl für die Mitte der beobachteten Gruppe etwas höher ausfallen müsste als die für den achromatischen Streifen berechnete. Doch sind, wie die folgende Uebersicht lehrt, die Beobachtungen nicht genau genug, um auch diese Folgerung zu bestätigen.

Die Beobachtungen sind nach den Werthen von a in drei Abtheilungen gesondert, in denen wieder die Unterabtheilungen durch die von 0,45 bis 5,3 mm variirenden Werthe von ε characterisirt sind.

I. Abtheilung.

1. $a = 1160$ mm $\varepsilon = 0{,}45$ mm.

Nur für grössere b ist eine achromatische Wirkung zuerst an den beiden ersten (ungefähr für $b = 190$ mm), weiterhin an den drei ersten Streifen bemerkbar. Die Berechnung ergiebt:

für $p = 1$: $b = 187$ mm, $p = 2$: $b = 491$ mm.

2. $a = 1180$ $\varepsilon = 0{,}7$.

Die ersten Streifen erscheinen schon für kleine b achromatisch. Für $b = 100—150$ sind die Streifen 1—5 achromatisch. Berechnet:

für $p = 1$: $b = 73$, $p = 2$: $b = 169$, $p = 3$: $b = 280$.

3. $a = 1270$ $\varepsilon = 1{,}2$.

Anfangs erstreckt sich die Achromasie vom 1.—5. Streifen. Für die Stelle stärkster Achromasie ergeben sich weiterhin die Werthe:

für b =	60	80	100	120	140	160	180	200
beob.	1.—2.		2.—4.		3.—6.	4.—8.	4.—8.	4.—11.
ber. p =	2	2,5	3,1	3,7	4,2	4,7	5,2	5,7.

4. $a = 1213$ $\varepsilon = 1{,}7$.

b =	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
beob.	1.—6.	1.—8.	1.—8.	2.—9.	3.—9.	4.—10.	5.—13.	5.—13.	7.—12.	8.—12.
ber. p =	1,5	2,9	4,2	5,4	6,7	7,9	9,0	10,1	11,3	12,3

5. $a = 1200$ $\varepsilon = 2{,}0$.

b =	20	40	60	80	100	120	140	160	180
beob.	1.—7.	2.—9.	3.—10.	4.—11.	5.—13.	5.—13.	7.—13.	7.—15.	7.—18.
ber. p =	2,1	4,0	5,8	7,6	9,3	11,1	12,7	14,3	15.8.

6. $a = 1200$ $\varepsilon = 2{,}5$

b =	20	40	60	80	100
beob.	1.—7.	2.—9.	3.—10.	5.—15.	6.—16.
ber. p =	3,2	6,2	9,1	11,9	14,6.

7. $a = 1165$ $\varepsilon = 3{,}0$

b =	20	40	60
beob.	2.—8.	4.—12.	5.—14.
ber. p =	4,8	9,4	13,8.

8. $a = 1200$ $\varepsilon = 3{,}5$.

b =	10	20	30	40	50
beob.	1.—9.	3.—13.	3.—14.	5.—18.	10.—15.
ber. p =	3,2	6,2	9,1	12,0	15,9.

9. $a = 1200$ $\varepsilon = 4{,}0$.

b =	5	10	15	20
beob	1.—8.	2.—9.	3.—13.	4.—14.
ber. p =	2,1	4,1	6,1	8,0.

10. $a = 1200$ $\varepsilon = 5{,}3$.

b =	5	10	15
beob.	1.—8.	2.—10.	3.—15.
ber. p =	3,6	7,1	10,5.

II. Abtheilung.

11. $a = 815$ $\varepsilon = 0{,}7$.

b =	20	40	60	80	100	120	140	160	180
beob.	1.—4.	1.—4.	1.—4.	1.—5.	2.—5.	2.—5.	2.—6.	3.—6.	3. u. 4.
ber. p =	0,6	1,1	1,6	2,1	2,5	2,9	3,3	3,7	4,0.

12. $a = 700$ $\varepsilon = 1{,}2$.

b =	20	40	60	80	100	120	140	160	180
beob.	1.—7.	2.—8.	2.—10.	3.—10.	4.—12.	5.—12.	6.—12.	6.—?	7.—?[1])
ber. p =	2,2	4,1	6,0	7,7	9,4	11,0	12,5	14,0	15,3

13. $a = 700$ $\varepsilon = 1{,}4$.

b =	20	40	60	80	100
beob.	1.—6.	2.—9.	4.—10.	6.—12.	[2])
ber. p =	2,9	5,6	8,1	10,5	12,8

14. $a = 700$ $\varepsilon = 2{,}0$.

b =	20	40	60	80
beob.	2.—9.	5.—13.	7.—16.	7.—16.
ber. p =	6,0	11,5	16,8	21,8.

15. $a = 750$ $\varepsilon = 2{,}5$.

b =	5,4	14,0	18,0
beob.	2.—5.	2.—6.	4.—7.
ber. p =	2,3	5,6	7,2.

16. $a = 700$ $\varepsilon = 3{,}0$.

b =	5	10	15
beob.	1.—6.	3.—6.	4.—11.
ber. p =	3,4	6,7	9,9.

III. Abtheilung.

17. $a = 500$ $\varepsilon = 1{,}5$.

b =	13,9	18,6	25,3	29,2
beob.	1.—3.	3.—6.	4.—7.	5.—10.
ber. p =	4,5	6,0	8,0	9,1.

Um die achromatisirende Wirkung richtig beurtheilen zu können, muss noch bemerkt werden, dass mit demselben Spalt und demselben Argandbrenner *ohne* spectrale Zerlegung für $a = 1200$ nicht mehr als als fünf stark chromatische Streifen zu sehen waren. Aber auch die Anwendung einer homogenen Lichtquelle vermehrte die Zahl der wahrnehmbaren Streifen nur auf acht; allerdings war die benutzte Na-Flamme wesentlich

1) Die äusseren Streifen sehr schwach, aber achromatisch.
2) Die äussersten Streifen schwach, aber achromatisch.

lichtschwächer als der Argandbrenner. Mit Hülfe der Achromatisirung war es möglich, wie die obigen Angaben zeigen, unter gewissen günstigen Verhältnissen 18 Minima wahrzunehmen, die Erscheinung also bis $n = 37$ zu verfolgen. Dass dies nicht immer, sondern nur in einigen Fällen zu erreichen war, das hängt mit dem Umstande zusammen, dass auch bei homogener Beleuchtung die Streifen am vollständigsten für mittlere Werthe von b zu sehen sind; für kleinere b verschwinden, den grösseren Werthen des Beugungswinkels entsprechend, die Streifen höherer Ordnung allmählich, und für grössere b wird die ganze Erscheinung verwaschen. Daher leistet die Achromatisirung dann am meisten, wenn der achromatisirte Streifen für mittlere Werthe von b auf die höheren Ordnungen fällt. Man könnte fragen, ob bei diesem Verfahren noch höhere Ordnungen nur deswegen unsichtbar blieben, weil der Intensitätsunterschied zwischen den hellen und dunklen Streifen für diese zu gering wird. Die Theorie ergiebt für diesen Intensitätsunterschied einen leicht zu berechnenden Werth. In der Bezeichnungsweise Kirchhoff's [1]) ist die Intensität für einen beliebigen Punkt hinter dem Schirme proportional dem Ausdruck.

$$J = M^2(u) + N^2(u);$$

M und N sind gewisse Functionen der Grösse u, und u wiederum ist durch die Gleichung bestimmt:

$$u = -x_0 \sqrt{\frac{\pi a}{\lambda b (a+b)}}.$$

Für die Maxima und Minima ausserhalb des geometrischen Schattens ist $M(u) = 0$, $u = -\sqrt{(n - \frac{1}{4})\pi}$; ferner ist für negative u $N(u)$ zu ersetzen durch den Ausdruck

$$N(u) = \sqrt{\pi}\cos\left(u^2 + \frac{\pi}{4}\right) - N(-u)$$

also für die Maxima und Minima durch

$$N(u) = (-1)^n \sqrt{\pi} - N\left(\sqrt{n - \tfrac{1}{4}\pi}\right).$$

Endlich kann für grössere Werthe von u $N(u)$ durch das

1) Kirchhoff, Vorlesungen über mathem. Optik. p. 127.

erste Glied einer nach negativen Potenzen von u fortschreitenden Reihe ersetzt werden:

$$N(u) = \frac{1}{2u} - \ldots$$

Also ist allgemein für ein Maximum oder Minimum die Intensität proportional mit

$$J = \left((-1)^n \sqrt{\pi} - \frac{1}{2\sqrt{(n-\frac{1}{4})\pi}}\right)^2.$$

Berechnet man nun die Intensitäten für die Maxima $n = 2p-1$ und $n = 2p+1$, und für das Minimum $n = 2p$ so ist der Ausdruck

$$\Delta J = (J_{2p-1} + J_{2p+1})/2 - J_{2p}$$

proportional mit $4/\sqrt{8p-1}$ bis auf Grössen, die zu vernachlässigen sind. Ohne beugenden Schirm würde an derselben Stelle die Intensität proportional mit $J_0 = \pi$ sein. Also ist der relative Intensitätsunterschied zwischen Maximum und Minimum für das $p$te Minimum gegeben durch den Ausdruck:

$$\Delta J/J_0 = 4/\pi\sqrt{8p-1} = 4/\pi\sqrt{4n-1}$$

Daraus berechnen sich folgende Werthe für das Minimum:

$p =$	5	10	15	20	25	30	35
$\Delta J/J_0 =$	0,20	0,14	0,12	0,10	0,09	0,08	0,076.

Nach Rayleigh[1]) ist bei Beobachtung von Interferenzstreifen die Unterschiedsschwelle 0,04—0,05, nach Dobrowolsky[2]) ist sie für die mittleren Theile des Spectrums noch erheblich niedriger. Darnach hätten also die Interferenzen noch auf weit höhere Ordnungen sichtbar sein müssen, als es thatsächlich der Fall war. Man könnte einwenden, dass die theoretische Rechnung für die hohen Ordnungen nicht mehr zutrifft, weil die ganze Theorie auf der Voraussetzung sehr kleiner Beugungswinkel beruht. Allein die Beugungswinkel, die den höchsten wahrgenommenen Ordnungen entsprachen, waren keineswegs die grössten, die bei den Beobachtungen überhaupt vorkamen. Berechnet man die Beugungswinkel nach der Formel

$$\operatorname{tg} q = x_0/b,$$

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) **27**. p. 484. 1889.
2) Dobrowolsky, Graefe's Archiv f. Opthalm. **18**. I. p. 74—92. 1892.

so ergiebt sich z. B. in der Beobachtungsreihe 8 für das 18. Minimum bei $b = 40\,\text{mm}$ $\varphi = 1^0\,19'$, dagegen in der 10. Beobachtungsreihe für das 8. Minimum bei $b = 5$ mm $\varphi = 2^0\,26'$ (die Winkelöffnung der spectralen Lichtquelle betrug nur ca. 10′—15′). Es hätten also auch nach diesen Ueberlegungen in den Beobachtungsreihen 6—8 noch höhere Ordnungen sehr wohl sichtbar sein können. Dass sie es nicht waren, dürfte demnach wohl einer geringeren Empfindlichkeit meines Auges zuzuschreiben sein, eine Annahme, die insofern nicht unwahrscheinlich ist, als sich das Auge bei den Beobachtungen nicht in einem vollkommen dunklen Raume befand und ausserdem das Gesichtsfeld nicht gleichmässig erhellt, sondern auf der einen Seite von den stärkeren Interferenzstreifen niederer Ordnung durchzogen war.

II. Achromatisirung eines normalen, durch ein verzögerndes Blättchen verschobenen Streifensystemes.

Die Eigenthümlichkeit der im Vorstehenden besprochenen Erscheinung, die Achromatisirung nur in einer Richtung zuzulassen, rührt von der Unsymmetrie des zu achromatisirenden Streifensystemes her. Der gleichen Beschränkung unterliegt das in ganz ähnlicher Weise unsymmetrisch gestaltete System der Lloyd'schen Streifen, deren Achromatisirung Lord Rayleigh[1]) behandelt hat; auch bei diesem muss das Beleuchtungsspectrum so liegen, dass die Wellenlängen nach derselben Richtung hin wachsen, nach der die Ordnungszahl der Interferenzen zunimmt. Das Gleiche gilt, wenn man sich aus einem gewöhnlichen, symmetrischen Streifensysteme ein unsymmetrisches dadurch herstellt, dass man die eine Hälfte des Systems oder mehr als die Hälfte verdeckt. Denselben Zweck kann man auch dadurch erreichen, dass man einem normalen, symmetrischen Streifensystem durch Einschaltung eines verzögernden Blättchens in das eine der interferirenden Strahlenbündel eine Verschiebung zu Theil werden lässt. Ist die Sichtbarkeit des Interferenzsystems auf einen engen Bereich beschränkt, wie es bei den Streifen der Fresnel'schen Spiegel, bei den Beugungsstreifen im Schatten eines streifenförmigen Schirmes u. a. der Fall ist, so treten durch die Verschiebung

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) **28**. p. 79—91. 1889.

Interferenzen höherer Ordnung in das Gesichtsfeld, die im weissen Lichte nicht mehr sichtbar sind. Man kann sie wieder sichtbar machen durch Achromatisirung, indem man die weisse Lichtquelle durch ein Spectrum von passender Länge und Orientirung ersetzt. Für die genauere Betrachtung ist der Fall insofern etwas complicirter, als die Verschiebung der Streifen durch das Blättchen in Folge der Dispersion des letzteren nicht für alle Farben die gleiche ist. Die Formeln mögen für den Fall der Interferenzstreifen, die im Schatten eines streifenförmigen Beugungsschirmes auftreten, entwickelt werden; dieser Fall gestattet die experimentelle Prüfung in sehr einfacher Weise.

Die Ebene des Schirmes bilde wieder die XY-Ebene. Seine Ränder seien der Y-Axe parallel und in den Abständen $+ e/2$ und $- e/2$ zu beiden Seiten der Y-Axe gelegen. Die Lichtquelle werde zunächst in der Z-Axe liegend gedacht, in der Entfernung a vom Schirme auf dessen einer Seite. Die Streifen werden beobachtet in der Ebene $z = b$ anf der anderen Seite des Schirmes. Die Abstände der Minima von der Z-Axe sind dann in dieser Ebene bestimmt durch die Gleichung:

$$x = \frac{2p - 1}{2} \frac{b . \lambda}{e}.$$

Liegt die Lichtquelle nicht genau in der Z-Axe, sondern in einem gegen a kleinen Abstande x_1 von ihr, so ist, entsprechend den oben bereits angestellten Ueberlegungen:

$$x_0 = \frac{2p - 1}{2} \frac{b . \lambda}{e} - \frac{b}{a} x_1.$$

Ist die Lichtquelle ein Spectrum, so ist x_1 eine Function der Wellenlänge. Endlich sei die negative Seite der XY-Ebene bedeckt mit einem durchsichtigen, planparallelen Plättchen von der Dicke D und dem Brechungsexponenten N. Dadurch wird den Strahlen, die die negative Seite der xy-Ebene durchsetzen, eine Schwächung und eine Verzögerung ertheilt gegenüber den Strahlen, die an der positiven Seite des beugenden Schirmes vorübergehen. Von der Schwächung des Lichtes soll im Folgenden abgesehen werden; die Verzögerung entspricht einer scheinbaren Verschiebung der Strahlen gegeneinander um die Strecke $(N - 1) D$, und bewirkt demgemäss eine Verschiebung der

Minima in der Ebene $z = b$ nach der negativen Seite um die Strecke $(N-1)\,D\,.\,\frac{b}{e}$. Die Formel für den Abstand der Minima von der Z-Axe lautet nun also:

$$x_0 = \frac{2p-1}{2}\frac{b\lambda}{e} - (N-1)\frac{bD}{e} - \frac{b}{a}x_1 .$$

Die Bedingung der Achromasie ist wieder $dx_0/d\lambda = 0$, also:

$$\frac{2p-1}{2}\frac{b}{e} - \frac{bD}{e}\frac{dN}{d\lambda} - \frac{b}{a}\frac{dx_1}{d\lambda} = 0.$$

Aus dieser Gleichung fällt b als gemeinschaftlicher Factor heraus. Die Ordnungszahl des achromatischen Streifens ist also unabhängig von b. Für einen gegebenen Beugungsschirm, ein gegebenes Spectrum und eine gegebene Platte hängt die Ordnungszahl des achromatischen Streifens nur von der Wellenlänge und dem Abstande a des Schirmes vom Spectrum ab, ist aber für bestimmte Werthe von a und λ in dem ganzen Raume hinter dem Beugungsschirm, für jede Entfernung der Beobachtungsebene von dem Schirme die gleiche. Die obige Gleichung entspricht aber im allgemeinen keiner physikalischen Realität; denn die Streifen entstehen überhaupt nur im Schatten des beugenden Schirmes. Sollen die Streifen durch die achromatisirende Wirkung des Spectrums sichtbar gemacht werden, so ist es erforderlich, dass die Ordnungszahl des achromatischen Streifens mit der Ordnungszahl desjenigen Streifens übereinstimmt — oder wenigstens ihr sehr nahe liegt — der mitten in den geometrischen Schatten hineinfällt. Für eine bestimmte Farbe, d. h. einen bestimmten Werth von x_1, hat die Mitte des geometrischen Schattens in der Ebene $z = b$ die Abscisse $x_0 = -b/a\,.\,x_1$. Dies in die vorletzte Gleichung eingesetzt, ergiebt für die Ordnungszahl des in die Schattenmitte fallenden Streifens den Werth:

$$\frac{2p-1}{2} = \frac{(N-1)D}{\lambda}.$$

Diese Ordnungszahl ist ausschliesslich durch die Gangdifferenz des verzögernden Blättchens bestimmt, wie es natürlich ist, da ohne das Blättchen an derselben Stelle die Gangdifferenz gleich Null sein würde. Setzt man endlich diesen

Werth in die Gleichung der Achromasie ein, so erhält man diejenige Bedingung, von der die Sichtbarkeit der achromatischen Streifen in dem behandelten Falle endgültig abhängt. Sie lautet nach zweckmässiger Umgestaltung:

$$-D\lambda \cdot \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{N-1}{\lambda}\right) = \frac{e}{a} \cdot \frac{dx_1}{d\lambda}.$$

Aus dieser Gleichung folgt zunächst, dass die beiden Differentialquotienten entgegengesetzte Vorzeichen haben müssen. Da $(N-1)/\lambda$ mit abnehmender Wellenlänge wächst, muss x_1 mit abnehmender Wellenlänge abnehmen. Das blaue Ende des Spectrums muss also nach der negativen Seite, das rothe nach der positiven Seite der Abscissenaxe sich erstrecken, damit die achromatisirende Wirkung bei der angenommenen Lage des Plättchens eintritt; mit anderen Worten, das Plättchen muss auf der Seite der kürzeren Wellenlängen liegen. Unter dieser Bedingung treten die Streifen bei gegebenen Werthen des Plättchens, des Spectrums und der Schirmbreite e für jede Wellenlänge bei einem bestimmten Abstande a des Schirmes vom Spectrum auf und sind bei diesem Abstande in jeder beliebigen Entfernung hinter dem Schirme sichtbar. Sie bleiben auch sichtbar, wenn man die Entfernung a des Spectrums und zugleich seine Breite so ändert, dass der vom Schirme aus gesehene Winkelabstand der einzelnen Farben, also der Ausdruck $d\alpha/d\lambda$, wenn $\alpha = x_1/a$ gesetzt wird, constant bleibt. Schreibt man die Gleichung in der Form:

$$-D \cdot \lambda \cdot \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{N-1}{\lambda}\right) = e\,\frac{d\alpha}{d\lambda},$$

so ist sie vollkommen identisch mit derjenigen Gleichung, die Kirchhoff in seiner Optik, p. 115, als Bedingung für die beste Sichtbarkeit der sogenannten Talbot'schen Linien aufstellt. Dort wird die Fraunhofer'sche Beugungserscheinung zweier Oeffnungen behandelt, wenn die eine Oeffnung mit einem Plättchen bedeckt ist und als Lichtquelle ein Spectrum benutzt wird. In der That ist die im Obigen behandelte Erscheinung nichts anderes, als dieselbe Modification an einer Fresnel'schen Beugungserscheinung, die man an einer Fraunhofer'schen zur Erzeugung der Talbot'schen Linien anbringt. Nur

ist zu beachten, dass in der Kirchhoff'schen Formel e nicht die Breite des Steges zwischen den beiden Oeffnungen, sondern den Abstand entsprechender Punkte der beiden Oeffnungen bedeutet. Das steht aber mit der Bedeutung von e in unserem Falle insofern durchaus in Uebereinstimmung, als die Beugungserscheinung im Schatten eines streifenförmigen Schirmes bekanntlich so beschaffen ist, als ob das interferirende Licht ausschliesslich von den Rändern des Schirmes ausginge. Man kann also sagen, dass die behandelte Erscheinung „reelle Talbot'sche Linien" darstellt, im Gegensatz zu der virtuellen Form, in der man sie sonst zu beobachten pflegt.

Einige Versuche in sehr einfacher Ausführung bestätigten die entwickelte Theorie. Das Beleuchtungsspectrum wurde dieses Mal mit Hülfe eines Spectralapparates hergestellt, aus dessen Beobachtungsfernrohr, nach sorgfältiger Einstellung aller Theile, Ocular und Collectivlinse entfernt wurden. Der leere, ausziehbare Tubus wurde so eingestellt, dass in der Ebene seiner freien Oeffnung die Spectrallinien deutlich und vollkommen scharf erschienen, was an einer auf den Rand des Tubus aufgelegten matten Glasscheibe controllirt werden konnte. Die Entfernung der Ebene dieses Randes von dem beugenden Schirm, der in der Verlängerung der Axe des Beobachtungsfernrohres aufgestellt war, ergab die Grösse a. Der Beugungsschirm bestand aus einem Streifen Christbaumlametta; ein breiterer Streifen wurde dadurch hergestellt, dass zwei Lamettastreifen mit sich überdeckenden Rändern neben einander gelegt wurden. Der beugende Streifen theilte eine rechteckige Oeffnung in zwei gleiche etwa 1 cm^2 grosse Theile. Diese Oeffnung befand sich in der Mitte eines grösseren verticalen Blechschirmes, der in einer passenden Fassung so befestigt war, dass er in seiner eigenen Ebene um seine Mitte gedreht werden konnte. Dadurch war es möglich, die Ränder des beugenden Schirmes der Richtung der Linien des Spectrums genau parallel zu stellen. Ueber die eine Hälfte der rechteckigen Oeffnung wurde schliesslich ein Deckgläschen geklebt, sodass sein Rand von dem beugenden Schirme verdeckt war. Natürlich genügte nicht ein beliebiges Deckgläschen, sondern es musste sorgfältig ausgesucht und so justirt werden, dass seine Dicke in der unmittelbaren Nähe des beugenden

Randes möglichst wenig variirte. Mit Hülfe der Interferenzcurven im reflectirten Na-Lichte war die Ausführung dieser Bedingung möglich. Um die Entfernung zwischen dem beugenden Schirm und dem Beleuchtungs-Spectrum leicht und sicher ändern zu können, stand die Vorrichtung, die den beugenden Schirm trug, auf einem auf zwei Schienen verschiebbaren Schlitten; ein zweiter auf denselben Schienen laufender Schlitten trug die zur Beobachtung der Streifen dienende Lupe. Als solche wurde meist ein grosses Brennglas mit schwacher Vergrösserung und weitem Gesichtfelde verwendet. Der Spalt des Spectralapparates wurde mit einem gewöhnlichen Argandbreenner beleuchtet. Die Breite des Spectrums in der Brennebene des Beobachtungsrohres des Spectralapparates betrug von der *C*- bis zur *F*-Linie 7,6 mm. Wurde das volle Spectrum zur Beleuchtung verwendet, so war die Erscheinung ziemlich matt. Wenn man den Beugungsapparat aus grösserer Entfernung dem Spectrum näherte, so trat in dem von einem verwaschenen Farbenschimmer erfüllten Gesichtsfelde eine Gruppe schwacher grauer Streifen hervor. Dass dies die erwartete Erscheinung war, ging vor allem daraus hervor, dass die Streifen nur auftraten, wenn das Deckgläschen auf der violetten Seite des Gesichtsfeldes lag. Die Streifen wurden zwar weniger zahlreich, aber schwarz und scharf — fast so scharf, wie sie ohne Deckgläschen bei weissem Spalt erschienen — wenn man das Spectrum bis auf einen schmalen, 1—2 mm breiten Theil verdeckte. Dabei bewahren die Streifen die Eigenthümlichkeit, nur für die eine charakteristische Lage des Deckgläschens sichtbar zu sein, woraus hervorgeht, dass sie nicht etwa deswegen sichtbar werden, weil die Lichtquelle in diesem Falle schon hinreichend homogen ist. Ausserdem treten bei dieser Art der Beleuchtung die Streifen nur in einem bestimmten, ziemlich eng begrenzten Abstande des Schirmes vom Spectrum auf, und dieser Abstand variirt mit der Wellenlänge des benutzten Theiles des Spectrums. Diese Beobachtungen sind daher sehr geeignet, um die oben aufgestellte Formel zu prüfen. Er wurden zwei Beobachtungsreihen mit demselben Spectrum und demselben Deckgläschen, aber mit Beugungsschirmen von verschiedener Breite angestellt. In jeder Beobachtungsreihe wurde der Werth von a für 3 verschiedene Farben als Mittel aus einer Anzahl

unabhängiger Einstellungen bestimmt. Die Abblendung des Spectrums geschah so, dass eine der Linien *C*, *D*, *Tl* oder *F* gerade die Mitte des schmalen, sichtbar gebliebenen Theiles des Spectrums einnahm, und durch die Wellenlänge dieser Linien waren dann die benutzten Farben charakterisirt. Um die Abhängigkeit der Entfernung a von der Wellenlänge auszudrücken, müssen die Dispersionsverhältnisse in der Formel berücksichtigt werden. Es sei wie oben

$$x_1 = A - \frac{B}{\lambda^2} \qquad \frac{dx_1}{d\lambda} = + \frac{2B}{\lambda^3}.$$

Vernachlässigt man die Dispersion im Deckgläschen, so ist

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{N-1}{\lambda}\right) = -\frac{N-1}{\lambda^2},$$

und die Formel lässt sich schreiben:

$$\frac{a\lambda^2}{e} = \frac{2B}{D(n-1)}.$$

Wollte man dagegen auch die Dispersion im Deckgläschen berücksichtigen, etwa indem man $N = \alpha + \beta/\lambda^2$ setzt, so wäre:

$$\frac{a\lambda^2}{e} = \frac{2B}{D\left(\alpha - 1 + \frac{3\beta}{\lambda^2}\right)}$$

Im ersten Falle wäre der Ausdruck $a\lambda^2/e$ als constant anzusehen, im zweiten Falle würde er mit abnehmender Wellenlänge kleiner werden.

Spectrallinie	λ	1. Beobachtungsreihe $e = 0{,}73$ mm		2. Beobachtungsreihe $e = 1{,}16$ mm	
		a	$a\lambda^2/e$	a	$a\lambda^2/e$
C	0,000 656	133 mm	$7{,}8 \times 10^{-5}$	253 mm	$9{,}1 \times 10^{-5}$
D	0,000 589	167	$7{,}9 \times 10^{-5}$	289	$8{,}6 \times 10^{-5}$
Tl	0,000 535	221	$8{,}7 \times 10^{-5}$	—	—
F	0 000 486	—	—	453	$9{,}2 \times 10^{-5}$

Der Ausdruck $a\lambda^2/e$ ergab sich also in der That als annähernd constant; die Beobachtungen waren nicht genau genug, um die Abnahme in Folge der Dispersion des Deckgläschens hervortreten zu lassen. Die Dicke das Deckgläschens betrug

0,16 mm; nimmt man seinen Brechungsexponenten zu 1,53 an, und berechnet man B aus der angegebenen Breite des Spectrums, so ergiebt sich für den Ausdruck $2B/D(N-1)$ der Werth $9{,}4 \times 10^{-5}$, also ein Werth, der ziemlich gut mit den Werthen von $a\lambda^2/e$ übereinstimmt.

Bei diesen Beobachtungen wurde die Wahrnehmung gemacht, dass die Streifen auch dann noch sichtbar blieben, wenn man den Beugungsschirm entfernte, das Glasplättchen aber an seiner Stelle liess. Das erschien zunächst insofern auffallend, als in der Formel, die die Bedingung für das Zustandekommen dieser Interferenzen ausdrückt, doch die Breite e des Beugungsschirmes vorkommt. Die genauere Untersuchung dieser durch das Glasplättchen allein hervorgerufenen achromatischen Interferenzen ergab aber, dass mit der Entfernung des Beugungsschirmes auch die Beschränkung der Sichtbarkeit der Streifen auf einen beschränkten, engen Bereich der Entfernung a des beugenden Systems vom Spectrum fortgefallen war. Die Streifen blieben nunmehr auch sichtbar, wenn man den Blechschirm mit dem Glasplättchen weiter vom Spectrum entfernte, oder ihn dem Spectrum sogar bis auf sehr kleine Entfernungen näherte. Dabei wuchs die Streifenbreite mit der Annäherung an das Spectrum. Offenbar entstehen diese Streifen durch die Achromatisirung derjenigen Beugungserscheinung, die von der Beugung am Rande der dünnen Glasplatte herrührt, und die zu der Kategorie der zuerst von Hrn. Quincke[1]) beobachteten lamellaren Beugungserscheinungen gehört. Wenn man die mit dem streifenförmigen Schirm erhaltenen Interferenzen als Fresnel'sches Analogon zu der von Kirchhoff unter dem Namen der Talbot'schen Streifen behandelten Fraunhofer'schen Beugungserscheinung betrachten konnte, so entsprechen die durch das Glasplättchen allein hervorgebrachten Interferenzen demjenigen Versuche, bei dem die Talbot'schen Streifen durch einfaches Vorschieben eines Deckgläschens vor die eine Hälfte der Pupille erzeugt werden. Die Theorie dieses eigenthümlichen Falles einer Fraunhofer'schen Beugungserscheinung ist von Airy[2]) entwickelt und von

1) G. Quincke, Pogg. Ann. **132.** p. 321—371. 1867.
2) Airy, Pogg. Ann. **58.** p. 535—549. 1843.

Esselbach[1]) ergänzt worden. Die Theorie der in unmittelbarer Beziehung dazu stehenden Fresnel'schen Beugungserscheinungen am Rande einer durchsichtigen Lamelle ist ebenfalls von Airy in der ersten seiner den Gegenstand behandelnden Arbeiten[2]) und später von Jochmann[3]) gegeben worden. Um die Achromatisirung dieser letzteren Classe von Beugungserscheinungen handelt es sich also in dem vorliegenden Falle. Die Betrachtungen gestalten sich dabei schwieriger als in den beiden vorher behandelten Fällen, weil die Grunderscheinung, die lamellaren Beugungsstreifen im homogenen Lichte, schon wesentlich complicirter ist, als die Erscheinung am Rande eines undurchsichtigen Schirmes. Es dürfte sich in Anbetracht dessen empfehlen, zunächst die Theorie der Grunderscheinung selbst und ihre Consequenzen ausführlicher, als es von Airy und Jochmann geschehen ist, zu entwickeln, um an die erhaltenen Resultate das Weitere anknüpfen zu können. Ich will dabei die Rechnung im unmittelbaren Anschluss an die Darstellung durchführen, deren sich Kirchhoff[4]) in seinen Vorlesungen über mathematische Optik bei der Behandlung der Fresnel'schen Beugungserscheinungen bedient hat.

III. Theorie der lamellaren Beugungserscheinungen.

Die Verhältnisse seien genau die gleichen wie unter I; nur denke man sich den undurchsichtigen Schirm, der die negative Seite der XY-Ebene bedecken sollte, ersetzt durch eine durchsichtige Lamelle von der constanten Dicke D und dem Brechungsexponenten N. Die punktförmige Lichtquelle, die homogenes Licht von der Wellenlänge λ aussendet, liege in der negativen Z-Achse im Abstande a vom Anfangspunkt der Coordinaten, der im Rande der Lamelle angenommen wird. Ist die Lamelle in Richtung der Y-Axe unendlich ausgedehnt, so genügt es, die Lichtvertheilung für Punkte der XZ-Ebene zu berechnen. In dieser Ebene habe der Beobachtungspunkt die Coordinaten

1) Esselbach, Pogg. Ann. **98.** p. 527—541. 1856. Vgl. auch Dvořak, Wien. Sitzungsber. (2) **67.** p. 89—100. 1873.

2) Airy, Pogg. Ann. **53.** p. 459—479. 572—589. 1841.

3) Jochmann, Pogg. Ann. **136.** p. 561—572. 1869.

4) Kirchhoff, Vorlesungen über math. Optik. p. 116—128.

x_0 und $z = b$, während x die Coordinate eines Punktes in der XY-Ebene selbst bedeute. Es mögen mit Kirchhoff folgende Abkürzungen gebraucht werden:

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} D(N-1) \tag{1}$$

und

$$\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}\frac{a+b}{ab}}\left(x - x_0\frac{a}{a+b}\right). \tag{2}$$

Der Werth von ξ für $x = 0$ werde mit u bezeichnet. Also

$$u = -x_0\sqrt{\frac{\pi a}{\lambda b(a+b)}}. \tag{3}$$

Die Lichtintensität im Beobachtungspunkte ist dann proportional der Summe der Quadrate zweier, über die ganze X-Axe auszudehnender Integrale. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Lichtstrahlen, welche nach dem Huygens'schen Princip vom negativen Theil der XY-Ebene ($\xi = -\infty$ bis $\xi = u$) ausgehend zu denken sind, eine Phasenverzögerung von Δ besitzen gegen diejenigen Strahlen, welche von der positiven Seite ($\xi = u$ bis $\xi = +\infty$) ausgehen. Demgemäss nimmt der von Kirchhoff entwickelte Intensitätsausdruck in unserem Falle die Form an:

$$J = \left(\int_{-\infty}^{u} d\xi \cos(\xi^2 + \Delta) + \int_{u}^{+\infty} d\xi \cos\xi^2\right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{u} d\xi \sin(\xi^2 + \Delta) + \int_{u}^{+\infty} d\xi \sin\xi\right)^2.$$

Durch Zerlegung der Kreisfunctionen, Ausquadriren und Berücksichtigung der Beziehungen:

$$\int_{-\infty}^{u} d\xi \cos\xi^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_{u}^{\infty} d\xi \cos\xi^2$$

und

$$\int_{-\infty}^{u} d\xi \sin\xi^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_{u}^{\infty} d\xi \sin\xi^2$$

lässt sich der Ausdruck in den folgenden überführen:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} J &= \pi + 4\sqrt{\pi}\,\sin\frac{\Delta}{2}\int_u^\infty d\xi \sin\left(\xi^2 - \frac{\Delta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &\quad + 4\sin^2\frac{\Delta}{2}\left[\left(\int_u^\infty d\xi \sin\xi^2\right)^2 + \left(\int_u^\infty d\xi\cos\xi^2\right)^2\right]. \end{aligned}\right.$$

Bildet man hieraus, um die Lage der Maxima und Minima zu finden, die Gleichung

$$\frac{dJ}{du} = 0,$$

so erhält man:

$$-4\sin\frac{\Delta}{2}\left[\sqrt{\pi}.\sin\left(u^2 - \frac{\Delta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin\frac{\Delta}{2}\int_u^\infty d\xi\cos(\xi^2 - u^2)\right] = 0.$$

Diese Gleichung ist für alle x_0 erfüllt, wenn $\sin \Delta/2 = 0$, also $\Delta = 2k\pi$ ist; in diesem Falle treten Maxima und Minima überhaupt nicht auf; J ist überall $= \pi$, d. h. es hat überall den Werth, den es ohne die beugende Lamelle an der gleichen Stelle haben würde.

Ist $\Delta \gtrless 2k\pi$, also $\sin \Delta/2$ von 0 verschieden, so sind diejenigen Werthe von u, für die J ein Maximum oder Minimum wird, die Wurzeln der Gleichung:

$$(5)\quad \sin\left(u^2 - \frac{\Delta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}.\sin\frac{\Delta}{2}\int_u^\infty d\xi\cos(\xi^2 - u^2).$$

Kirchhoff bezeichnet das hier vorkommende Integral mit $M(u)$, ein anderes, später noch zu benutzendes

$$\int_u^\infty d\xi \sin(\xi^2 - u^2)$$

mit $N(u)$ und giebt für diese beiden Functionen je zwei Reihenentwicklungen, die eine nach steigenden, die andere nach fallenden Potenzen des Argumentes, an. Die Benutzung dieser Reihen ermöglicht es, für die Wurzeln der obigen Gleichung Näherungswerthe anzugeben einerseits für den Fall sehr kleiner, andererseits für den sehr grosser Werthe dieser Wurzeln.

a) Dass wenigstens für gewisse Bereiche der Phasenverzögerung Δ die eine der Wurzeln der obigen Gleichung sehr

klein ist, folgt unmittelbar daraus, dass die Gleichung für $u = 0$ erfüllt ist, wenn $\Delta/2 = (2k + 1)\pi/2$ ist. Der Werth $u = 0$ entspricht dem Werthe $x_0 = 0$, d. h. der Grenze des geometrischen Schattens der Lamelle. Für $u = 0$ geht der Intensitätsausdruck über in

$$J = \pi \cdot \cos^2 \frac{\Delta}{2}.$$

Ist $\Delta/2 = (2k + 1)\pi/2$, so ist $J = 0$. Für diesen Werth der Phasenverzögerung liegt also ein Minimum, und zwar ein vollkommen dunkles Minimum, in der Schattengrenze selbst. Um für benachbarte Werthe von Δ die Beziehung zwischen u und Δ zu finden, kann man die eine der erwähnten Reihenentwicklungen benutzen. Es ist

$$M(u) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\cos u^2 + \sin u^2) - \int_0^u d\xi \cos(u^2 - \xi^2)$$

und das letzte Integral ist durch eine Reihe darstellbar:

$$\int_0^u d\xi \cos(u^2 - \xi^2) = u - \frac{4u^5}{1.3.5} + \cdots$$

die sich für kleine Werthe von u auf das erste Glied reducirt. Also ist für kleine Werthe von u

$$M(u) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cos\left(u^2 - \frac{\pi}{2}\right) - u$$

und die Gleichung (5) geht in die folgende über:

$$\sin\left(u^2 - \frac{\Delta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\Delta}{2}\cos\left(u^2 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin\frac{\Delta}{2}u.$$

oder

$$\sin\left(u^2 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\operatorname{tg}\frac{\Delta}{2} \cdot u. \tag{6}$$

Berücksichtigt man, dass für kleine u u^2 gegen $\pi/4$ vernachlässigt werden kann, so erhält man:

$$u = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg}\frac{\Delta}{2} \tag{7a}$$

und demnach:

$$x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda b(a+b)}{2a}}\operatorname{ctg}\frac{\Delta}{2}. \tag{7b}$$

Setzt man

$$\frac{\Delta}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon\pi,$$

so ist

$$x_0 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda b(a+b)}{2a}}\operatorname{tng}\varepsilon\pi.$$

Von der Schattengrenze aus, in der das centrale Minimum für $\Delta = (2k+1)\pi$ liegt, rückt das Minimum mit wachsendem Δ nach der negativen Seite der X-Axe, d. h. nach dem Innern der Lamelle zu, mit abnehmendem Δ nach der positiven Seite, d. h. nach Aussen. Liegt das Minimum nicht mehr in der Schattengrenze selbst, so ist auch seine Intensität nicht mehr gleich Null. Führt man dieselben Vernachlässigungen, wie oben, in die Gleichung (4) ein, so nimmt der Intensitätsausdruck für kleine Werthe von u die Form an:

$$J = \pi\cos^2\frac{\Delta}{2} - 4\sqrt{\pi}\sin\frac{\Delta}{2}\cos\frac{\Delta}{2}\sin\left(u^2 - \frac{\pi}{2}\right)u + 4\sin^2\frac{\Delta}{2}.u^2.$$

Dieser Ausdruck geht für das centrale Minimum durch Berücksichtigung der Gleichung (6), über in:

$$J = \pi\cos^2\frac{\Delta}{2} - 4\sin^2\frac{\Delta}{2}u^2$$

und schliesslich durch Berücksichtigung von Gleichung (7a) in

$$J = \frac{1}{2}\pi\cos^2\frac{\Delta}{2}. \tag{8}$$

Diese Gleichung giebt an, wie sich im centralen Minimum die Intensität mit der Phasenverzögerung verändert, so lange es in unmittelbarer Nachbarschaft der Schattengrenze liegt. Man sieht, dass diese Aenderungen halb so gross sind, wie die gleichzeitigen Aenderungen der Intensität in der Schattengrenze selbst.

b) Für grosse Werthe von u ist zu unterscheiden zwischen den positiven und den negativen Werthen.

Für grosse positive Werthe von u kann $M(u) = 0$ gesetzt werden. Die Maxima und Minima sind dann bestimmt durch die Wurzeln der Gleichung:

$$\sin\left(u^2 - \frac{\Delta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

also

$$u = +\sqrt{\left(q + \frac{1}{4}\right)\pi + \frac{\Delta}{2}} \tag{9a}$$

$$(9\,b) \qquad x_0 = -\sqrt{\left(q+\frac{1}{4}\right)\pi + \frac{\Delta}{2}}\sqrt{\frac{\lambda\, b\,(a+b)}{\pi\, a}},$$

wenn q eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Um die Intensität an den durch diese Gleichung bestimmten Stellen zu finden, kann man zunächst den Ausdruck (4). durch Einführung der Functionen $M(u)$ und $N(u)$ auf die folgende Form bringen:

$$(10)\begin{cases} J = \pi + 4\sqrt{\pi}\sin\frac{\Delta}{2}\left[\sin\left(u^2-\frac{\Delta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)M(u)+\cos\left(u^2-\frac{\Delta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)N(u)\right] \\ \qquad + 4\sin^2\frac{\Delta}{2}\left[M(u)^2+N(u)^2\right]. \end{cases}$$

Vernachlässigt man für grössere Werthe von u die Quadrate der Functionen $M(u)$ und $N(u)$, so erhält man für die Maxima und Minima den Werth der Intensität:

$$J = \pi + (-1)^q\, 4\sqrt{\pi}\cdot\sin\frac{\Delta}{2}N(u).$$

Die Differenzen der Intensität sind am grössten, wenn

$$\frac{\Delta}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

ist. In diesem Falle ist

$$x_0 = -\sqrt{(q+k+1)-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\lambda\, b\,(a+b)}{a}}.$$

Der kleinste absolute Werth, den x_0 haben kann ist offenbar gegeben durch $q = -k$. Rechnet man die Ordnungszahlen der Maxima und Minima von diesem Werthe an, setzt also

$$n = q + k + 1,$$

so ist

$$(11)\quad x_0 = -\sqrt{n-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\lambda\, b\,(a+b)}{a}} \text{ und } J = \pi - (-1)^n\, 4\sqrt{\pi}N(u).$$

Den ungeraden Werthen von n entsprechen die Maxima, den geraden die Minima. Setzt man, wie oben

$$\frac{\Delta}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon\pi$$

wo ε zwischen $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ liegt, so ist

$$(12)\quad \begin{cases} x_0 = -\sqrt{n-\frac{1}{4}+\varepsilon}\sqrt{\frac{\lambda b(a+b)}{a}} \\ \text{und} \\ J = \pi - (-1)^n 4\sqrt{\pi}\, N(u)\cdot\cos\varepsilon\pi\,. \end{cases}$$

Für negative Werthe von u ist zu berücksichtigen, dass in diesem Falle:

$$M(u) = \sqrt{\pi}\cdot\cos\left(u^2-\frac{\pi}{4}\right) - M(-u)$$

$$N(u) = -\sqrt{\pi}\cdot\sin\left(u^2-\frac{\pi}{4}\right) - N(-u)$$

zu setzen ist. Dann geht Gleichung (5) über in

$$\sin\left(u^2+\frac{\Delta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin\frac{\Delta}{2}\,M(-u)\,.$$

Für grosse negative Werthe von u sind daher die Maxima und Minima bestimmt durch die Wurzeln der Gleichung:

$$\sin\left(u^2+\frac{\Delta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = 0\,.$$

also

$$(13a)\qquad u = -\sqrt{\left(q+\frac{1}{4}\right)\pi-\frac{\Delta}{2}}\,.$$

$$(13b)\qquad x_0 = +\sqrt{\left(q+\frac{1}{4}\right)\pi-\frac{\Delta}{2}}\sqrt{\frac{\lambda b(a+b)}{\pi\,.\,a}}\,.$$

Der Intensitätsausdruck Gleichung (10) geht über in:

$$J = \pi - 4\sqrt{\pi}\sin\frac{\Delta}{2}\left[\sin\left(u^2+\frac{\Delta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)M(-u)\right.$$

$$\left.+\cos\left(u^2+\frac{\Delta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)N(-u)\right] + 4\sin^2\frac{\Delta}{2}\left[M(-u)^2+N(-u)^2\right]$$

und nimmt daher für grosse negative Werthe von u die Form an:

$$J = \pi - (-1)^q 4\sqrt{\pi}\cdot\sin\frac{\Delta}{2}\,N(-u)\,.$$

Für $\Delta/2 = (2k+1)\pi/2$ wird:

$$x_0 = +\sqrt{q-k-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\lambda b(a+b)}{a}}$$

Der kleinste Werth, den x_0 haben kann, ist dieses Mal gegeben durch $q = k+1$, und rechnet man die Ordnungszahlen der Maxima und Minima wieder von diesem Werthe an, indem man $n = q-k$ setzt, so ist

(14) $x_0 = + \sqrt{n - \frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\lambda b (a+b)}{a}}$ u. $J = \pi - (-1)^n 4 \sqrt{\pi} N(-u)$,

wobei den ungeraden Werthen von n wieder die Maxima, den geraden die Minima entsprechen, und für:

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\Delta}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon\pi \\ \text{und} \\ x_0 = + \sqrt{n - \frac{1}{4} - \varepsilon} \sqrt{\frac{\lambda b (a+b)}{a}} \\ J = \pi - (-1)^n 4 \sqrt{\pi} N(-u) \cos \varepsilon \pi . \end{cases}$$

Zum Vergleiche möge daran erinnert werden, dass die Streifen, die am Rande eines undurchsichtigen Schirmes ausserhalb der Schattengrenze auftreten, ihrer Lage und Intensität nach gegeben sind durch die Gleichungen:

$$x_0 = \sqrt{n - \frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\lambda b (a+b)}{a}} \text{ und } J = \pi - (-1)^n 2 \sqrt{\pi} N(-u).$$

Aus den Gleichungen (11) und (14) folgt also, dass für $\Delta/2 = (2k+1)\pi/2$ die bei einer durchsichtigen Lamelle zu *beiden* Seiten der Schattengrenze auftretenden Streifensysteme genau die gleiche Lage haben, als wäre jedes von ihnen durch eine Beugung an einem undurchsichtigen Schirm entstanden, dass aber die Intensitätsdifferenzen der Maxima und Minima in der lamellaren Beugungserscheinung doppelt so gross sind, wie in dem gewöhnlichen Fresnel'schen Streifensysteme. Ausserdem liegt zwischen den beiden Streifensystemen in der Schattengrenze selbst noch das centrale Minimum von der Intensität 0.

Es muss allerdings bemerkt werden, dass für die niederen Ordnungen die Werthe $u = \sqrt{(n - \frac{1}{4})\pi}$ nicht genau den wirklichen Wurzelwerthen der Gleichung (5) für $\Delta/2 = (2k+1)\pi/2$ entsprechen. Für das gewöhnliche Fresnel'sche Streifensystem sind die Abweichungen aber selbst für $n = 1$ ziemlich gering. Für die lamellaren Beugungsstreifen sind sie etwas grösser, immerhin aber auch hier noch so klein, wie eine Rechnung auf Grund der Zahlenwerthe der Fresnel'schen Integrale ergiebt, dass im Folgenden der Ausdruck $u = \sqrt{(n - \frac{1}{4})\pi}$ als allgemeiner Ausdruck für die Wurzelwerthe der Gleichung (5) in dem Falle $\Delta/2 = (2k+1)\pi/2$ angesehen werden soll.

Die Gleichnungen (12) und (15) lehren, dass mit wachsender Phasendifferenz beide Streifensysteme, ebenso wie das centrale Minimum in der Richtung der negativen X-Axe, d. h. nach der Seite der Lamelle hin sich verschieben, und dass dabei zugleich die Intensitätsunterschiede der Maxima und Minima abnehmen. Die Streifen verschwinden vollständig für $\varepsilon = \frac{1}{2}$, um bei weiterem Wachsen von Δ von neuem wieder aufzutreten. Dabei beträgt die Verschiebung der Streifen für eine Phasenänderung von 2π gewissermaassen die Hälfte des Streifenabstandes, indem beim Durchgang durch diejenigen Werthe der Phasendifferenz, bei denen die Streifen verschwinden, sich die Maxima in Minima und die Minima in Maxima verwandeln.

Ist die Lamelle nicht gleichförmig dick, sondern wie bei den Versuchen des Hrn. Quincke, keilförmig, und die Kante des Keils senkrecht zum beugenden Rande, so treten infolge der Abhängigkeit der Streifenlage von der Phasenverzögerung Δ bei Beleuchtung mit einer homogenen punktförmigen Lichtquelle die von Hrn. Quincke beschriebenen, eigenthümlich gewundenen, periodisch sich wiederholenden Streifensysteme auf. Setzt man

$$\frac{\Delta}{2} = A + By$$

und legt den Anfangspunkt so, dass für $y = 0$ $\Delta/2 = (2k+1)\pi/2$ ist, so ist das centrale Minimum in unmittelbarer Nähe der Y-Axe nach (7b) eine Curve von der Form

$$x = C \operatorname{tg}(By)$$

und die seitlichen Streifen sind nach (12) und (15) Curven von der Form:

$$x^2 = \left(n - \tfrac{1}{4}\right) C' \pm Dy .$$

Eine Zeichnung dieser Curven auf Grund der genauen Werthe der Integrale ist von Jochmann gegeben worden.[1])

Wenn man bei einer stark keilförmigen Lamelle statt der punktförmigen Lichtquelle einen homogenen, dem beugenden Rande parallelen Lichtspalt anwendet, so lagern sich an jeder Stelle des Gesichtsfeldes die den verschiedenen Punkten dieses

1) Jochmann, Pogg. Ann. **136**, Taf. VIII. Fig. 6.

Spaltes und entsprechend verschiedenen Punkten des beugenden Randes zugehörigen Streifensysteme übereinander. Erstreckt sich diese Uebereinanderlagerung auf alle möglichen Werthe der Phasenverzögerung von Δ_1 bis Δ_2, so ist die resultirende Intensitätsvertheilung bestimmt durch den Ausdruck:

$$[J] = \frac{1}{\Delta_2 - \Delta_1} \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} J \, d\Delta .$$

Bei hinreichend grossem Intervall kann man das Integral zerlegen in eine Summe gleicher Integrale von der Form

$$\int_{\Delta_1}^{\Delta_1 + 2\pi} J \, d\Delta$$

und einen zu vernachlässigenden Rest; dann ist die relative Intensitätsvertheilung im wesentlichen gegeben durch den Ausdruck:

$$[J] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_1}^{\Delta_1 + 2\pi} J \, d\Delta .$$

Rechnet man das Integral aus, unter Zugrundelegung des Ausdruckes (4), so erhält man:

$$[J] = \pi - \sqrt{2\pi}\left[\int_u^\infty d\xi \cos\xi^2 + \int_u^\infty d\xi \sin\xi^2\right] + 2\left[\left(\int_u^\infty d\xi \cos\xi^2\right)^2 + \left(\int_u^\infty d\xi \sin\xi^2\right)^2\right].$$

Die Uebereinanderlagerung führt also zu keinem vollständigen Verwischen der Erscheinung, sondern es bleiben Maxima und Minima bestehen. Für ihre Lage erhält man aus der Gleichung

$$\frac{d[J]}{du} = 0$$

die Werthe

$$u = 0 \text{ und } u = \pm \sqrt{\left(n - \tfrac{1}{4}\right)\pi} ;$$

sie haben also, wie unmittelbar zu erwarten war, dieselbe Lage, wie die bei punktförmiger Beleuchtung für $\Delta/2 = (2k+1)\pi/2$ auftretenden Streifen. Aber die Intensitätsvertheilung ist in

beiden Fällen verschieden. Denn für $\Delta/2 = (2k+1)\pi/2$ folgt aus Gleichung (4):

$$J = \pi - 2\sqrt{2\pi}\left[\int_u^\infty d\xi \cos\xi^2 + \int_u^\infty d\xi \sin\xi^2\right] + 4\left[\left(\int_u^\infty d\xi \cos\xi^2\right)^2 + \left(\int_u^\infty d\xi \sin\xi^2\right)^2\right].$$

Durch die Uebereinanderlagerung der Streifen werden also die Intensitätsschwankungen auf die Hälfte herabgesetzt. Es möge schliesslich des Vergleiches halber noch die Formel für die Intensitätsvertheilung in dem einseitigen Streifensysteme eines undurchsichtigen Beugungsschirmes angeführt werden. Sie lautet, in der gleichen Weise ausgedrückt:

$$J = \pi - \sqrt{2\pi}\left[\int_u^\infty d\xi \cos\xi^2 + \int_u^\infty d\xi \sin\xi^2\right] + \left[\left(\int_u^\infty d\xi \cos\xi^2\right)^2 + \left(\int_u^\infty d\xi \sin\xi^2\right)^2\right].$$

Dieser Ausdruck wird für die Streifen höherer Ordnung, für die das letzte Glied zu vernachlässigen ist, identisch mit dem Ausdruck für die lamellare Beugungserscheinung an keilförmigen Platten bei spaltförmiger Beleuchtung. Jede Hälfte dieser letzteren Erscheinung ist dann also einem gewöhnlichen Fresnel'schen Streifensysteme nicht blos in der Lage der Maxima und Minima, sondern auch in der Lichtvertheilung gleich, abgesehen von Punkten in der Nähe der Schattengrenze. In der Schattengrenze selbst ist bei den Fresnel'schen Streifen $J = \pi/4$, bei den übereinandergelagerten lamellaren Streifen dagegen $J = \pi/2$.

Derselbe Effect der Uebereinanderlagerung der Streifensysteme für alle möglichen Werthe von Δ tritt auch bei einer Platte von constanter Dicke ein, wenn man statt der homogenen Lichtquelle eine weisse verwendet. Auch dann macht, wenigstens bei dicken Lamellen, das entstehende doppelseitige Streifensystem, bis auf die Punkte in der Nähe der Mitte, in jeder seiner Hälften den gleichen Eindruck wie ein Fresnel'sches Streifensystem im weissen Lichte. In Wahrheit sind aber die beiden Erscheinungen in diesem Falle nichts weniger als identisch. Denn die Fresnel'schen Streifen bestehen in gleicher

Weise, nur mit geringen Lagenänderungen für alle Farben, die lamellaren Beugungsstreifen dagegen haben für gewisse Farben ein Maximum der Schärfe und sind für gewisse andere Farben überhaupt nicht vorhanden. Auf diesem Umstande beruhen die bei der Achromatisirung der lamellaren Beugungserscheinungen auftretenden Eigenthümlichkeiten, die im folgenden Abschnitt behandelt werden sollen.

Es möge zum Schlusse dieses Abschnittes noch darauf hingewiesen werden, dass es, um die beschriebenen Erscheinungen wahrzunehmen, nicht so dünner Lamellen bedarf, wie sie Hr. Quincke verwandte. Sie sind ebenso gut an jedem Deckgläschen zu beobachten, wenn man als Lichtquelle ein feines, von einer Natronflamme beleuchtetes Loch benutzt. Liegt der beugende Rand senkrecht zu den Curven gleicher Dicke, so sieht man sehr deutlich die **S**-förmigen lamellaren Beugungsfransen. Beobachtet man Punkte in geringem Abstande von dem Glasplättchen, so sieht man zugleich mit den Beugungsstreifen auch die Curven gleicher Dicke. Der Abstand dieser von einander ist wesentlich kleiner als der Abstand, in dem sich längs des Randes die **S**-förmigen Beugungsstreifen wiederholen. Der Abstand zweier Curven gleicher Dicke ist durch eine Dickenänderung der Platte um $\lambda'/2$ oder um $\lambda/2N$ bedingt, wenn λ' die Wellenlänge im Glase, λ diejenige in der Luft und n den Brechungsexponenten des Glases bedeutet. Die periodische Wiederholung der lamellaren Beugungsstreifen dagegen ist durch jedesmalige Dickenänderung um $\lambda/(N-1)$ gegeben. Für Glas kommen daher ungefähr sechs Intervalle der Curven gleicher Dicke auf ein Intervall der Beugungsstreifen, vorausgesetzt, dass die Lamelle senkrecht zu den Lichtstrahlen liegt. Mit der Neigung der Lamelle zu den Lichtstrahlen ändern sich die Intervalle bei den beiden Erscheinungen in entgegengesetzter Weise. Bedeutet i den Einfallswinkel in Luft, r den zugehörigen Brechungswinkel in der Lamelle, so ändert sich für die Curven gleicher Dicke die Phasendifferenz proportional mit $\cos r$, für die lamellaren Beugungserscheinungen dagegen ist

$$\Delta = \frac{2\pi D}{\lambda}\left(n \cdot \cos r - \cos i\right);$$

für jene nimmt nimmt Δ mit wachsender Neigung ab, für diese

zu. Dem entsprechend sieht man bei Drehung der Lamelle die Curven gleicher Dicke aus einander, die Systeme der Beugungsstreifen dagegen näher aneinander rücken.

IV. Achromatisirung der lamellaren Beugungserscheinungen.

Denkt man sich die weisse Lichtquelle in der Ebene $z = a$ spectral zerlegt und die Lage der einzelnen Farben durch die Abscisse x_1 bestimmt, so würde wieder, wie im ersten Abschnitte, die Beugungserscheinung für jede einzelne Farbe, vorausgesetzt, dass x_1 klein gegen a ist, charakterisirt sein durch die die Lage der Maxima und Minima bestimmende Gleichung:

$$x_0 = -u\sqrt{\frac{b(a+b)\lambda}{\pi a}} - \frac{b}{a}x_1. \tag{16}$$

Darin würden für u die im vorigen Abschnitte ermittelten Wurzelwerthe einzusetzen sein. Wollte man den Achromatisirungseffect wie früher berechnen, indem man $dx_0/d\lambda = 0$ setzt, so würde man dabei zu berücksichtigen haben, dass im vorliegenden Falle auch u eine Function von λ ist. Allein diese ganze Betrachtungsweise ist für den vorliegenden Fall nicht ausreichend, weil mit der Phasendifferenz sich nicht bloss der Ort der Maxima und Minima verschiebt, sondern vor allem die Intensität der ganzen Erscheinung sich ändert. Man müsste also auf die Intensitätsgleichung zurückgehen, müsste aus dieser die Summe der Intensitäten für alle Farben unter Berücksichtigung ihrer verschiedenen Lage herleiten und die Maxima und Minima dieses Ausdruckes suchen, wie es Esselbach in der oben genannten Arbeit für die entsprechende Fraunhofer'schen Beugungserscheinung gethan hat. Die Intensitätsgleichung ist aber für die Fresnel'schen Beugungserscheinungen zu complicirt, um sich in der Weise verwerthen zu lassen. Dagegen kann man auf Grund der im vorigen Abschnitte gewonnenen genauen Einsicht in die Erscheinungen bei homogenem Lichte sich die verschiedenen Möglichkeiten von Achromatisirungseffecten durch einfache Ueberlegungen klar machen.

Zweierlei ist zu beachten. Erstens wiederholt sich beim Durchwandern einer continuirlichen Farbenfolge der Verlauf der Erscheinungen periodisch, so oft Δ infolge der Veränderung der Wellenlänge um 2π sich ändert. Rechnet man die Periode

von einer Farbe, für die keine Streifen auftreten ($\Delta = 2k\pi$) bis zur nächsten ($\Delta = (2k+2)\pi$), so treten innerhalb jeder Periode die Streifen mit wachsendem Δ allmählich hervor, erreichen für $\Delta = (2k+1)\pi$ das Maximum ihrer Deutlichkeit und verschwinden dann wieder, und zu gleicher Zeit verschieben sie sich im Verlaufe der Periode um eine halbe Streifenbreite. Zweitens aber sind die Streifensysteme der einzelnen Perioden insofern nicht ganz gleich, als der Factor von u in der Gleichung (16) ebenfalls mit der Wellenlänge variabel ist. Geht man von längeren zu kürzeren Wellenlängen, also im Sinne der wachsenden Δ, so rücken von Periode zu Periode die Streifen in dem Systeme etwas enger zusammen.

Die erste Möglichkeit eines Achromatisirungs-Effectes besteht nun offenbar darin, dass die zuletzt genannte Verschiebung der Streifen von Periode zu Periode durch die spectrale Ausbreitung der Farben compensirt wird. Ist die Lamelle nicht ausserordentlich dünn, kommt vielmehr auf die Ausdehnung des Spectrums eine ganze Anzahl von Perioden — bei den benutzten Deckgläschen waren es ungefähr 48 zwischen der *C*- und der *F*-Linie — so ist unmittelbar ersichtlich, dass die Bedingung für diese Art von Achromasie die gleiche ist, wie für die Achromatisirung der gewöhnlichen Fresnel'schen Beugungsstreifen, die im ersten Abschnitte behandelt worden ist. In der That nimmt man unter den gleichen Bedingungen, wie sie dort hinsichtlich der Breite des Spectrums, und der Entfernungen a und b angegeben worden sind, dieselben Achromatisirungseffecte wie am Rande eines undurchsichtigen Schirmes dem auch am Rande einer durchsichtigen Lamelle wahr, nur mit Unterschiede, dass, da die lamellare Erscheinung im homogenen Lichte doppelseitig ist, bei spectraler Beleuchtung für jede Lage der Lamelle ein achromatisches Streifensystem erhalten werden kann. Liegt die Lamelle auf der violetten Seite des Spectrums, so sind beim reellen Beugungsbilde die äusseren Streifen achromatisch; liegt sie auf der rothen Seite, so sind es die inneren, und umgekehrt im virtuellen Beugungsbilde.

Während in diesem Falle für zwei benachbarte Perioden sich Minima gleicher Ordnung übereinanderlagern, führt der Umstand, dass die Beugungserscheinung in der Farbenfolge nicht stetig, sondern periodisch auftritt, zu der weiteren Mög-

lichkeit, dunkle Streifen zu erhalten durch die Uebereinanderlagerung der Minima verschiedener Ordnung für zwei benachbarte Perioden. Die Beugungserscheinung ist am intensivsten ausgebildet für diejenigen Farben, für die $\Delta = (2k + 1)\pi$ ist. Der Abstand zweier Farben dieser Art, die um eine Periode auseinanderliegen, in der Ebene des Spectrums ($z = a$) möge mit δx_1 bezeichnet werden. Ihnen entsprechen in der Beobachtungsebene ($z = b$) zwei Systeme von Beugungsstreifen, die gegeneinander verschoben sind um eine Strecke $\delta x_0 = -(b/a)\,\delta x_1$. Bei dickeren Lamellen ist der Unterschied der Wellenlängen der beiden Farben so gering, dass man die beiden Streifensysteme im übrigen als identisch betrachten kann. Da der Phasenunterschied der beiden Wellenlängen in der Lamelle 2π betragen soll, so lässt sich der Abstand der entsprechenden Punkte der beiden Systeme ausdrücken durch die Gleichung:

$$\delta x_0 = -2\pi \frac{b}{a} \frac{dx_1}{d\lambda} \Big/ \frac{d\Delta}{d\lambda}.$$

Andererseits sind in der Beugungsfigur jeder der beiden Farben die Abstände der seitlichen Maxima und Minima von dem centralen Minimum näherungsweise gegeben durch:

$$\delta x_0 = \pm \sqrt{n - \tfrac{1}{4}} \sqrt{\frac{\lambda b (a + b)}{a}}.$$

Es ist vor allem zu beachten, dass in dieser Beugungsfigur die Abstände der Minima voneinander oder von den Maxima je nach der Ordnung sehr verschieden sind. Um nur die wichtigsten Fälle, nämlich diejenigen der ersten beiden Ordnungen anzuführen, so ist in der für die obige Formel geltenden Annäherung:

Der Abstand des 1. seitlichen Min. vom centralen Minimum:		1,32. $\sqrt{\frac{\lambda b(a+b)}{a}}$	
„ „	„ 2. Max. vom 1. Max.	0,79	„
„ „	„ 2. Min. „ 1. Min.	0·61	„
„ „	„ 1. Max. „ centralen Minimum	0,86	„
„ „	„ 1. Min. „ 1. Max.	0,46	„

Aus diesem Umstande ergiebt sich eine vielfache Möglichkeit, eine Reihe von Streifensystemen dieser Art nebeneinander in gleichen Abständen so anzuordnen, dass als Gesammteffect sich ein System von Streifen gleichen Abstandes ergiebt. Um zu erfahren, welche von diesen möglichen Com-

binationen bei den wirklich beobachteten Streifen vorlagen, wurden Versuche folgender Art angestellt.

Wie bei dem im zweiten Abschnitt beschriebenen Versuche wurde ein objectives Spectrum mit Hülfe eines Spectralapparates erzeugt, aus dessen Beobachtungsfernrohr der Ocularansatz entfernt war. Die Lichtstrahlen, die dieses Spectrum bildeten, fielen dann weiterhin auf den schwarzen Blechschirm mit der grösseren rechteckigen Oeffnung, die zur Hälfte mit einem passenden Deckgläschen belegt war, und bildeten hinter diesem die zu untersuchende Beugungsfigur in Form eines Systems schwacher farbloser Streifen in dem von verwaschenen Farben erfüllten Gesichtsfelde. Wurden die Entfernungen a und b des Spectrums einerseits, des Beobachtungspunktes andererseits von dem Deckgläschen nicht zu gross genommen, so war es möglich, das Streifensystem mit dem horizontalen Mikroskope zu beobachten und auf der Ocularscala dieses Mikroskopes den Abstand der Streifen zu messen. Diese Messungen wurden für diejenige Stelle des Gesichtsfeldes ausgeführt, deren Beleuchtung von der Gegend der D-Linie des Spectrums herrührte. Nach jeder Messung wurde bei unveränderter Lage des Deckgläschens und des Mikroskopes der Auerbrenner, der zur Erzeugung des Spectrums gedient hatte, durch eine Natronflamme ersetzt. Dann sah man im Mikroskope die lamellare Beugungsfigur des Deckgläschens für Na-Licht und konnte den Abstand etwa der ersten seitlichen Minima voneinander messen. Es wurden zwei Beobachtungsreihen in der Weise ausgeführt, dass das Mikroskop in constantem Abstand vom Spectrum aufgestellt, und der Schirm mit dem Deckgläschen zwischen Spectrum und Mikroskop verschoben wurde. Wenn man diesen vom Mikroskope aus langsam nach dem Spectrum hinausschiebt, so treten die Streifen anfangs sehr eng und zahlreich auf, allerdings so matt, dass sie schwer wahrzunehmen sind, verbreitern sich dann allmählich und haben schliesslich das Aussehen breiter verschwommener Schatten, wenn sie für kleine Werthe von a wieder aufhören sichtbar zu sein. Aber der Verlauf vom ersten Auftreten bis zum letzten Verschwinden war kein stetiger. Vielmehr verschwanden die Streifen auch für bestimmte mittlere Werthe von a, während sie an anderen dazwischenliegenden Punkten mit einem gewissen Maximum von

Deutlichkeit hervortraten. Für diese letzteren Lagen wurden die Streifenbreite δ im Spectrum und der Abstand δ' der beiden ersten Minima im *Na*- Lichte gemessen.

1. Beobachtungsreihe. $a + b = 80$ mm.

Die Streifen verschwanden für	$a =$	56	48,5	38	mm.
Es betrug für	$a =$	58,5	52,5	46	26 mm.
die Streifenbreite δ		0,65	0,9	1,3	3,3 Sc.-T.
der Abstand δ'		3,6	4,5	5,2	9 Sc.-T.
also nahezu	$\delta' =$	$6 \times \delta$	$5 \times \delta$	$4 \times \delta$	$3 \times \delta$.

2. Beobachtungsreihe. $a + b = 110$ mm.

Die Streifen verschwanden für	$a =$	67	57	39	mm.
Es betrug für	$a =$	71	62,5	51	28 mm.
die Streifenbreite δ		0,9	1,2	2,0	5,5 Sc.T.
der Abstand δ'		5,5	6	8	ca. 12,5 Sc.-T.
also nahezu	$\delta' =$	$6 \times \delta$	$5 \times \delta$	$4 \times \delta$	$[3 \times \delta]$.

Nach diesen Beobachtungen würden also die untersuchten Streifen das Maximum ihrer Deutlichkeit jedesmal dann besessen haben, wenn der Abstand der ersten seitlichen Minima in der lamellaren Beugungsfigur für homogenes Licht gleich einem ganzen vielfachen m der Streifenbreite, d. h. des Periodenabstandes in der Ebene $z = b$ ist. Der Abstand der ersten seitlichen Minima von einander ist angenähert:

$$\delta' = \sqrt{7}\sqrt{\frac{\lambda b(a+b)}{a}} = 2{,}64\sqrt{\frac{\lambda b(a+b)}{a}},$$

die Periodenbreite ist

$$\delta = 2\pi \frac{b}{a} \frac{dx_1}{d\lambda} \Big/ \frac{d\Delta}{d\lambda},$$

also wäre die Bedingung für das Maximum der Deutlichkeit:

$$\delta' = m \times \delta,$$

oder

$$m\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{7(a+b)\lambda}}{2\pi} \frac{d\Delta}{d\lambda} \Big/ \frac{dx_1}{d\lambda}. \tag{17}$$

Die Uebereinstimmung zwischen δ' und $m \times \delta$ in den obigen Zahlenwerthen ist nicht überall befriedigend. Das liegt vor allem daran, dass die Einstellung auf das Maximum der Deutlichkeit der Streifen ziemlich unsicher ist. Man kann in der That von den angegebenen Lagen aus den Schirm beträchtlich nach beiden Seiten hin verschieben, ohne dass die Streifen aufhören deutlich zu sein. Dagegen ist die Einstellung auf das Verschwinden der Streifen von einer bemerkens-

werthen Schärfe. Nach der dargelegten Auffasssung der Erscheinung wird das Verschwinden eintreten, so oft δ'/δ gleich einer ganzen Zahl $+\frac{1}{2}$ ist. Für die drei Verschwindungspunkte der beiden Beobachtungsreihen müsste δ'/δ die Werthe 5,5, 4,5 und 3,5 haben und diese Werthe müssten mit den zugehörigen Werthen von a und b so verknüpft sein, dass für jede Beobachtungsreihe $\sqrt{b/a}\,.\,\delta'/\delta$ gleich einer Constanten ist. Die Rechnung ergiebt Folgendes:

1. Beobachtungsreihe: $a + b = 80$

a	= 56,0	48,5	38,0	
b	= 24,0	31,5	42,0	
δ'/δ	= 5,5	4,5	3,5	
$\frac{\delta'}{\delta}\sqrt{\frac{b}{a}}$	= 3,60	3,63	3,68.	Im Mittel 3,64.

2. Beobachtungreihe: $a + b = 110$.

a	= 67,0	57,0	39,0	
b	= 43,0	53,0	71,0	
δ'/δ	= 5,5	4,5	3,5	
$\frac{\delta'}{\delta}\sqrt{\frac{b}{a}}$	= 4,41	4,32	4,72.	Im Mittel 4,48.

Um aber auch zu controlliren, ob wirklich die gemessene Streifenbreite dem durch die Dimensionen des angewandten Spectrums und die Natur des Deckgläschens bestimmten Periodenabstand in der Ebene $z = b$ entspricht, wurde der constante Werth von $\sqrt{b/a}\,.\,\delta'/\delta$ aus der rechten Seite der obigen Gleichung berechnet. Wie im zweiten Abschnitt wurde

$$\frac{dx_1}{d\lambda} = 2B/\lambda^3 \text{ und } \frac{d\Delta}{d\lambda} = 2\pi D \quad d\,\frac{N-1}{\lambda}\Big/ d\lambda = -\frac{2\pi D(N-1)}{\lambda^2}$$

gesetzt. Dann ist dem absoluten Werthe nach

$$\frac{\delta'}{\delta}\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{7\,(a+b)}\,\lambda\,\frac{D(N-1)\lambda}{2B}\,.$$

In dem angewandten Spectrum betrug der Abstand der D- von der F-Linie 5 mm. Der Brechungsexponent des Deckgläschens N wurde wieder zu 1,53, seine Dicke zu 0,16 mm angenommen. Dann ist $B = 3{,}70 \times 10^{-6}$ zu setzen, und es ergiebt sich für die Constante in der ersten Beobachtungsreihe 3,87, für die in der zweiten Beobachtungsreihe 4,54, also

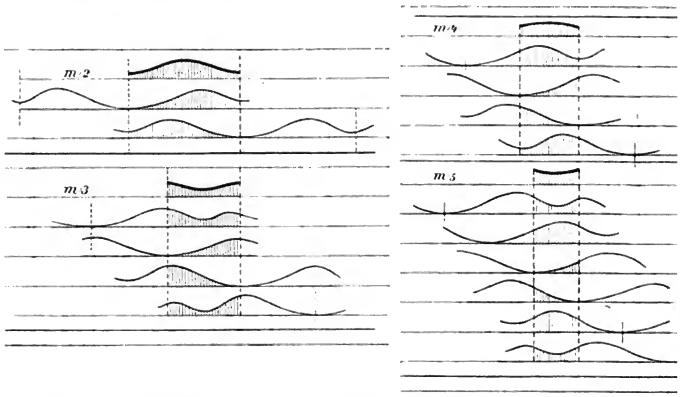
Werthe, die den durch die Beobachtung direct ermittelten Werthen sehr nahe liegen.

Es möge schliesslich noch eine andere Form des Versuches erwähnt werden, die die Richtigkeit der dargelegten Theorie der Erscheinung unmittelbar zur Anschauung brachte. Die obere Hälfte des Spaltes des Spectralapparates wurde mit dem Auerbrenner, die untere mit der Na-Flamme beleuchtet, und das Mikroskop dem objectiven Spectrum so weit genähert, dass eine Sonderung des Gesichtsfeldes in zwei Hälften wahrnehmbar wurde. Die obere Hälfte war von einem verwaschenen Bilde des Spectrums, die untere von einem breiten Bande von Na-Licht erfüllt. Wurde nun das Deckgläschen zwischen den anvisirten Punkt und das Spectrum eingeschoben, so nahm man gleichzeitig im oberen Theile des Gesichtsfeldes die spectralen Streifen, im unteren die dem homogenen Lichte entsprechende Beugungsfigur wahr, und man konnte sich durch unmittelbare Vergleichung davon überzeugen, dass an den Stellen deutlicher Sichtbarkeit der spectralen Streifen der Abstand der ersten Minima des Beugungsbildes nahezu ein ganzes Vielfaches des Abstandes der spectralen Streifen war.

Welche Intensitätsvertheilung in den beschriebenen Fällen durch die Uebereinanderlagerung der einzelnen Beugungserscheinungen zu Stande kommt, das lässt sich rechnerisch auswerthen unter Benutzung der von Airy in seiner ersten Abhandlung[1]) mitgetheilten Zahlen, die nichts anderes als den Intensitätsverlauf der lamellaren Beugungserscheinung repräsentiren. Die Resultate einer solchen Rechnung sind in den nebenstehenden Figuren veranschaulicht. Es sind die vier Fälle $m = 2$, 3, 4 und 5 dargestellt. Für jeden Fall sind die Intensitätscurven für die einzelnen Erscheinungen mit der dem Werthe von m entsprechenden Verschiebung unter einander gezeichnet. Für die mittlere Periode, den durch die Schraffirung gekennzeichneten Theil, ist die Summation der Intensitäten durchgeführt, die für jeden Punkt erhaltene Intensitätssumme durch die Anzahl der summirten Einzelerscheinungen dividirt, und der so gefundene resultirende Intensitätsverlauf innerhalb der Periode durch die oberste, stark gezeichnete

1) Airy, Pogg. Ann. **53.** p. 582—584. 1841.

Curve veranschaulicht. Die Einzelerscheinungen sind dabei nur soweit berücksichtigt, als das erste seitliche Minimum noch in die mittlere Periode hineinfällt. Diese Curven lehren erstens, dass mit wachsendem m die Intensitätsdifferenzen schnell abnehmen; in der That waren für Werthe von $m > 5$ die Streifen im Spectrum so schwach, dass sie nicht mehr sicher wahrzunehmen waren. Wichtiger ist die zweite Bemerkung. Die Grenzen der Periode sind so gewählt, dass sie auf die centralen Minima zweier benachbarter Einzelerscheinungen fallen. Die Minima der resultirenden Intensität fallen aber nur für die Werthe $m = 2$ und $m = 4$ in diese Grenzen; für die Werthe



$m = 3$ und $m = 5$ dagegen fallen auf die centralen Minima der Einzelerscheinung die Maxima der Gesammtintensität. Daraus folgt des Weiteren, dass zwischen je zwei von den gezeichneten Fällen ein Werth vom m existiren muss, für den in der resultirenden Intensität die Maxima und die Minima überhaupt verschwinden, und dass beim Durchgange durch diese Werthe von m die Maxima in Minima und die Minima in Maxima sich verwandeln. Dass diese Verschwindungspunkte genau auf die Werthe $m = 2{,}5,\ 3{,}5,\ 4{,}5$ fallen müssen, kann man in Anbetracht der complicirten Intensitätscurve der Einzelerscheinung wohl nicht ohne Weiteres behaupten, ebensowenig, wie die grössten Intensitätsdifferenzen unbedingt den ganz-

zahligen Werthen zukommen müssen. Aber die mitgetheilten Beobachtungen lehren jedenfalls, dass sehr nahe das Maximum der Deutlichkeit der Streifen für die ganzzahligen Werthe von m und das Verschwinden für die zwischenliegenden halbzahligen Werthe eintritt.

Die hier vorgetragene Theorie der Erscheinungen ist aber immer noch in einem Punkte unvollständig. Entständen die behandelten Streifen, wie bisher vorausgesetzt wurde, nur durch die Uebereinanderlagerung der lamellaren Beugungserscheinungen im Maximum ihrer Intensität, d. h. für die Farben, für die $\Delta = (2k+1)\pi$ ist, so müssten sie sichtbar sein, gleichviel ob das Glasplättchen auf der violetten oder auf der rothen Seite des Gesichtsfeldes sich befindet; denn die Erscheinungen für die einzelnen Farben sind völlig symmetrisch nach beiden Seiten und ganz unabhängig von einander. In Wahrheit sind die Streifen aber nur sichtbar, wenn das Plättchen auf der violetten Seite des Gesichtsfeldes liegt. In diesem Umstande kommt eine dritte Achromatisirungsmöglichkeit der lamellaren Beugungserscheinungen zur Geltung. Ausser den Verschiebungen der ganzen Perioden mit der Wellenlänge finden, wie schon erwähnt wurde, auch noch innerhalb der Periode Verschiebungen des Streifensystemes mit der Wellenlänge, und zwar von einem Ende der Periode bis zum andern um eine halbe Streifenbreite, statt. Man kann auch diese Verschiebungen sich durch die spectrale Auseinanderrückung der Farben compensirt denken. Da diese Verschiebung mit wachsendem Δ, d. h. abnehmender Wellenlänge nach dem Inneren der Lamelle zu erfolgt, so ist diese Compensation nur möglich, wenn das blaue Ende des Spectrums auf der Seite der Lamelle liegt. Des genaueren hat man nach derjenigen Breite des Spectrums zu fragen, bei der die Compensation für das Streifensystem im Maximum seiner Intensität, d. h. für $\Delta = (2k+1)\pi$ eine vollständige ist. Diese Bedingung ist aber für die verschiedenen Theile des Streifensystems verschieden. Für das centrale Minimum ist die Abhängigkeit von Δ durch die Gleichung (7a) ausgedrückt. Diese mit der Gleichung (16) verbunden, ergiebt:

$$x_0 = +\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b(a+b)\lambda}{2a}}\operatorname{ctg}\frac{\Delta}{2} - \frac{b}{a}x_1 .$$

Da sich die Betrachtung hier auf den stetigen Verlauf der Erscheinung innerhalb der Periode beschränken soll, so kann man die Achromatisirungsgleichung wie früher in der Form $dx_0/d\lambda = 0$ ansetzen, und erhält für die Mitte der Periode, d. h. für $\Delta = (2k+1)\pi$:

$$\frac{dx_1}{d\lambda} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\lambda a(a+b)}{b}}\cdot\frac{d\Delta}{d\lambda},$$

$$= -0{,}177\sqrt{\frac{\lambda a(a+b)}{b}}\frac{d\Delta}{d\lambda}.$$

Für ein seitliches Maximum oder Minimum hat man dagegen nach Gleichung (12) und (15),

$$x_0 = \mp\sqrt{n-\tfrac{1}{4}\pm\varepsilon}\sqrt{\frac{\lambda b(a+b)}{a}} - \frac{b}{a}x_1,$$

wobei

$$\frac{\Delta}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon\pi$$

gesetzt ist, und daraus für die Mitte der Periode ($\varepsilon = 0$), als Achromatisirungsbedingung des $n$ten Streifens:

$$\frac{dx_1}{d\lambda} = \sqrt{\frac{\lambda a(a+b)}{b}}\left\{\mp\frac{\sqrt{n-\frac{1}{4}}}{2\lambda} - \frac{1}{4\pi\sqrt{n-\frac{1}{4}}}\frac{d\Delta}{d\lambda}\right\}.$$

Ist $d\Delta/d\lambda$ gross, so kann man das erste Glied in der Klammer vernachlässigen und erhält:

$$\frac{dx_1}{d\lambda} = -\frac{1}{4\pi\sqrt{n-\frac{1}{4}}}\sqrt{\frac{\lambda a(a+b)}{b}}\frac{d\Delta}{d\lambda}.$$

also für das erste seitliche Maximum ($n = 1$):

$$\frac{dx_1}{d\lambda} = -0{,}092\sqrt{\frac{\lambda a(a+b)}{b}}\frac{d\Delta}{d\lambda}.$$

für das erste seitliche Minimum ($n = 2$):

$$\frac{dx_1}{d\lambda} = -0{,}060\sqrt{\frac{\lambda a(a+b)}{b}}\frac{d\Delta}{d\lambda}.$$

Dem Vorzeichen nach bedeuten diese Gleichungen, da $d\Delta/d\lambda$ negativ ist, dass x_1 mit λ abnehmen muss, also das blaue Ende des Spectrums nach der negativen Seite, der Seite der Lamelle hin gelegen sein muss. Der Grösse nach reihen sich die hier verlangten Breiten des Spectrums ein unter die Werthe, die nach den früheren Betrachtungen für die beste

Sichtbarkeit der Streifen gefunden wurden. Denn nach Gleichung (17) ist

$$\frac{dx_1}{d\lambda} = \frac{\sqrt{7}}{2\pi m}\sqrt{\frac{\lambda a(a+b)}{b}}\,\frac{d\Delta}{d\lambda}.$$

Also:

für $m = 2$ $\quad \frac{dx_1}{d\lambda} = 0{,}210\sqrt{\frac{\lambda a(a+b)}{b}}\,\frac{d\Delta}{d\lambda}$

„ $m = 3$ $\quad \frac{dx_1}{d\lambda} = 0{,}140$ „ „

„ $m = 4$ $\quad \frac{dx_1}{d\lambda} = 0{,}105$ „ „

„ $m = 5$ $\quad \frac{dx_1}{d\lambda} = 0{,}084$ „ „

Diese Nebeneinanderstellung lässt erkennen, dass unter den Verhältnissen, unter denen die geschilderten Uebereinanderlagerungen der Streifensysteme benachbarter Perioden stattfinden, zugleich auch die Bedingung der Achromasie für den Verlauf der Streifen innerhalb der Perioden nahezu erfüllt ist. Dieser bemerkenswerthe Umstand ist für die deutliche Sichtbarkeit der Streifen offenbar entscheidend; denn wenn jene Bedingung infolge Einführung des Blättchens von der rothen Seite her nicht erfüllt ist, so sind die Streifen überhaupt nicht wahrnehmbar.

Airy hat in der ersten seiner mehrfach genannten Arbeiten die hier besprochenen Erscheinungen bereits behandelt. Aber er beschränkt die Erörterung auf die hier zuletzt genannte achromatische Bedingung und erwähnt nicht die verschiedenen Möglichkeiten der Uebereinanderlagerung benachbarter Streifensysteme. Die hier vervollständigte Theorie ist als das vollkommene Analogon zur Esselbach'schen Theorie der Talbot'schen Streifen zu betrachten. Nach Esselbach ist die Deutlichkeit der Talbot'schen Linien dann am grössten, wenn ihr Abstand gleich dem gegenseitigen Abstande der ersten beiden seitlichen Minima im Beugungsbilde der unbedeckten Oeffnung ist. Dvořak hat diese Theorie experimentell geprüft.[1]) Es möge erwähnt werden, dass die oben beschriebene Versuchsanordnung auch für die Richtigkeit dieser Theorie

1) Dvořak, Wied. Ann. **147.** p. 604—615. 1872.

eine ganz unmittelbare Bestätigung lieferte. Der Spalt des Spectrometers wurde zur Hälfte mit dem Auerbrenner, zur anderen Hälfte mit der *Na*-Flamme beleuchtet. Das Mikroskop wurde scharf auf das Spectrum und die darunter liegende *Na*-Linie eingestellt. Die Hälfte eines Objectives wurde von der violetten Seite her mit einem passenden Deckgläschen bedeckt; dann sah man im Spectrum die Talbot'schen Linien als graue Streifen. Wurde ausserdem ein Spalt von veränderlicher Breite dicht vor das Objectiv gesetzt, so konnte man zugleich an der *Na*-Linie im unteren Theile des Gesichtsfeldes das Beugungsbild dieses Spaltes wahrnehmen. Verengerte man den Spalt allmählich, so wurden die Talbot'schen Linien dunkler; man konnte sich überzeugen, dass sie vollkommen schwarz und scharf waren, wenn ihr Abstand dem gegenseitigen Abstande der ersten Minima im Beugungsbilde gleich war. Bei weiterer Verengerung des Spaltes wurden sie wieder blasser und verschwanden dann ganz. Dieser Fraunhofer'schen Beugungserscheinung entsprechen die im Vorstehenden beschriebenen Formen von Fresnel'schen Beugungserscheinungen, nur sind hier die Resultate mannigfaltiger infolge der complicirten Lichtvertheilung in den Fresnel'schen Streifensystemen.

Es möge zum Schluss noch eine Beobachtung Erwähnung finden, die über den Kreis der hier behandelten Thatsachen hinausführte. Für den Verlauf der besprochenen Erscheinungen ist die Farbenvertheilung im Spectrum ein massgebender Factor; im besonderen würden die im zweiten Abschnitt beschriebenen Versuche (p. 17) eine ganz andere Abhängigkeit der Grösse a von der Wellenlänge ergeben müssen, wenn man das prismatische Spectrum etwa durch ein Beugungsspectrum ersetzte. Es schien daher von Interesse, die gleichen Versuche auch mit einem Beugungsspectrum anzustellen. Es ergab sich aber, dass die erwarteten Interferenzstreifen bei Anwendung eines Beugungsspectrums von ausreichender Breite nicht mit Sicherheit wahrzunehmen waren. Dagegen traten ausserordentlich scharfe und deutliche Interferenzstreifen in diesem Falle auf, wenn das Glasplättchen auf der rothen statt auf der violetten Seite des Gesichtsfeldes lag. Die nähere Untersuchung ergab, dass diese Streifen mit den bisher besprochenen Streifensystemen nichts gemein haben. Es liegt in ihnen vielmehr eine neue Art

achromatischer Interferenzstreifen vor, die offenbar in Beziehung steht zu jener eigenthümlichen Structur der Beugungswellen, auf die zuerst Lord Rayleigh[1]) und in jüngster Zeit Hr. Meslin[2]) aufmerksam gemacht haben. Die genauere Besprechung dieser neuen Erscheinung gehört aber nicht mehr in den Kreis der hier angestellten Betrachtungen hinein und möge daher einer anderen Gelegenheit vorbehalten bleiben.

Frankfurt a. M. Institut des physik. Vereins. März 1895.

1) Lord Rayleigh, Encyclop. Britannica. **24.** p. 421—459. 1888.
2) Meslin, Ann. de chim. et. phys. (7) **3.** p. 362. 1894.

2. *Die Wellenlängen der ultravioletten Aluminiumlinien; von C. Runge.*

Das Spectrum des electrischen Funkens zwischen Aluminiumelectroden zeigt im äussersten Ultraviolett einige Linien, die wegen ihrer grossen Energie (besonders der beiden Wellenlängen bei 186 $\mu\mu$) auch bei anderen als rein spectralanalytischen Untersuchungen verwendet worden sind. Ich hielt es daher, auch abgesehen von der Untersuchung der Spectren anderer Elemente, für die diese Aluminiumlinien als Normalen dienen sollen, für nöthig, die Wellenlängen von Neuem zu messen. Die einzigen mir bekannten Bestimmungen rühren von Cornu her, der die Messung im Jahre 1881 mit einem Rutherford'schen Gitter ausführte.[1]) Seitdem aber ist die Methode durch das Rowland'sche Concavgitter ausserordentlich verfeinert worden, sodass ich erwarten konnte, zuverlässigere Werthe zu finden. Meine Messungen sind mit einem Rowland'schen Concavgitter ausgeführt worden, das einen Krümmungsradius von einem Meter und nahezu 600 Furchen auf den Millimeter, im Ganzen etwa 50 000 besitzt. Die Anordnung war ähnlich derjenigen, die Hr. H. Kayser und ich in dem sechsten Abschnitte unserer Untersuchungen über die Spectren der Elemente[2]) beschrieben haben. Das Gitter stand an dem einen Ende einer luftdicht verschlossenen eisernen Röhre von etwa 20 l Inhalt. An dem anderen dem Gitter gegenüberliegenden Ende waren zwei Fensterchen angebracht, beide mit Flussspathplatten verschlossen. Vor dem einen befand sich der Spalt, vor dem anderen die photographische Platte. Das erste Fenster hatte ich nicht in derselben Ebene mit dem zweiten angebracht, sondern an das Ende eines 40 cm langen in die Verschlussplatte des Rohres gelötheten Ansatzrohres. Dies erwies sich aus mehreren Gründen als zweckmässig. Man kann, wenn eine electrische Lampe vor dem Spalt steht, bequem vor dem zweiten Fenster sitzen und das Spectrum beobachten, ohne durch die Helligkeit und Hitze

1) Cornu, Journ. de Phys. **10.** p. 425. 1881.
2) H. Kayser u. C. Runge, Abhdl. d. Berl. Akad. p. 4. 1892.

gestört zu werden. Zweitens ist durch die grössere Entfernung zwischen Spalt und Gitter das Spectrum dem Gitter näher gerückt, die Oeffnung der hier concentrirten Strahlen grösser und infolge dessen bei gleicher Winkelöffnung des Spaltes (vom Gitter aus gerechnet), also bei gleichem Auflösungsvermögen, die Helligkeit grösser. Die benutzten photographischen Platten habe ich Hrn. H. Kayser zu verdanken, der sie für unsere beabsichtigten gemeinsamen Untersuchungen nach dem Schumann'schen Verfahren [1]) präparirt hatte. Ich ersetzte die Aluminiumelectroden für kurze Zeit durch Eisendrähte und erhielt so beide Spectren auf derselben Platte. Das Gitter war so justirt, dass die zu bestimmenden Aluminiumlinien in zweiter Ordnung auf der Platte erschienen, und die Exposition wurde so bemessen, dass die kräftigsten Eisenlinien, die ungefähr die doppelte Wellenlänge der Aluminiumlinien haben, scharf und deutlich aber nicht zu kräftig sich zwischen den Aluminiumlinien vertheilen. Von den betreffenden Eisenlinien sind die meisten in Rowland's [1]) neuer Tabelle seiner „standard wavelengths" aufgeführt. Relativ zu diesen wurde die Wellenlänge der Aluminiumlinien bestimmt. Man kann in Stücken, die nicht mehr als 100 Ångström'sche Einheiten enthalten, ohne merklichen Fehler die Abstände der Linien der Differenz ihrer Wellenlängen proportional setzen. Die Platten wurden auf einem Abbe'schen Comparator ausgemessen. Der mittlere Fehler der einzelnen Messung, die jedesmal als Mittel aus zwei Ablesungen gewonnen wurde, betrug bei den besseren Platten 1 μ, bei den weniger guten bis 2,5 μ. In Wellenlängen ausgedrückt sind das 0,02 und 0,05 Ångström'sche Einheiten der Linien erster Ordnung. Für die Linien zweiter Ordnung würde der mittlere Fehler halb so gross sein, wenn sie die gleiche Schärfe besässen, wie die Eisenlinien erster Ordnung. Das ist aber keineswegs der Fall. Die Aluminiumlinien sind alle verbreitert. Einen besseren Anhalt für die erreichte Genauigkeit bietet der Vergleich der auf verschiedenen Platten unter verschiedenen Umständen gemachten Bestimmungen der Aluminiumwellenlängen, die unten einzeln aufgeführt sind.

1) V. Schumann, Sitzungsber. d. Wien. Akad. Oct. 1893.
2) Rowland, Phil. Mag. July 1893.

Die Aufnahmen sind theils bei atmosphärischem Druck und Zimmertemperatur, theils im luftverdünnten Raum ausgeführt. Setzt man jedesmal für die Linien erster Ordnung die Wellenlängen ein, die der betreffenden Dichte der Luft entsprechen, so erhält man die Wellenlängen zweiter Ordnung ebenfalls für die betreffende Dichte der Luft und kann, wenn man die Dichte verändert, zugleich die Dispersion bestimmen. Diese Methode, die Dispersion der Luft zu messen, ist zuerst von Rydberg [1]) angegeben worden. Man müsste aber zu einer genauen Bestimmung der Dispersion die Dichte der Luft stärker verändern, als ich es gethan habe, und zugleich in grösserem Maassstabe arbeiten. Allerdings würde man dann der Schwierigkeit zu begegnen haben, dass grössere oder dichtere Luftschichten für die Strahlen kurzer Wellenlänge weniger durchlässig sind.

Die Rowland'schen Normalen beziehen sich auf Luft von 760 mm Quecksilber und 20° C. Ich setze die Dichtigkeit der Luft bei diesem Drucke und dieser Temperatur gleich 1. Je nach der Dichte der Luft, bei der die einzelnen Aufnahmen gemacht sind, müssten nun die Rowland'schen Normalen reducirt werden. Den Linien zweiter Ordnung entsprechen dann die halben Wellenlängen der Stellen im Spectrum erster Ordnung, die mit ihnen coincidiren. In den folgenden beiden Tabellen sind die Wellenlängen der Stellen des Spectrums erster Ordnung, die mit den Aluminiumlinien coincidiren, aufgeführt, aber die Reduction nach der Dichte der Luft ist dabei noch nicht angebracht.

	Nummer der Platte	Dichte der Luft	Wellenlängen erster Ordnung ohne Reduction nach der Dichte			
	I	0,028	3708,516	3724,585	3870,748	3980,018
	II	0,128	3708,480	3724,549	3870,688	3980,009
	IV	0,009	3708,463	3724,518	—	—
	VI	0,007	3708,488	3724,618	—	3980,052
Mittel	I, II, IV, VI	0,043	3708,487	3724,568	—	—
Mittel	I, II	0,078	—	—	3870,718	—
Mittel	I, II, III	0,055	—	—	—	3980,026

1) Rydberg, Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. Nr. 10. Stockholm.

Nummer der Platte	Dichte der Luft	Wellenlängen erster Ordnung ohne Reduction nach der Dichte			
III	0,98	3708,165	3724,424	3870,622	3979,850
V	1,005	3708,194	3724,359	3870,541	3979,770
Mittel	0,992	3708,180	3724,392	3870,582	3979,810

Bei den beiden kleinsten Wellenlängen ergiebt sich also auf den Unterschied 0,949 in der Dichte ein Unterschied von 0,307 und 0,176 in den Wellenlängen, bei der dritten auf 0,915 : 0,136 und bei der vierten auf 0,937 : 0,216. Auf den Unterschied 1 berechnet gibt das 0,324, 0,186, 0,149, 0,231. Bei der Dichte 1 würden wir also die Wellenlängen erhalten:

3708,177, 3724,391, 3870,581, 3979,808.

Diese brauchen nicht mehr reducirt zu werden, da sie sich ja auch auf die Dichte 1 beziehen. Für die Dichte 0 finden wir die unreducirten Wellenlängen

3708,501, 3724,577, 3870,730, 3980,039.

Diese sind noch auf das Vacuum zu reduciren. Nach den Bestimmungen von Hrn. H. Kayser und mir über die Dispersion der Luft [1]) sind die reducirten Wellenlängen

3709,537, 3725,617, 3871,806, 3981,143.

Danach sind also die Wellenlängen der Aluminiumlinien

bei 760 mm Quecks. u. 20° C.:	1854,09,	1862,20,	1935,29 [2]),	1989,90
im Vacuum:	1854,77,	1862,81,	1935,90,	1990,57
nach Cornu:	1852,2,	1860,2,	1933,5,	1988,1

Cornu's Messungen müssten noch um 0,3 vergrössert werden, um sie mit den Rowland'schen Normalen in Einklang zu bringen. Denn Cornu's Zahlen beziehen sich auf eine absolute Bestimmung der *D*-Linie, die um 16 Hunderttausendstel kleiner ist als diejenige, die Rowland zu Grunde gelegt hat. Cornu's Messungen sind demnach alle um etwa denselben Betrag von 1,6 zu klein, wenn man sie auf atmosphärischen Druck und Zimmertemperatur bezieht.

1) H. Kayser u. C. Runge, Abh. d. Berl. Akad. 1893.

2) Hier liegt noch eine Linie von der Wellenlänge 1930,4 ungefähr nach Cornu 1928,7, die ich wegen ihrer Schwäche und geringeren Schärfe nicht genauer zu bestimmen gesucht habe.

Was die Genauigkeit meiner Bestimmungen betrifft, so ist nach den Abweichungen vom Mittel der mittlere Fehler der einzelnen Messungen der oben angeführten Tabelle ein wenig kleiner als 0,04 in der ersten Ordnung und daher 0,02 in der zweiten. Das würde den mittleren Fehler des Mittels in allen Fällen kleiner als 0.014 machen.

Noch eine Controle der Genauigkeit bietet die Dispersion der Luft. Extrapolirt man nämlich die Dispersionsformel, die Hr. H. Kayser und ich für grössere Wellenlängen gefunden haben, so ergiebt sich, dass danach die Wellenlängen der Aluminiumlinien im Vacuum und in Luft von 760 mm Quecksilber und 20° C. die Unterschiede 0,610, 0,611, 0,623, 0,632 zeigen sollten. Beobachtet wurden die Unterschiede: 0,68, 0,61, 0,61, 0,67. Die Abweichungen von den extrapolirten Zahlen sind 0,07, 0,00, 0,01, 0,04. Nur die erste Abweichung ist für einen mittleren Fehler von 0,014 zu gross. Nimmt man aber an, dass die extrapolirten Zahlen um etwa 0,03 zu klein sind, so würden die Abweichungen das Dreifache des mittleren Fehlers nicht übersteigen. Es könnte aber auch sein, dass der Brechungsexponent der Luft von der Wellenlänge 1862 zu 1854 rascher wächst als unsere Formel zulässt. Denn es ist schon von Schumann bemerkt worden, dass die Absorption der Luft hier sehr schnell wächst und für 1854 merklich stärker ist als für 1862. Ich habe diese Bemerkung bestätigt gefunden. Mit der rascher wachsenden Absorption ist aber wahrscheinlich auch ein rascheres Wachsen des Brechungsexponenten verbunden.

Hannover, Techn. Hochschule, März 1895.

3. *Ueber den Dichroismus von Kalkspath, Quarz und Turmalin für ultrarothe Strahlen; von Ernest Merritt.*

(Hierzu Taf. I Fig. 1—4.)

Seit der Entdeckung der Eigenschaft des Turmalins, den ordentlichen und ausserordentlichen Strahl ungleich stark zu absorbiren, ist der Dichroismus der Krystalle von vielen Beobachtern untersucht worden. Es hat sich gezeigt, dass der Dichroismus keine Eigenschaft ist, welche allein der Turmalin besitzt, sondern dass auch bei vielen anderen Krystallen die Absorption des durchgehenden Lichtes von der Richtung der Polarisationsebene abhängt.

Wenn man sich des engen Zusammenhangs zwischen dem Absorptionsvermögen einer Substanz und ihrer Dispersion erinnert, so wird man zu der Annahme genöthigt, dass ein gewisser Grad von Dichroismus bei allen doppelbrechenden Körpern zu erwarten ist. Nach den Theorien von Helmholtz, Ketteler u. a. wird bekanntlich das Verhalten eines Körpers betreffs seiner Dispersion durch seine Absorption wesentlich bedingt. Da also die beiden polarisirten Strahlen beim Durchgang durch einen Krystall in ungleichem Grade gebrochen werden, so wäre eine ungleiche Absorption jener beiden Strahlen unmittelbar zu vermuthen. Es kommen freilich manche doppelbrechende Krystalle vor, bei welchen ein merklicher Grad von Dichroismus bisher nicht beobachtet werden konnte. Ferner fragt es sich, ob der Dichroismus der gefärbten Krystalle, z. B. des Turmalins, möglicherweise nur von irgend einer Beimischung des Krystalls herrührt; mit anderen Worten, ob der Dichroismus in solchen Fällen nur eine zufällige Eigenschaft ist, welche nicht unmittelbar von der Structur des Krystalls abhängt. Unsere gegenwärtige Kenntniss des Phänomens genügt nicht, diese Fragen zu beantworten, denn alle bisherigen Untersuchungen über die Absorption der Krystalle haben sich auf das Gebiet des sichtbaren Spectrums beschränkt, während das Verhalten der Krystalle im Ultraroth und im

Ultraviolett fast völlig unbekannt ist. Auch die Dispersion doppelbrechender Krystalle in diesen ausgedehnten Spectralgebieten ist nur wenig untersucht worden. Wegen ihrer Beziehung zu der Theorie der Doppelbrechung ist aber die genaue Kenntniss des Verlaufes der Dispersion bez. der Absorption in Krystallen von grossem Interesse. Der Verfasser hat es daher unternommen, den Verlauf des Dichroismus bei einigen Krystallen so weit wie möglich im ultrarothen Spectralgebiete zu verfolgen.

Die Anregung zu dieser Arbeit ist von den Hrn. du Bois und Rubens ausgegangen, welche bei der Untersuchung der Durchlässigkeit von Drahtgittern für ultrarothe Strahlen sehr starken Dichroismus beobachteten und ein eingehendes Studium der analogen Eigenschaften der Krystalle schon aus diesem Grunde für sehr erwünscht hielten. Es sei mir gestattet, an dieser Stelle beiden Herren, welche mich auch während der Arbeit durch ihren freundlichen Rath wesentlich unterstützt haben, meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Auch möchte ich es nicht unterlassen, hier des verstorbenen Leiters des Physikalischen Instituts, August Kundt, welcher meinen Untersuchungen stets das lebhafteste Interesse entgegenbrachte, in dankbarer Verehrung zu gedenken.

Versuchsanordnung.

Die Bestimmung der Durchlässigkeit einer Substanz für Wärmestrahlen bietet im allgemeinen keine grossen Schwierigkeiten, wenn es gelingt, den Apparat genügend empfindlich zu machen. Dass in dem jetzt betrachteten Falle die Strahlen geradlinig polarisirt werden müssen, ändert zwar in keinerlei Weise die Versuchsmethode, doch erschwert dieser Umstand das Beobachtungsverfahren dadurch, dass die Intensität der auf das Bolometer fallenden Energie infolge der Polarisation wesentlich vermindert wird. An der Polarisationsvorrichtung gehen etwa 70 Proc. der auffallenden Energiemenge verloren, während durch Reflexion an den beiden Oberflächen des Prismas ein weiterer Verlust von etwa 18 Proc. eintritt.[1]) Infolge dieses Umstandes und anderer später zu beschreibender Schwie-

1) du Bois u. Rubens, Wied. Ann. **49.** p. 593. 1893.

rigkeiten ist es mir nicht gelungen, im Ultrarothen weiter zu gelangen, als bis zu einer Wellenlänge von 5,5 μ. Da die Durchlässigkeit der untersuchten Substanzen sich jedoch an dieser Stelle bereits als sehr klein erwies, so hätte es wenig Zweck gehabt, noch weiter in der Richtung der längeren Wellen fortzuschreiten, ohne wesentlich dünnere Krystallplatten zur Verfügung zu haben.

Im Laufe der Versuche hat sich, trotz des scheinbar einfachen Charakters der Bestimmungsmethode, das Vorhandensein einer Fehlerquelle herausgestellt, deren Beseitigung die Hauptschwierigkeit der Untersuchung gebildet hat. Es fand nämlich beim Durchgang durch das Prisma eine Diffusion der Strahlen statt, welche darauf hinzudeuten schien, dass die Oberfläche nicht ganz glatt geschliffen, oder das Innere des Prismas nicht vollständig durchsichtig, sondern ein wenig trübe sei.

Das von mir gebrauchte Fluoritprisma war in der That nicht vollkommen rein, aber auch nach Bedeckung der sichtbaren Spalten und trüben Stellen blieb der störende Einfluss der diffusen Strahlen fast ebenso gross wie vorher. Es ist sehr möglich, dass das Phänomen zum Theil von wiederholter Reflexion im Innern des Prismas herrührt. Da aber ein zweites Prisma, dessen dritte Oberfläche geschwärzt war, dieselbe Diffusion zeigte, so kann die innere Reflexion keine vollständige Erklärung darbieten. Es scheint vielmehr die im Spectrum beobachtete diffuse Strahlung, von deren Vorhandensein man sich auf optischem Wege leicht überzeugen kann, durch die Construction der Spectrometer bedingt, da die aus dem Prisma austretenden Strahlen unter sehr verschiedenen Winkeln gleichzeitig in das Beobachtungsfernrohr gelangen. Es finden infolgegessen an den Rohrwänden Reflexionen statt, deren Einfluss zwar durch Schwärzen des Tubus und durch Anwendung von Blenden verringert, aber, so weit meine Erfahrung reicht, nicht mit genügender Vollständigkeit beseitigt werden können, wenn man in Spectralgebieten arbeiten will, in welchen die Energie sehr gering ist. Bevor ich zu der Beschreibung der schliesslich von mir gewählten Versuchsanordnung übergehe, möchte ich eine kurze Besprechung meiner ersten Versuche voranschicken, deren Resultate geeignet sind, den Einfluss der genannten Fehlerquelle erkennen zu lassen.

Zur Erzeugung des Spectrums diente ein einfaches, mit Fluoritlinsen und Fluoritprisma versehenes Spectrometer. Fig. 1 zeigt ein Schema des Apparates. Als Energiequelle diente ein Zirkonbrenner Z, dessen Strahlen durch die Steinsalzlinse L concentrirt wurden und nach Reflexion von der Polarisationsvorrichtung P auf den Spalt S fielen. Der Polarisator bestand aus vier etwa 0,1 mm dicken Glasplatten. Mit Hülfe eines Nicol'schen Prismas wurde es auf das Maximum der Polarisation eingestellt, und zwar war die Polarisation der sichtbaren Strahlen fast vollkommen. In Verbindung mit dem ca. 10′ breiten Bolometer stand ein empfindliches Galvanometer, welches von Hrn. Snow construirt und schon beschrieben worden ist.[1])

Der hohen Empfindlichkeit dieses Instrumentes verdanke ich die Möglichkeit, diese Messungen, trotz der ungünstigen Energieverhältnisse, bequem auszuführen. Der Ausschlag des Galvanometers wurde zuerst beobachtet, wenn die Strahlen direct ins Spectrometer fielen. Dann wurde die Krystallplatte, deren Durchlässigkeit gemessen werden sollte, vor den Spalt geschoben und der neue Ausschlag beobachtet. Das Verhältniss zwischen den beiden Ausschlägen ergiebt dann, abgesehen von der Unreinheit des Spectrums, die Durchlässigkeit der untersuchten Platte. Da diese in den meisten Fällen parallel zur optischen Axe des Krystalls geschnitten war, so konnten Messungen nicht allein für den ordentlichen, sondern auch für den ausserordentlichen Strahl mit derselben Platte gemacht werden. Stand die Richtung der Axe z. B. vertical, so hatte man es mit dem ausserordentlichen Strahl zu thun, während eine Drehung der Platte um einen Winkel von 90° die Bestimmung der Durchlässigkeit für den ordentlichen Strahl erlaubte, ohne irgend eine Aenderung des übrigen Apparates. In allen Fällen wurde bloss der erste Ausschlag des Galvanometers nach Entfernung des Schirmes S beobachtet. Es ist aber allgemein

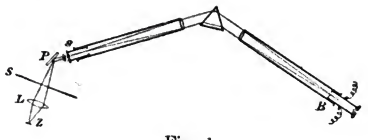


Fig. 1.

1) Snow, Wied. Ann. **47**. p. 208. 1892.

bekannt, dass der erste Ausschlag in solchen Fällen ein Maass für die auf das Bolometer fallenden Energie gibt, wie ich sowohl experimentell als theoretisch schon früher nachgewiesen habe.[1])

Trotz der verhältnissmässig kleinen Oeffnung der Linsen, deren Durchmesser etwa 25 mm betrug, wurde mit diesem Apparate eine befriedigende Empfindlichkeit erreicht. Aber die Curven, welche die Durchlässigkeit von Kalkspath bez. Quarz als Function der Wellenlänge darstellten, nahmen zwischen $\lambda = 2\ \mu$ und $\lambda = 4\ \mu$ eine merkwürdige Form an,

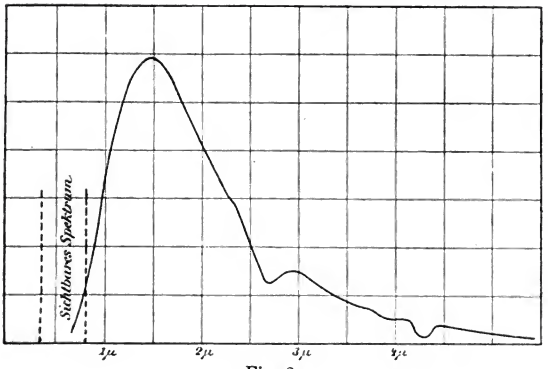


Fig. 2.

welche das Vorhandensein irgend eines Fehlers vermuthen liess. Die Durchlässigkeit nahm nämlich mit zunehmender Wellenlänge zuerst rasch ab, fing dann aber an, langsam wieder zu steigen, und zwar bei allen vier Curven in gleicher Weise. Diese Erscheinung aber deutet darauf hin, dass das Bolometer von diffusen Strahlen getroffen wird, welche den stärker brechbaren Spectralgebieten angehören und deren Vorhandensein eine scheinbare Erhöhung der Durchlässigkeit zur Folge hat, um so mehr, je grösser die Intensität der fremden Strahlung im Verhältniss zu der des scharf abgebildeten Spectralgebietes ist, in welchem man beobachtet. Ein Blick auf Fig. 2, welche die Energievertheilung in dem mit Hülfe des Fluoritprismas

1) E. Merritt, Am. Journ. of science **41.** p. 417. 1891.

entworfenen Spectrums des Zirkonbrenners darstellt, lehrt ferner, dass die Maximalordinate bei 1,4 μ diejenige bei 3,5 μ um das siebenfache, diejenigen bei 5 μ um das dreissigfache übersteigt. Es genügen folglich sehr geringe Verunreinigungen, um in diesen Gebieten des Spectrums die Absorptionsmessungen erheblich zu beeinflussen.

Es erschien mir daher zur Erlangung zuverlässiger Resultate unvermeidlich, die Strahlen schon vor ihrem Eintritt in das Spectrobolometer zu reinigen, d. h. jedesmal im wesentlichen nur diejenigen Strahlen durch den Spalt des Instrumentes gelangen zu lassen, für welche die Absorptionsmessung ausgeführt werden sollte.

Am einfachsten und vollkommensten wird dies durch die Methode der doppelten spectralen Zerlegung erreicht, welche

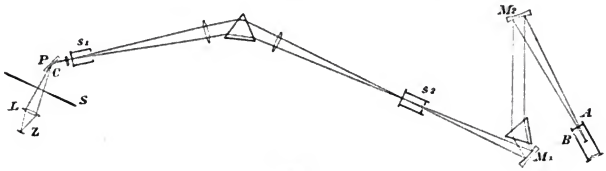


Fig. 3.

zu ähnlichen Zwecken schon öfters von anderen Beobachtern, u. a. von Helmholtz und Langley, angewendet wurde. Freilich macht dieselbe die Benutzung eines zweiten Spectrometers erforderlich; doch stand mir noch ein solches Instrument zur Verfügung, welches gegenüber dem oben beschriebenen ausserdem den Vortheil hatte, dass es statt der Fluoritlinsen Hohlspiegel aus Glas enthielt, welche auf electrischem Wege mittels Kathodenzerstäubung mit einer vorzüglich reflectirenden gleichmässigen Silberschicht überzogen waren. Es wurde deshalb dieses letztere Instrument als Spectrobolometer verwendet, das andere hingegen, welches mit Fluoritlinsen versehen war, diente nunmehr als Hülfsspectrometer zur Reinigung der Strahlen. Fig. 3 gibt eine schematische Abbildung der definitiven Versuchsanordnung. Der Schirm *S*, die Concentrationslinse *L*, der Polarisator *P* und die Krystallplatte *C* befinden sich alle vor dem ersten Spalt. Dieser darf viel breiter sein,

als der Spalt des zweiten Spectrometers, denn auf die Reinheit des ersten Spectrums kommt es wenig an. Die Krystallplatte befand sich während der ersten mit diesem Apparat ausgeführten Versuche vor dem zweiten Spalt s_2. Diese Einrichtung ist aber gefährlich und nicht zu empfehlen, denn wäre die Platte ein wenig schief eingestellt, d. h. nicht genau senkrecht zur Axe des Collimators, so würde eine kleine Verschiebung der durchgehenden Strahlen stattfinden, welche einen bedeutenden Fehler verursachen könnte. Einmal habe ich z. B. mit dieser Einrichtung das absurde Resultat bekommen, dass die Durchlässigkeit scheinbar grösser als 100 Proc. war! Steht

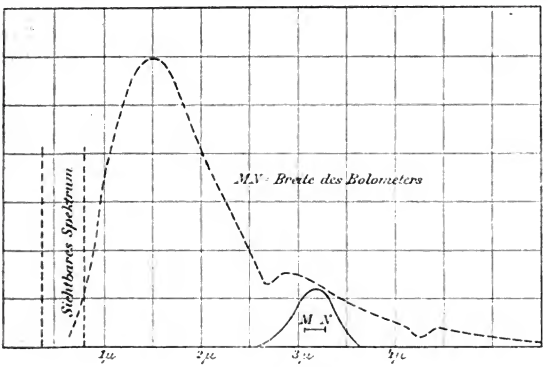


Fig. 4.

die Platte vor dem ersten Spalt s_1, so kann eine schiefe Stellung derselben nur die in Betracht kommende Dicke der absorbirenden Schicht beeinflussen. Es zeigte sich, dass diese Versuchsanordnung den Erwartungen vollkommen entsprach. Selbst bei sehr beträchtlicher Breite des Spaltes s_1 des Hülfsspectrometers war die in das Spiegelspectrometer gelangende Strahlung genügend homogen, um nach nochmaliger spectraler Zerlegung in diesem Instrument ein praktisch vollkommen reines Spectrum zu liefern. Es war nur erforderlich, die Einstellung auf Wellenlängen jetzt gleichzeitig an beiden Spectrometern vorzunehmen. Bei dem Hülfsspectrometer wurde dies durch Drehen des Prismas, bei dem Spiegelspectrometer durch

Einstellung des Bolometerarmes bewirkt. Wenn es sich z. B. darum handelte, Messungen bei der Wellenlänge 3 μ vorzunehmen, so zeigte nach Einstellung beider Instrumente für diese Wellenlängen die in dem Spectrobolometer beobachtete Energiecurve den in Fig. 4 durch die ausgezogene Linie gegebenen Verlauf. Die punktirte Linie gibt die Vertheilung der Energie, wenn keine spectrale Reinigung vorher stattfindet. Man erkennt hieraus, dass nunmehr der störende Einfluss der grossen Energiemengen zwischen 1 μ und 2 μ vollständig beseitigt ist.

Der neue Apparat war genügend lichtstark, um die Anwendung feiner Bolometer zu ermöglichen. Ich habe mich daher bei der Ausführung der endgültigeu Versuche eines Instrumentes bedient, welches mir von Hrn. Rubens freundlichst geliehen wurde. Es hatte eine scheinbare Breite von nur 3,5′, während sein Widerstand etwa 15 Ohm betrug. Dem Bolometerdraht war auch eine geringe Krümmung ertheilt, welche genau der Krümmung der Spectrallinien entsprach. Da bekanntlich das Spectrum bei Spiegelspectrometern für alle Wellenlängen gleich gut eingestellt ist, und zwar ohne irgend eine Aenderung, so habe ich mit dem neuen Apparate auch aus diesem Grunde ein viel reineres Spectrum erhalten. Dank diesem Vortheil und dem ausgezeichneten Bolometer habe ich Absorptionsstreifen beobachten können, welche mit dem früheren Apparate kaum zu bemerken waren.

Resultate.

Es sind im Ganzen drei Substanzen untersucht worden, nämlich Kalkspath, Quarz und Turmalin. Die beobachtete Durchlässigkeit dieser Substanzen als Function der Wellenlänge wird bez. in Fig. 1, 2, 3, Taf. I graphisch dargestellt. Jeder Punkt auf diesen Curven entspricht dem Mittelwerth aus einer Reihe von wenigstens fünf Beobachtungen. Falls das Galvanometer unruhig oder sein Ausschlag klein war, wurden öfters zehn oder zwanzig einzelne Beobachtungen gemacht, deren Mittelwerth genommen wurde.

Die Wellenlängen sind mit Hülfe der kürzlich von Rubens[1])

1) Rubens, Wied. Ann. **51.** p. 381. 1891. Die neuen Dispersionsmessungen von F. Paschen (Wied. Ann. **53.** p. 301. 1894) ergeben für

bestimmten Werthe der Brechungsexponenten von Fluorit aus der Ablenkung berechnet. Das Prisma wurde jeden Tag auf das Minimum der Ablenkung für Natriumlicht eingestellt und dann in dieser Lage festgehalten. Am Theilkreis des Instrumentes waren Ablesungen bis auf 10″ möglich; aber eine entsprechende Genauigkeit der Theilkreisbeobachtungen ist wegen der Breite des Bolometerdrahtes nicht erforderlich. Es genügt halbe Minuten zu notiren.

Die untersuchten Krystallplatten waren parallel zur Axe geschnitten, sodass die Durchlässigkeit für diejenigen Strahlen bestimmt wurde, welche senkrecht bez. parallel zur Axe polarisirt waren. Ausser den beiden Curven, welche die Durchlässigkeit für den ordentlichen bez. ausserordentlichen Strahl darstellen, wurde bei Kalkspath und Turmalin auch noch eine dritte Curve festgelegt, nämlich die Durchlässigkeitscurve für nntürliche, nicht polarisirte Strahlen. Zu diesem Zwecke wurde der Polarisator entfernt und Beobachtungen mit den directen Strahlen des Zirkonbrenners gemacht. Um die Polarisation des Prismas zu vermeiden, wurde überdies die Krystallplatte derart gestellt, dass ihre optische Axe einen Winkel von 45° mit dem Spalt bildete. Diese dritte Curve konnte infolge der grösseren Energie der directen Strahlen viel genauer bestimmt werden als die beiden anderen. Da sie fast immer in der Mitte zwischen den anderen verläuft, so liefert sie gewissermaassen eine Controlle für die Genauigkeit der Beobachtungen. Bei Kalkspath und Quarz habe ich die Resultate auch dadurch geprüft, dass ich die Durchlässigkeit einer senkrecht zur Axe geschnittenen Platte für gewöhnliche Strahlen ermittelte. Bei normaler Incidenz sind in diesem Falle offenbar nur parallel zur Axe polarisirte Strahlen vorhanden. Es war also dieselbe Absorption zu erwarten wie die, welche der ordentliche Strahl in der parallel zur Axe geschnittenen Platten erlitt. Die Curven für Kalkspath und Quarz zeigen in der That dieselbe Form wie die Curven für den ordentlichen Strahl in der gleichen Substanz, obwohl sie

die Wellenlängen über 3 μ etwas kleinere Werthe, doch sind die Unterschiede nur gering und erreichen bei 5 μ erst ca. $1^1/_2$ Proc., sodass ich von einer Umrechnung der Tabellen Abstand genommen habe. In den Zeichnungen würden die Unterschiede nicht zu bemerken sein.

wegen der verschiedenen Dicken der Platten nicht unmittelbar verglichen werden können. Im Folgenden gebe ich eine eingehende Beschreibung der erhaltenen Resultate:

Kalkspath.

Platte 1 parallel zur Axe: Dicke = 2,99 mm
Platte 2 senkrecht zur Axe: Dicke = 1,98 mm.

Beim ausserordentlichen Strahl (Curve *A* Fig. 1) wurden Messungen bis $\lambda = 4\ \mu$ mit dem 3,5′ breiten Bolometer gemacht. Von diesem Punkte an wurde wegen der geringen Intensität des Spectrums ein breiteres Bolometer gebraucht, welches aus fünf hintereinander geschalteten parallelen Eisendrähten bestand. Der Belichtungswiderstand nahm im Spectrum einen Raum von ca. 11′ ein; das Instrument wurde nur für diese einzige Curve, und zwar nur für den zwischen 4 μ und 3,5 μ liegenden Bereich angewandt.

Die Durchlässigkeitsbestimmungen für den ordentlichen Strahl in Platte 1 hören praktisch bei $\lambda = 3{,}04\ \mu$ auf, da die Durchlässigkeit von diesem Punkte an zu gering war, um genaue Messungen zu erlauben. Interessant schien mir die Curve für den ordentlichen Strahl (Fig. 1 Curve *O*) zwischen $\lambda = 2\ \mu$ und $\lambda = 3\ \mu$.

Um die Lage der beiden Absorptionsstreifen möglichst genau festzulegen, habe ich die Messungen in diesem Bereich mehrmals wiederholt. Obwohl die verschiedenen Beobachtungen nicht genau miteinander übereinstimmen, bleiben die Abweichungen immerhin stets innerhalb der durch die Breite des Bolometers bedingten Fehlergrenzen. Damit man sich den Sachverhalt besser vorstellen kann, habe ich in Fig. 1 den vom Bolometerdrahte eingenommenen Raum durch die Linie PQ dargestellt. Man ersieht sofort, dass auch dieses verhältnissmässig schmale Bolometer dennoch zu breit war, um vollkommen correcte Resultate zu erreichen. Mir scheint es durchaus möglich, dass die beiden Absorptionsstreifen zwischen 2 μ und 3 μ in Wirklichkeit bedeutend tiefer herabreichen und auf ein noch geringeres Spectralgebiet bschränkt sind, als sich dies aus unseren Beobachtungen ergiebt. Ferner ist es nicht ausgeschlossen, dass jeder derselben aus mehreren einzelnen Absorptionsbanden besteht.

In der Curve für den ausserordentlichen Strahl ist dagegen *keine Spur* von diesen Streifen zu bemerken. Die beiden Curven scheinen durchaus voneinander unabhängig zu sein. Hieraus ersieht man auch, dass die Polarisation eine praktisch vollkommene war, sonst wäre die Form der einen Curve durch die Absorptionsstreifen in der anderen beeinflusst. Die vollständige Unabhängigkeit der beiden Curven in allen untersuchten Fällen ergiebt daher nach meiner Meinung eine Controlle dafür, dass der Polarisator in befriedigender Weise functionirte.

Curve *K* Fig. 4 zeigt die Resultate, welche bei der senkrecht zur Axe geschnittenen Platte mit nicht polarisirten Strahlen erhalten wurden. Wegen der geringeren Dicke dieser Platte und der grösseren Energie der directen, nicht polarisirten Strahlen habe ich Messungen bis $\lambda = 5{,}5\ \mu$ ausführen können. Der als gebrochene Linie gezeichnete Theil der Curve *O* in Fig. 1 ist aus diesen Resultaten berechnet worden, um die ganze Curve im gleichen Maasse darstellen zu können.

Curve *M*, Fig. 1 stellt die Durchlässigkeit der zur Axe parallelen Platte für nicht polarisirte Strahlen als Function von λ dar. Diese Curve gibt eine sehr befriedigende Bestätigung der Genauigkeit der mit polarisirten Strahlen durchgeführten Messungen, da sie fast durchweg in der Mitte zwischen den Curven *O* und *A* verläuft. Nur in der Nähe von $\lambda = 4{,}7\ \mu$ ist eine bedeutende Abweichung zu bemerken, welche wohl zum Theil dadurch zu erklären ist, dass zur Ermittelung der Curve *A* das breite Bolometer, dessen fünf parallele Drähte nicht genau in gleicher Entfernung voneinander standen, benutzt wurde.

Um die Resultate auch in einer von der Plattendicke unabhängigen Form ausdrücken zu können, habe ich sowohl für Kalkspath als auch für die beiden anderen untersuchten Substanzen den Extinctionscoefficienten für verschiedene Wellenlängen berechnet. Wird die Intensität des einfallenden bez. austretenden Strahles mit I_1 bez. I_2 bezeichnet, während $r I_1$ die Intensität der durch Reflexion an der ersten Grenzfläche zurückgeworfenen Strahlen bedeutet, so haben wir:

$$I_2 = I_1 (1 - 2r + \ldots) e^{-dp}$$

Den Werth des Extinctionscoefficienten p erhalten wir also aus folgender Gleichung:

$$p = -\frac{1}{d} \log \text{nat} \frac{I_1 (1 - 2r)}{I_2},$$

wo d die Dicke der Platte bezeichnet. Die Glieder mit höheren Potenzen von r sind zu vernachlässigen, da r in keinem Falle grösser als 0,05 ist. Für das sichtbare Gebiet wurde r mit Hülfe der Fresnel'schen Formel aus dem Brechungsexponenten berechnet. Da die Reflexion sich im allgemeinen sehr wenig

Tabelle I.

Kalkspath.

Ordentlicher Strahl				Ausserordentlicher Strahl			
Wellenlänge	Durchlässigkeit (beob.)	p	Absorption einer 1 mm dicken Platte (ber.)	Wellenlänge	Durchlässigkeit (beob.)	p	Absorption einer 1 mm dicken Platte (ber.)
1,02 μ	90,5%	0,0	0,0	1,02 μ	94,0%	—	—
1,25	89,6	0,0	0,0	1,27	91,7	—	—
1,45	88,9	0,0	0,0	1,80	91,7	—	—
1,72	88,0	0,03	0,2%	2,15	92,0	—	—
2,07	85,5	0,13	1,0	2,49	89,0	0,14	1,0%
2,11	71,0	0,74	7,0	2,87	90,4	0,08	0,5
2,30	50,0	1,92	17,3	3,00	81,5	0,43	4,0
2,44	36,4	3,00	25,7	3,28	62,5	1,32	12,2
2,53	50,0	1,92	17,3	3,38	71,0	0,89	8,2
2,60	62,0	1,21	11,2	3,59	54,5	1,79	16,0
2,65	53,0	1,74	15,7	3,76	50,3	2,04	18,4
2,74	44,2	2,36	21,0	3,90	65,3	1,17	10,8
2,83	60,0	1,32	12,4	4,02	71,0	0,89	8,2
2,90	72,0	0,70	6,6	4,41	67,2	1,07	0,0
2,95	52,0	1,80	16,2	4,67	45,5	2,40	21,7
3,04	21,5	4,71	37,4	4,91	64,0	1,25	11,5
3,30*	0,5	22,7	90	5,04	49,0	2,13	19,2
3,47	1,7	19,4	86	5,34	24,5	4,41	35
3,62	13,6	9,6	61	5,50	2,0	12,8	73
3,80	2,2	18,6	84				
3,98	0,0	∞	100				
4,35	24,3	6,6	48				
4,52	5,2	14,3	76				
4,66	8,7	11,6	68				
4,83	27,0	6,1	45				
4,96	29,3	5,5	42				
5,25	19	8,0	55				

* Von dieser Stelle an wurden die Beobachtungen mit Platte 2 gemacht.

mit der Wellenlänge ändert und die durch Reflexion bedingte Correction überhaupt sehr klein ist, so habe ich r unabhängig von λ betrachtet und seinen für das sichtbare Gebiet berechneten Werth für das ganze untersuchte Bereich benutzt.

Die berechneten Werthe des Extinctionscoefficienten p für Kalkspath befinden sich in Tabelle I; als Einheit der Dicke (d) ist das Centimeter angenommen. In der vierten Columne derselben Tabelle werden auch die berechneten Werthe der Absorption einer 1 mm dicken Platte angegeben.

Quarz.

Platte 1 parallel zur Axe: Dicke = 3,02 mm
Platte 2 senkrecht zur Axe: Dicke = 3,91 mm.

Fig. 2 Taf. I gibt eine graphische Darstellung der mit Quarz erreichten Resultate. Die beiden Curven O und A sind einander sehr ähnlich, doch sind einige Unterschiede deutlich

Tabelle II.

Quarz.

Ordentlicher Strahl				Ausserordentlicher Strahl			
Wellenlänge	Durchlässigkeit (beob.)	p	Absorption einer 1 mm dicken Platte (ber.)	Wellenlänge	Durchlässigkeit (beob.)	p	Absorption einer 1 mm dicken Platte (ber.)
0,80 μ	91,2%	0	0	0,80 μ	94,0%	0	0
1,26	91,4	0	0	1,40	92,8	0	0
1,51	91,8	0	0	1,55	92,8	0	0
1,80	91,1	0	0	1,81	91,5	0	0
2,05	91,2	0	0	2,22	89,3	0	0
2,50	91,7	0	0	2,50	89,8	0	0
2,67	91,6	0	0	2,74	91,4	0	0
2,72*	84,0	0,20	1,6%	2,89	87,8	0,11	1,0%
2,83*	75,5	0,47	4,3	3,00	82,3	0,33	3,2
2,95*	72,5	0,57	5,4	3,08	84,0	0,26	2,4
3,07*	80,0	0,31	3,0	3,26	87,9	0,11	1.0
3,17*	84,0	0,20	1,6	3,43	77,8	0,51	4,8
3,38*	85,6	0,15	1,3	3,52	71,9	0,76	7,3
3,67*	55,5	1,26	11,5	3,59	51,3	1,88	16,8
3,82*	48,5	1,61	14,6	3,64	52,2	1,83	16,5
3,96*	41,0	2,04	18,3	3,74	56,0	1,62	14,6
4,12*	24,0	3,41	29,0	3,91	48,6	2,22	10,2
4,50	10,0	7,30	48,5	4,19	33,6	3,35	28,3
				4,36	7,9	8,0	55

* Die mit einem Sternchen bezeichneten Beobachtungen sind mit Platte 9 gemacht worden.

erkennbar. Es befindet sich z. B. in der Curve für den ordentlichen Strahl (*O*) ein ziemlich unscharfer Absorptionsstreifen, dessen Wellenlänge ca. 2,90 μ beträgt. Dieser Streifen ist in der Curve *A* nicht vorhanden. Die mit der Platte 2 erhaltenen Resultate sind in Curve *Q* Fig. 4 dargestellt und stimmen mit den in der Curve *O* wiedergegebenen gut überein.

Die berechneten Werthe des Extinctionscoefficienten sind in Tabelle II gegeben.

Turmalin.

Nur eine Platte wurde untersucht, welche aus einem verhältnissmässig durchsichtigen und spaltenfreien grünen Krystall aus Brasilien geschnitten war. Ihre Dicke betrug 2,22 mm. Wegen der starken Absorption des Krystalls war es leider nicht möglich, die Messungen auch auf das sichtbare Gebiet auszudehnen. Die Absorption des ausserordentlichen Strahls war an der Grenze des sichtbaren Spectrums eine sehr hohe, nämlich ca. 90 Proc. bei rothgelbem Licht, während der ordentliche Strahl im sichtbaren Spectrum vollständig ausgelöscht wurde. Erst bei $\lambda = 1{,}34\ \mu$ fing er an, in merkbarem Grade

Tabelle III.

Turmalin.

Ordentlicher Strahl				Ausserordentlicher Strahl			
Wellenlänge	Durchlässigkeit (beob.)	p	Absorption einer 1 mm dicken Platte (ber.)	Wellenlänge	Durchlässigkeit (beob.)	p	Absorption einer 1 mm dicken Platte (ber.)
1,17 μ	0,0	∞	100%	0,76 μ	11,5%	9,20	60%
1,34	3,5%	14,6	77	0,885	23,0	6,17	46
1,54	13,5	8,6	57	1,00	14,5	8,30	56
1,73	34,0	4,45	36	1,25	6,0	12,1	70
1,94	52,5	2,43	21	1,50	23,0	6,17	46
2,09	44,0	3,24	27,5	1,76	59,0	1,91	17
2,30	27,5	5,30	41	1,89	66,0	1,40	13
2,40	26,0	5,50	42	2,04	62,0	1,68	15
2,50	29,0	5,08	40	2,23	39,0	3,78	31
2,76	9,0	10,3	63	2,40	12	9,1	60
2,83	7,0	11,4	67	2,76	2	16,6	81
2,88	15,0	8,05	55	3,04	6	12,2	71
3,20	26,0	5,50	42	3,32	18	7,40	52
3,53	12,5	8,97	59	3,94	15	8,05	55
3,93	0,5	20,1	13				

durchgelassen zu werden. Die beiden Curven *O* und *A* (Fig. 3. Taf. I) schneiden sich zuerst bei $\lambda = 2{,}3\ \mu$ und zum zweitenmal bei $\lambda = 3{,}48\ \mu$. In dem zwischen diesen beiden „neutralen Punkten" liegenden Bereich tritt also der Dichroismus des Turmalins im umgekehrten Sinne auf. [1]) Die sogenannte Babinet'sche Regel, nach welcher der am meisten gebrochene Strahl auch am meisten absorbirt wird, kann dieser Eigenthümlichkeit zufolge bei Turmalin keine Bestätigung finden, vorausgesetzt, dass bei der Dispersion der beiden Strahlen nicht ähnliche Phänomene vorkommen.

Die Durchlässigkeit der Platte für nicht polarisirte Strahlen wurde auch ermittelt und Curve *M*, welche die Resultate darstellt, zeigt eine befriedigende Uebereinstimmung mit den beiden anderen Curven. Die berechneten Werthe des Extinctionscoefficienten werden in Tabelle III gegeben.

Schluss.

Fassen wir die hauptsächlichsten Resultate der Versuche in wenige Worte zusammen:

1. Die Absorption der ultrarothen Strahlen in Kalkspath, Quarz und Turmalin hängt von der Orientirung der Polarisationsebene ab. Namentlich bei Kalkspath und Turmalin sind die beiden Curven, welche die Durchlässigkeit für den ordentlichen bez. ausserordentlichen Strahl als Function der Wellenlänge darstellen, ganz verschieden, sodass sie voneinander vollständig unabhängig zu sein scheinen.

2. Folgende Absorptionsstreifen sind in den Durchlässigkeitscurven beobachtet worden:

Kalkspath. Ordentlicher Strahl: bei $\lambda = 2{,}44\ \mu$ und $\lambda = 2{,}74\ \mu$. Diese Streifen sind sehr scharf. Auch bei $\lambda = 3{,}4\ \mu$, $\lambda = 4{,}0\ \mu$ und $\lambda = 4{,}6\ \mu$ sind breite Streifen zu bemerken.

Ausserordentlicher Strahl. $\lambda = 3{,}28\ \mu$, $\lambda = 3{,}75\ \mu$ und $\lambda = 4{,}66\ \mu$.

---

1) Vgl. die Betrachtungen von du Bois und Rubens (Wied. Ann. **47**. p. 628. 1893) über die Analogie dichroitischer Krystallplatten mit Metalldrahtgittern, welches letztere bekanntlich eine ebensolche Umkehr im Sinne ihrer Polarisation aufweisen.

Quarz. Ordentlicher Strahl: bei $\lambda = 2{,}90\ \mu$. Bei $\lambda = 4{,}75\ \mu$ hört die Durchlässigkeit für die beiden Strahlen fast vollständig auf.

Turmalin. Ordentlicher Strahl: $\lambda = 2{,}82\ \mu$.

3. Die Durchlässigkeitscurven für Turmalin schneiden sich zuerst bei $\lambda = 2{,}30\ \mu$ und dann wieder bei $\lambda = 3{,}48\ \mu$.

Zwischen diesen neutralen Punkten tritt also der Dichroismus des Turmalins im umgekehrten Sinne auf.

Berlin, Physikal. Inst. der Univ., März 1895.

4. *Ueber die Durchlässigkeit fester Körper für den Lichtäther; von L. Zehnder.*

Im Jahre 1851 veröffentlichte Fizeau einen „Versuch, welcher zu zeigen scheint, dass die Bewegung der Körper die Geschwindigkeit ändert, mit welcher das Licht sich in deren Innerem fortpflanzt".[1]) Sein Plan war, über die drei wesentlich verschiedenen Hypothesen zu entscheiden, die sich auf den Zustand beziehen, in welchem man den Aether im Innern eines durchsichtigen Körpers vorhanden annimmt. Diesen drei Hypothesen gab er folgenden Wortlaut:

„Entweder ist der Aether adhärirend und wie an die Körpermolecüle befestigt anzunehmen und theilt demzufolge die Bewegungen, welche diesen Körpern mitgetheilt werden können";

„oder der Aether ist frei und unabhängig und wird nicht durch den in Bewegung begriffenen Körper mitgerissen";

„oder endlich, nach einer dritten Hypothese, welche der einen oder der anderen der vorigen Hypothesen einen Theil entnimmt, wäre nur ein Theil des Aethers frei, der andere wäre mit den körperlichen Molecülen fest verbunden, und nur dieser Theil würde die Bewegungen des Körpers mitmachen."

Zu seinen Versuchen benutzte Fizeau strömendes Wasser und strömende Luft. In Uebereinstimmung mit jener dritten, von Fresnel herrührenden Hypothese fand er in der That eine Beeinflussung der Lichtgeschwindigkeit durch das in der Richtung der Lichtstrahlen bez. dieser Richtung entgegenströmende Wasser, in der Weise, dass sich nur ein Theil des gesammten Aethers dieses Wassers wirksam zeigte. Dagegen liess sich durch den Aether der strömenden Luft gar keine Beeinflussung jener Lichtgeschwindigkeit wahrnehmen.

Fresnel hat seiner Vorstellung entsprechend, nach welcher optisch isotrope Körper mit verschiedenen Brechungsexponenten

1) Fizeau, Compt. rend. **33.** p. 349. 1851; Ann. de Chim. et de Phys. (3) **57.** p. 385. 1859.

Aether von gleicher Elasticität aber von ungleicher Dichte in ihrem Innern enthalten, seine Hypothese noch weiter dahin präcisirt: „es werde nur so viel Aether vom betreffenden Körper bei seiner Bewegung mit fortgeführt, als dem *Ueberschuss* der Dichte seines Aethers über die Dichte des Aethers seiner Umgebung entspreche.“ Diese Annahme erlaubt zu berechnen, um wieviel die Lichtgeschwindigkeit durch die Bewegung eines Licht führenden Mediums geändert werden müsste, und Fizeau's Versuche ergeben nun für Wasser ein von dem theoretisch berechneten Werthe nur etwa um 15 Proc. abweichendes Resultat, welches Resultat dieser Fresnel'schen Theorie noch günstiger ausfiele, wenn man mit Fizeau nicht die *mittlere* Strömungsgeschwindigkeit des Wassers in den Versuchsröhren, sondern diejenige in die Rechnung einführte, welche die von den Lichtstrahlen wirklich durchsetzten mittelsten Wasserstrahlen besassen. Entsprechende Schätzungen liessen die beste Uebereinstimmung erwarten, und in der That haben spätere Versuche der Hrn. Michelson und Morley[1]) eine solche fast vollständige Uebereinstimmung ihrer Ergebnisse mit jener Fresnel'schen Theorie erkennen lassen. Auch diese Forscher konnten aber keine Beeinflussung der Lichtgeschwindigkeit durch bewegte Luft wahrnehmen, was wohl davon herrührt, dass wegen der geringen Unterschiede der Brechungsexponenten der Luft und des Lichtäthers die der Fresnel'schen Theorie zufolge stattfindende Aenderung der Lichtgeschwindigkeit zu klein war, um bei solchen Versuchsanordnungen gemessen werden zu können.

Die von Fizeau und von Michelson und Morley beobachteten Verschiebungen der Interferenzstreifen, mittels welcher sie die Aenderung der Lichtgeschwindigkeit bestimmten, waren nicht gross: Des ersteren Schlüsse basiren auf Messungen einer Verschiebung um 0,23 Interferenzstreifen, während die letzteren bei ihren quantitativ günstigsten Versuchen eine Verschiebung um beinahe einen Streifen erhalten haben. Wäre statt der dritten (Fresnel'schen) die oben zuerst genannte Hypothese, dass der im Körper befindliche Aether von den Körpermolecülen bei ihrer Bewegung völlig mitgerissen werde,

1) Michelson u. Morley, Sill. Journ. (2) **31.** p. 377. 1886.

streng richtig, so hätten Fizeau eine Verschiebung um etwa 0,5, Michelson und Morley eine solche um 2,3 Streifen beobachtet.

Viel grösser muss die Differenz der nach den drei verschiedenen Hypothesen zu erwartenden Streifenverschiebungen bei der folgenden Anordnung gemacht werden können: In einem möglichst luftleer gepumpten Cylinder C (Fig. 1) lässt sich ein Kolben K, wegen des luftverdünnten Raumes, sehr rasch hin- und herbewegen. Verbindet man nun die beiden Cylinderabtheilungen, in welche der Cylinder durch den Kolben getheilt wird, durch eine Rohrleitung RR miteinander, so wird der Aether, welcher bei der Kolbenbewegung nach einer jener drei Hypothesen, etwa in der einen Cylinderabtheilung verdichtet wird, wenigstens zum Theil durch die Rohrleitung hindurch in die andere Cylinderabtheilung strömen, in welcher eine entsprechende Aetherverdünnung entsteht. In dieser Rohrleitung ist eine allfällige Bewegung des Aethers während der Kolbenbewegung leicht zu constatiren, wenn man — in ähnlicher Weise wie bisherige Beobachter — zwei miteinander interferirende Lichtstrahlen in entgegengesetzten Richtungen durch die Versuchsröhren hindurchschickt und die auftretenden Interferenzerscheinungen verfolgt.

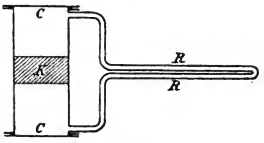


Fig. 1.

Vom Standpunkte der Fresnel'schen Anschauungen über die Aetherdichte in verschiedenen Körpern wollen wir der Frage näher treten, wie sich jenen drei Hypothesen zufolge der Aether bei einer Bewegung des Kolbens verhält. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, der Körper bestehe aus discret vertheilten materiellen Atomen, deren Zwischenräume mit Aether ganz ausgefüllt seien; die materiellen Atome selber seien für den Aether undurchdringlich. Um die Betrachtungen möglichst zu vereinfachen, benutzen wir zuerst die Vorstellung, das Verhältniss ε des Gesammtvolumens aller dieser materiellen Atome des Körpers zum Körpervolumen selber sei verschwindend klein; es sei also $\varepsilon = 0$, mit anderen Worten: Das vom Aether des Körpers in Beschlag genommene Volumen unterscheidet

sich nur um unendlich wenig vom Volumen des gesammten Körpers.

Der ersten Hypothese zufolge wird aller im Kolben enthaltene Aether bei der Bewegung durch die materiellen Atome mitgerissen. Es muss also vor dem bewegten Kolben eine Verdichtung des im ausgepumpten Cylinderhohlraum befindlichen Aethers, hinter dem Kolben eine entsprechende Aetherverdünnung entstehen. Aetherdrucke gleichen sich, wenn diese erste Hypothese gültig sein soll, nicht durch die Cylinderwandungen hindurch aus, weil auch an den materiellen Atomen des Cylinders der Aether in gleicher Weise adhärirend sein muss, wie an denjenigen des Kolbens; der Aether wird also durch die Rohrleitung getrieben werden, in demjenigen Sinne, in welchem ein durch den bewegten Kolben verdichtetes Gas getrieben würde. Die Geschwindigkeit des durch die Rohrleitung strömenden Aethers lässt sich wegen der fast plötzlich (mit Lichtgeschwindigkeit) sich ausgleichenden Aetherdrucke, ohne weiteres aus der Kolbengeschwindigkeit ableiten vermittels des Verhältnisses der beiden entsprechenden Querschnitte; sie superponirt sich für die Berechnung der auftretenden Interferenzerscheinung einfach der Lichtgeschwindigkeit.

Nach der zweiten Hypothese muss dagegen der im Kolben vorhandene Aether bei der Kolbenbewegung zurückbleiben, und weil, soweit bis jetzt bekannt, die Brechungsexponenten von nahezu allen Körpern grösser als 1 sind[1]), so entsteht hinter dem Kolben im allgemeinen eine Aetherverdichtung, infolge deren ein Theil des Aethers durch jene Rohrleitung in umgekehrter Richtung, als der ersten Hypothese entspricht, hindurchströmen muss.[2])

Ist endlich die dritte, von Fresnel noch genauer specialisirte Hypothese streng richtig, so kann bei der Kolben-

1) Vgl. dagegen über die Brechungsexponenten der Metalle: Kundt, Wied. Ann. **34.** p. 469. 1888; Sitzungsber. der Berl. Akad. vom 15. Febr. 1888.

2) Es mag manchem paradox erscheinen, dass diesfalls im Cylinderinnern Aether in einer Richtung strömen würde, welche der Bewegungsrichtung des Kolbens entgegengesetzt wäre; doch lassen sich zu diesem Verhalten leicht Analogien finden.

bewegung sowohl vor als hinter dem Kolben weder eine Aetherverdichtung noch eine Aetherverdünnung auftreten, und in der Rohrleitung kann sich also auch keine Aetherbewegung bemerkbar machen.[1])

Nun lassen wir unsere oben gemachte Voraussetzung, dass annäherungsweise $\varepsilon = 0$ sei, fallen. Die von Aether umgebenen materiellen Atome selber werden wir stets für den Aether als undurchdringlich annehmen müssen; diese Atome werden also, ihrem Volumenantheil ε entsprechend, bei der Kolbenbewegung ein gewisses Aethervolumen vor sich herschieben und folglich müssen die nach der zweiten und der dritten Hypothese erhaltenen Resultate eine Correction in demselben Sinne erfahren. Also wird, wenn ε einen endlichen Werth besitzt, auch für den Fall, dass die dritte Fresnel'sche Hypothese streng richtig sein sollte, doch bei der Kolbenbewegung ein endliches Aethervolumen im Sinne der ersten Hypothese, das heisst wie ein Gas, durch die Rohrleitung hindurchgetrieben.

Einen solchen Apparat — nämlich einen Cylinder nebst Kolben und beide Cylinderabtheilungen verbindender Rohrleitung — liess ich für derartige Versuche auf meine Kosten wirklich herstellen.[2]) Würde der Kolben gemäss der ersten Hypothese bei der Bewegung seinen Aether vollkommen mitreissen und eine entsprechende Menge von Aether durch die Versuchsröhren hindurch von einer zur anderen Cylinderabtheilung hinübertreiben, so hätte ich unter meinen Versuchsbedingungen, bei etwa 150 cm maximaler Kolbengeschwindigkeit pro Secunde und bei Umkehr der Strömungsrichtungen, eine doppelte Verschiebung der Interferenzstreifen um etwa $2 \times 14 = 28$ (bez. bei einer Abänderung des optischen Systems um 14) Streifenbreiten beobachtet; der zweiten Hypothese

---

1) Diese auf den Fresnel'schen Vorstellungen basirenden Betrachtungen scheinen mir mit dem Umstande, dass Brechungsexponenten von Metallen (Silber, Gold, Kupfer) nach Kundt's Beobachtungen kleiner als 1 sind, schwer vereinbar.

2) Im Interesse der in Angriff genommenen Frage hat mir Hr. Fr. Klingelfuss in Basel für den ihm zur Ausführung übergebenen Apparat nur seine Selbstkosten berechnet, was ich ihm hiermit aufs beste verdanke.

entsprechend hätte ich dagegen eine umgekehrt gerichtete Streifenverschiebung wahrnehmen können; endlich musste sich der Fresnel'schen Hypothese zufolge ein Mittelwerth zwischen diesen beiden Verschiebungen ergeben, welcher unter Umständen nahezu Null sein konnte.

Nun vermochte ich in vielen Versuchen und bei verschiedenen Versuchsanordnungen auch nicht die geringste durch Kolbenbewegung bewirkte Verschiebung der Interferenzstreifen zu entdecken, vorausgesetzt, dass der Cylinder möglichst luftleer gepumpt war. Gestützt auf frühere Versuche schätze ich $^1/_{40}$ Streifenbreite als diejenige Grösse der Streifenverschiebung, welche mir bei diesen Beobachtungen, bei welchen ich das damals beschriebene Einstellungsverfahren[1]) angewandt hatte, nicht hätte entgehen können; mein Kolbenquerschnitt war ungefähr 280 mal grösser als der Versuchsröhrenquerschnitt; diesen Verhältnissen zufolge war also die Geschwindigkeit des durch meine Versuchsröhren vermöge der Kolbenbewegung hindurchgetriebenen Aethers noch nicht einmal auf die Hälfte der Kolbengeschwindigkeit (bez. auf diese Geschwindigkeit selber) zu bringen.

In Uebereinstimmung mit den Resultaten von Fizeau und von Michelson und Morley geht aus diesen Versuchen hervor, dass von den drei oben genannten Hypothesen jedenfalls die erste, aller Aether werde von den materiellen Atomen mitgerissen, der Wirklichkeit unbedingt nicht entsprechen kann; denn sonst wäre Aether durch meine Rohrleitung hindurchgetrieben worden. Zwischen der zweiten und der dritten Hypothese können dagegen meine Versuche ohne Kenntniss der Verhältnisszahl ε nicht entscheiden. Ist nämlich ε genügend gross, so können meine Versuche mit der zweiten, ist es verschwindend klein, so können sie mit der dritten (Fresnel'schen) Hypothese in Uebereinstimmung[2]) sich befinden. Unter Umständen könnte also ein Mittel zwischen diesen zwei Hypothesen der Wahrheit am nächsten kommen. Werden dagegen andere Versuche, zum Beispiel diejenigen von

1) Röntgen u. Zehnder, Wied. Ann. **44.** p. 24. 1891.

2) Nach dieser Hypothese würde nämlich bei verschwindend kleinem ε die Lichtgeschwindigkeit in dem Aether, welcher einen bewegten Körper umgiebt, nicht geändert werden.

Fizeau und von Michelson und Morley, als beweiskräftig für die dritte Hypothese angenommen, dann würde sich aus meinen Versuchen jene Verhältnisszahl ε des Volumens der materiellen Atome zu demjenigen des Gesammtkörpers schätzen lassen, und zwar würde sie sich bei meiner Anordnung kleiner als $(14 \times 40 =) 560$ ergeben; mit anderen Worten: es würde weniger als $^1/_{560}$ des Volumens des Kolbens von den materiellen, wägbaren Atomen, das übrige aber vom Lichtäther eingenommen, immer unter der Voraussetzung der Richtigkeit der Fresnel'schen Grundanschauungen über die verschiedene Aetherdichte im Innern von verschiedenen Körpern. Aus meinen Versuchen darf man sodann den Schluss ziehen, dass feste Körper ähnlich wie flüssige für den Aether ganz ausserordentlich durchlässig sind, und dass undurchsichtige Körper sich in dieser Beziehung analog verhalten wie die durchsichtigen; denn bei meinem Apparate waren Cylinder und Kolben aus Eisen hergestellt.

Solch' ein geringer Widerstand, den sogar feste Körper, die wenigstens bei meinen Versuchen wesentlich in Betracht kommen, dem Durchblasen des Lichtäthers durch dieselben entgegensetzen, ist schwer zu begreifen, und dennoch nicht ganz unwahrscheinlich. Hat ja doch Amagat bei seinen Druckversuchen gefunden, dass Stahlcylinder von 8 cm Wandstärke, welche für andere Flüssigkeiten, z. B. für Glycerin etc., absolut dicht waren, bei 4000 Atm. Druck von Quecksilber durchströmt wurden, sodass ein feiner Quecksilberregen ähnlich wie ein Dampf ringsum aus den Cylinderwandungen ausströmte [1]); und selbst Platin ist bekanntlich in der Rothgluth für Wasserstoff durchlässig. Wenn also anscheinend dichte feste Körper unter Umständen für andere materielle Körper leicht durchlässig sind, wie viel mehr werden sie dies für den alles durchdringenden Aether sein müssen!

Die Versuche und Versuchsresultate wurden bis dahin unter den Gesichtspunkten der Fresnel'schen Annahme betrachtet, dass die verschiedenen optisch isotropen Körper Aether von gleicher Elasticität aber ungleicher Dichte enthalten; aber auch vom Standpunkte der Neumann'schen Vorstellungen

1) Amagat, Ann. de chim. et de phys. (6) **29.** p. 87. 1893.

aus, nach welchen verschiedene Körper stets gleiche Aetherdichte, nur ungleiche Elasticität ihres Aethers besitzen sollen, können die Versuchsresultate verständlich gemacht werden. Indessen scheint mir, dass denn doch die allgemeinere Hypothese, verschiedene Körper besitzen Aether von verschiedener Dichte und von verschiedener Elasticität, grösseres Vertrauen verdient, als die speciellen Fresnel'schen und Neumann'schen Annahmen.

Apparate.

Den zu diesen Versuchen benutzten Apparat habe ich in nebenstehender Fig. 2 in seinen wesentlichen Theilen dargestellt.[1])

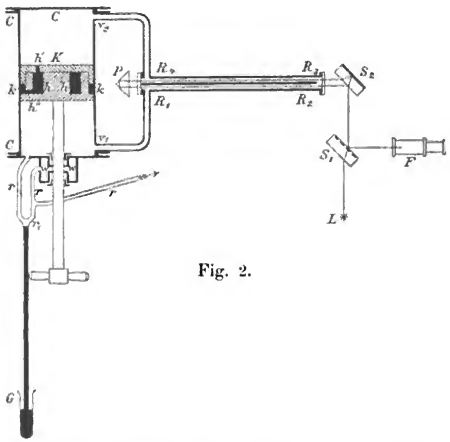


Fig. 2.

CC ist ein starker gusseiserner Cylinder von 33,2 cm Länge, in welchem ein sorgfältig eingepasster und eingeschliffener gusseiserner Kolben K von 10 cm Durchmesser um etwa 20 cm hin- und hergeschoben werden kann. Wird derselbe abwärts geschoben, so drängt er die unter ihm befindliche Flüssigkeit durch die beiden 146 cm langen 0,6 cm weiten Röhren R in der Richtung R_1 R_2 R_3 R_4 hindurch in den über ihm befindlichen

1) Mit dem schon 1890 in Basel von mir construirten Apparat habe ich im Jahre 1893 die hier beschriebenen Versuche in Freiburg i. B. ausgeführt.

Raum, und umgekehrt bei entgegengesetzter Kolbenbewegung. Nun wird aber das ganze System luftdicht verschlossen und durch die Rohrleitung rr auf etwa 1/40 000 Atmosphärendruck ausgepumpt, sodass obenstehenden Betrachtungen zufolge bei der Kolbenbewegung ausser unbedeutenden Luftresten und dergleichen nur Aether durch das Röhrensystem R hindurchgetrieben werden könnte.

Der optische Apparat zur Erzeugung und Beobachtung der Interferenzen ist in der Fig. 2 gleichfalls angedeutet. Das in L erzeugte Natriumlicht trat durch eine unter 45° schräggestellte Glasplatte S_1 auf eine ihr parallele und planparallele Glasplatte S_2, deren Rückfläche versilbert war; durch diese Platte wurde das Licht in zwei Strahlen zerlegt, welche durch die beiden parallelen in passenden Abständen aufgestellten Röhren $R_2 R_1$ und $R_3 R_4$ hindurchtraten. Auf der anderen Seite der Röhre R befand sich ein rechtwinkliges Glasprisma P, welches jeden Strahl zweimal totalreflectirte und jeden durch eine Röhre herkommenden Strahl durch die andere Röhre zurücksandte. Die zurückgeworfenen Strahlen wurden an der planparallelen Platte S_2 in angedeuteter Weise zum Theil wieder vereinigt und gegen die Platte S_1 reflectirt, deren Oberfläche zur Hälfte versilbert war, sodass von dem belegten Theil der Oberfläche ein grosser Theil des Lichtes in das Fernröhrchen F (von etwa fünffacher Vergrösserung) geworfen wurde. Jeder der beiden interferirenden Strahlen durchlief also *beide* Versuchsröhren, jedoch jede derselben in umgekehrter Richtung, sodass die beiden Strahlen durch eine Bewegung des Licht führenden Mediums im Innern der Rohrleitung R in entgegengesetzter Weise beeinflusst werden mussten, wie leicht zu erkennen ist. Ich bemerke, dass wegen der langen dünnen zur Verwendung gekommenen Röhren das Interferenzbild sehr schwach ausgefallen wäre, wenn ich nicht theils alle Licht reflectirenden Flächen so viel als möglich berusst oder sonst geschwärzt, theils eine sehr intensive Lichtquelle — Sodaperle vor der Stichflamme einer Glasbläserlampe — angewandt hätte.

Eisencylinder und Kolben habe ich in einer unter anderem auch für dichten Guss rühmlichst bekannten Maschinenfabrik (Firma Gebrüder Sulzer in Winterthur) giessen lassen; dennoch

war vorauszusehen, dass dieselben nicht *luftdicht* sein konnten. Ich war also genöthigt, zu künstlicher Abdichtung zu greifen, und zwar verwendete ich zu diesem Zwecke ungefähr diejenigen Materialien, aus welchen der gewöhnliche Siegellack bestehen soll, nämlich Schellack, Mastix und Terpentin, in folgender Weise: Zuerst stellte ich zwei Lösungen von Schellack und von Mastix in Alkohol her und mischte dieselben. Hierauf wusch ich die ganze Oberfläche des Cylinders nebst Deckel und Boden, sowie das ganze Röhrensystem, so weit es metallisch war, mit Alkohol, und bestrich sodann alle diese Flächen, ohne sie anzufassen oder sonst mit einem verunreinigenden Fremdkörper in Berührung zu bringen, mit jener Schellak-Mastix-Lösung, welche durch Verdunstung des Alkohols rasch eintrocknet. Endlich rieb ich die Flächen mit dem gleichfalls ziemlich leicht verdunstenden Terpentinöl ein, welches Schellack und Mastix etwas löst und mit diesen Substanzen an der Luft verharzt. Durch dieses Verfahren erzeugte ich eine sehr dickflüssige, zähe siegellackartige Schicht auf allen jenen Flächen. Nachdem diese, übrigens ganz dünn gehaltene Schicht einigermaassen trocken geworden war, machte ich einen neuen Schellack-Mastix-Anstrich und rieb neuerdings Terpentinöl ein wie zuvor. Solcher Anstriche habe ich mehrere ganz gleichartige gemacht, während die Luft aus dem Innern ausgepumpt wurde. Waren für Luft durchlässige feine Poren und Kanäle in den Metallwänden, so verstopften sie sich bei diesem Verfahren mit der auf allen Oberflächen gebildeten zähflüssigen Masse aufs vollständigste. Bald nach diesen Manipulationen war übrigens die äusserste Schicht des Anstriches völlig trocken anzufassen.

Cylinderdeckel und -Boden hatte ich auf den Cylinder gut aufgeschliffen, um dieselben mit Hahnfett abdichten zu können. Besondere Vorsicht erheischte die Austrittsstelle der Kolbenstange aus dem Cylinder; damit dort keinerlei Luft bei der Hin- und Herbewegung des Kolbens in den Cylinder eindringen könne, ordnete ich eine Vorkammer *w* (Fig. 2) an, welche ich längs der Kolbenstange gegen den Cylinder und gegen den Aussenraum durch zwei Stopfbüchsen mit Lederscheiben abdichtete, und welche Vorkammer mit der Luftpumpe durch die Rohrleitung *r* auch dann in Verbindung

stand, wenn der Cylinder selbst (durch Heben der Quecksilbersäule bei r_1) von derselben abgeschlossen war. Drang also bei der Bewegung des Kolbens von aussen her durch die erste Stopfbüchse etwas Luft in die Vorkammer w ein, so wurde sie durch die benutzte sehr rasch arbeitende Kahlbaum'sche Quecksilberluftpumpe, welche mir von Hrn. C. Kramer in Freiburg i. B. für meine Versuche gütigst zur Verfügung gestellt wurde, sofort wieder fortgeschafft. Um indessen mit noch grösserer Sicherheit den Zutritt von Luft ins Innere des Cylinders auszuschliessen, setzte ich die ganze Austrittsstelle der Kolbenstange aus dem Cylinder, sowie die beiden Verschlussstellen von Cylinderdeckel und -Boden unter Quecksilberverschlüsse, indem ich die betreffenden Stellen mit passenden Gehäusen, welche mit Quecksilber gefüllt wurden, umgab (in der Figur nicht angedeutet).

War das verwendete Gusseisen porös, so konnten feine Kanäle durch den Kolben hindurch und vielleicht sogar, trotz völliger Abdichtung nach aussen, in der Längsrichtung durch die Cylinderwandung hindurch, eine Verbindung zwischen den beiden Cylinderabtheilungen herstellen. Um solche Kanäle und Poren zu verstopfen, hatte ich auch die Cylinder*innen*wandungen mit jener Schellack-Mastix-Lösung und nachher mit Terpentinöl zu wiederholten Malen bestrichen und hierauf jedesmal mittels terpentinölgetränkter Lappen die entstandene zähflüssige Masse kräftig in die Wandungen eingerieben. In gleicher Weise hatte ich den Kolben behandelt. Einige Wochen später, nach genügendem Eintrocknen und Verharzen des Anstriches, schabte ich die über den *Gleitflächen* (nämlich auf den cylindrischen Flächen des Cylinderhohlraumes und des in diesen eingeschliffenen Kolbens) gebildeten Schichten ab, sodass dort nur noch die Poren und feinen Kanäle des Gusseisens mit der zähflüssigen Masse ausgefüllt sein konnten.

Den Kolben selber dichtete ich in folgender Weise durch Quecksilber ab: im Kolben war ein Ring k (Fig. 2) und ein mit diesem und mit der über dem Kolben befindlichen Cylinderabtheilung durch Kanäle (k', k'') communicirender Hohlraum k ausgespart, welche beide mit Quecksilber (in der Figur schwarz gezeichnet) ausgefüllt wurden; letzterer Hohlraum war gewissermaassen ein Quecksilberreservoir, welches

das bei der Bewegung des Kolbens aus dem Quecksilberdichtungsringe k möglicherweise abfliessende Quecksilber beständig zu ersetzen hatte. In diesen für das Quecksilber vorgesehenen Räumen h und k konnte Luft durch das Quecksilber gefangen gehalten werden; damit dieser Luft beim Evacuiren das Entweichen nach einer Seite erleichtert werde, behandelte ich nur die eine, nämlich die untere ebene Kolbenfläche nach jenem oben beschriebenen Abdichtungsverfahren.

Um zu untersuchen, ob der in solcher Weise abgedichtete Cylinder mit seinem Röhrensystem vollständig luftdicht sei, pumpte ich denselben auf etwa $^1/_{200}$ mm Quecksilberdruck aus (mit einem Mac Leod'schen Manometer gemessen), liess den Apparat einige Zeit in Verbindung mit dem Phosphorsäureanhydridgefäss der Luftpumpe stehen, bestimmte hernach die Druckzunahme an dem Manometer, pumpte wiederum auf $^1/_{200}$ mm Quecksilberdruck aus, bestimmte nach einiger Zeit die Druckzunahme neuerdings etc. Dann berechnete ich aus der gemessenen Druckzunahme die Zeit t, welche nach diesen verschiedenen Evacuirungen nöthig gewesen war, um eine Druckvermehrung von $^1/_{200}$ mm Quecksilber im Cylinderinnern hervorzubringen. Ich erhielt Zeiträume t, welche in der Beobachtungszeit von 14 Tagen von $t = 12$ bis zu $t = 164$ Min. stetig anstiegen. Aus diesen Zahlen schien mir hervorzugehen, dass die vom Quecksilber im Kolben gefangen gehaltene Luft nach und nach durch die Kolbenwandung diffundirte und dadurch den Druck im Inneren des Cylinders immer wieder ansteigen liess; weil aber dieser Luftvorrath fortwährend abnahm, von aussen keine neue Luft in den Cylinder eintrat, waren nach jeder Evacuirung längere Zeitintervalle t bis zur Druckerhöhung um $^1/_{200}$ mm Quecksilber erforderlich. Ich konnte demnach durch das oben beschriebene Abdichtungsverfahren meinen grossen aus Gusseisen bestehenden Cylinder, wie es scheint, vollkommen luftdicht machen; wenn es nöthig gewesen wäre, hätte ich denselben überdies aussen noch mit Hahnfett eingerieben.

In dem evacuirten Cylinder liess sich der Kolben sehr rasch und mit grösster Leichtigkeit auf- und abschieben, und zwar um so leichter, weil ich zur Ausgleichung des auf der herausragenden Kolbenstange lastenden Luftdruckes den Cy-

linder vertical, die Kolbenstange nach unten gerichtet, angeordnet hatte, sodass Kolbenmasse und Luftdruck entgegengesetzt gerichtete Kräfte auf den Kolben ausübten.

Von zahlreichen Constructionseinzelheiten will ich nur noch die folgenden hervorheben: Der Cylinder war starken Erschütterungen ausgesetzt, weil der Kolben möglichst rasch zu bewegen war; ich befestigte ihn deshalb an einem im Institute isolirt aufgemauerten Pfeiler, das Röhrensystem $R\,R$ (Fig. 2) dagegen mittels eingegipster Eisen direct an den Umfassungsmauern des Instituts. Auf anderen gleichfalls in diese Mauern eingegipsten Eisen ruhten die optischen Theile des Apparats; die letzteren konnten also durch die Erschütterungen des Cylinders nicht wesentlich beeinflusst werden. — Die Versuchsröhren R waren aus Messing hergestellt; Quecksilber durfte aus dem Eisencylinder nicht in jene Röhren hinübergelangen. Aus diesem Grunde stellte ich die beiden Verbindungsröhren des Cylinders mit jenen Versuchsröhren R zuerst aus Glas her und schmolz an jede derselben (bei v_1 v_2 Fig. 2) je eine unten offene Verticalröhre, welche ich in ein weiteres Quecksilbergefäss tauchen liess, so an, dass aus dem Cylinder allfällig eintretendes Quecksilber in diese einen Barometerverschluss bildende Verticalröhre hineinfallen musste. Mittels dieses und eines ähnlichen am Rohrsystem $r\,r$ angebrachten Barometerverschlusses (vgl. die Figur) gelang es überdies, ohne Luft in den Cylinder einzulassen, theils das etwa durchgesickerte Quecksilber, welches den Kolben abdichten sollte, bei G aufzufangen, theils dieses Quecksilber wieder ins Innere und zwar oben auf den Kolben einzuführen, nämlich durch den erwähnten in passender Weise construirten Barometerverschluss bei v_2, wie leicht einzusehen; durch den zu diesem Zwecke angebrachten von oben in den Kolbenhohlraum h führenden Verbindungskanal h' musste das auf dem Kolben befindliche Quecksilber in die inneren leer gewordenen Kolbenhohlräume hineinfallen. Weil aber ein solches befürchtetes Durchsickern von Quecksilber zwischen Kolben und Cylinderwandung hindurch für die Dauer meiner Versuche sich nicht bemerkbar machte, habe ich die betreffenden Röhren in die Figur nicht aufgenommen, um unnöthige Complicationen derselben zu vermeiden.

Die eben erwähnten Glasverbindungsröhren von Cylinder und Rohrsystem *R* ersetzte ich später durch Messingröhren, weil ich es nicht für ausgeschlossen hielt, dass weniger dichte, durchsichtige Körper wie Glas für den Aether leichter durchlässig sein könnten, als undurchsichtige Metalle; aus demselben Grunde hob ich bei den entsprechenden Versuchen das Quecksilbergefäss *G* des in die Figur aufgenommenen Barometerverschlusses so weit, dass das ganze Rohrsystem *r r* bis an den Cylinderdeckel heran mit Quecksilber angefüllt wurde. Trotzdem liess sich auch in diesem Falle, obwohl der Kolben mit einer Maximalgeschwindigkeit von etwa 150 cm in der Secunde bewegt wurde, nicht die geringste Verschiebung der Interferenzstreifen wahrnehmen.

Wurde etwas Luft in den Cylinder eingelassen, bis zu einigen Millimetern Quecksilberdruck, und bewegte man nun den Kolben möglichst rasch, so nahm ich dennoch nicht die leiseste Bewegung der Interferenzstreifen wahr; je mehr aber Luft im Cylinder sich befand, um so weniger schnell liess sich der Kolben bewegen und um so geringer wurde die Wahrscheinlichkeit, etwa von der Luft mitgerissenen Aether in seiner Bewegung mit diesem Apparate nachweisen zu können.

Das zu den bis dahin beschriebenen Versuchen benutzte optische System, bei welchem die beiden interferirenden Strahlen genau dieselben Wege, nur in entgegengesetzten Richtungen, durchlaufen, ist gegen mechanische Störungen wie Erschütterungen, Dichteänderungen der die Röhren erfüllenden Materie etc., absolut unempfindlich, nur empfindlich gegen Bewegung des Licht transportirenden Mediums selber, wenn dieses in der Richtung der die Röhren durchsetzenden interferirenden Strahlen fliesst. Das verwendete von Steinheil gelieferte Prisma *P* (Fig. 2) war überdies so gut rechtwinklig geschliffen, dass nur sehr wenige Interferenzstreifen im Gesichtsfelde erschienen. Aus diesen Gründen war es schwierig zu constatiren, dass die von mir gesehenen wirklich die erwarteten Interferenzstreifen waren. Um in dieser Beziehung keinen Täuschungen ausgesetzt zu sein, habe ich die optischen Theile des Apparats mehrfach anders aufgestellt, sodass ich etwas verschiedene Interferenzbilder erhielt. Noch zweckmässiger erschien es mir aber, einige Versuche *ohne* jenes

Prisma *P* vorzunehmen, unter Zuhülfenahme der einfachen Jamin'schen Anordnung mit zwei dicken planparallelen Platten. Bei dieser allgemein bekannten Anordnung[1]) durchläuft jeder der beiden interferirenden Strahlen nur *eine* Versuchsröhre; das Interferenzbild lässt sich deshalb mit Leichtigkeit controlliren.

Bei diesen Versuchen stellte sich die Fundirung meiner Apparate als so solid heraus, dass die durch Kolbenbewegung nothwendig auftretenden Erschütterungen sogar die bei der Jamin'schen Anordnung erscheinenden Interferenzstreifen in keiner Weise zu beeinträchtigen vermochten. Auch bei dieser Anordnung konnte durch die Kolbenbewegung nicht eine Spur von Streifenverschiebung hervorgebracht werden; liess ich nun aber Luft, wenn auch nur wenig, in den Cylinder eintreten, so erhielt ich sofort bei der Kolbenbewegung eine Streifenverschiebung, weil nämlich der Jamin'sche Interferenzrefractor auf die beim Durchströmen von Luft durch die Versuchsröhren auftretenden Dichteänderungen sehr empfindlich reagirt. Betrug der Druck 2,6 mm Quecksilber, so war die Streifenverschiebung recht deutlich, bei 6 mm Quecksilber sogar sehr stark. Messungen über diese Streifenverschiebungen hätten indessen, weil es sich nur um Dichteänderungen handelte, kaum einen grossen Werth gehabt, weshalb ich dieselben unterliess.

Sind sogar feste Körper, wie aus meinen Versuchen hervorgeht, für den Aether fast vollkommen durchlässig, so ist man unwillkürlich versucht, wiederum die alte Frage vorzubringen, ob denn nicht eine relative Bewegung zwischen Erde und Weltäther vorhanden, ob eine solche an der Erdoberfläche gar nicht nachweisbar sei? Die vielfachen Versuche, welche darüber angestellt wurden und welche alle ein negatives Resultat ergaben, habe ich noch um einen vermehrt. Ich versah nämlich zwei ganz gleiche Messingröhren *M* (Fig. 3) mit Einlauftrichter *T* und seitlichen Abzweigungen *A*, welche in gebogenen Glas-T-Stücken *R* endigten, verschloss jene Röhren *M* auf der Seite der Abzweigungen *A* durch eine Glasplatte *P*,

1) Vgl. Zehnder, Ein neuer Interferenzrefractor, Zeitschrift für Instrumentenk. **11.** p. 275. 1891.

stellte dieselben nebeneinander in freier Luft westöstlich auf und liess die beiden interferirenden Strahlen des Jamin'schen Interferenzrefractors durch dieselben hindurchgehen. Der relativ zur Erde in Bewegung befindliche Aether würde bei meiner Aufstellung zur Mittagszeit diese beiden Röhren im Sinne der Pfeile durchfliessen. Während ich nun die Interferenzstreifen scharf beobachtete, löste ich eine Klemmschraube K, welche einen Gummischlauch g zusammenpresste; infolgedessen trat das Quecksilber des Gefässes G in die betreffende Röhre R ein und schloss dieselbe je nach Bedürfniss mehr oder weniger schnell ab, ohne irgend welche die Interferenzstreifen störende Erschütterung hervorzubringen. Durch solchen Verschluss wurde der Luft der Durchtritt durch die betreffende Röhre M gänzlich, dem Aether wenigstens zum Theil verwehrt.

Derartige Versuche stellte ich zuerst in der Ebene, beim physikalischen Institute, an; nachher trug ich den zu diesem

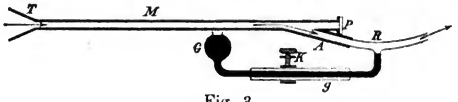


Fig. 3.

Zwecke möglichst leicht gebauten Apparat auf einen nahe an Freiburg liegenden höheren freistehenden Berg, den „Rosskopf", auf welchem sich ein 33 m hoher eiserner, die umgebende Waldung stark überragender Aussichtsthurm befindet. Die Versuche führte ich um die Mittagszeit aus[1]), konnte aber auch bei dieser Anordnung keine Spur einer Streifenbewegung erkennen; und doch hätte ich bei einer wirksamen Röhrenlänge von nahezu 50 cm eine Verschiebung um etwa 80 Streifen sehen müssen, wenn der Aether in der einen abgeschlossenen Röhre relativ zur Erde in Ruhe, in der anderen offenen Röhre mit der Geschwindigkeit der Erde (30 km) in entgegengesetzter Richtung in Bewegung gewesen wäre. Bei diesen Versuchen hätte ich vermuthlich eine Verschiebung um $^1/_{10}$ Streifenbreite noch wahrgenommen. Aus dem Fehlen jeglicher Verschiebung, wenn dasselbe zu jeder Jahreszeit sich ergiebt, könnte man schliessen, dass entweder die relative Bewegung zwischen Erde

1) März 1894.

und Weltäther an der betreffenden Stelle der Erdoberfläche nicht den 800. Theil der Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn beträgt, oder dass ich durch die oben beschriebene Construction das Hindurchblasen des Aethers durch meine Röhrenwandungen hindurch nicht um den 800. Theil zu vermindern vermochte, oder endlich, dass eine Combination dieser beiden Möglichkeiten zu Stande kommt, welche die resultirende Wirkung unter die Grenze der Beobachtungsfehler meiner Versuche hinabdrückt.

Demzufolge können aber diese Versuche keinen Beweis gegen eine gewisse auf der Erdoberfläche vorhandene relative Bewegung der Erde in Bezug auf den Weltäther erbringen; aber auch andere über eine solche Relativbewegung der Erde unternommene Versuche scheinen mir an ähnlichen Zweideutigkeiten der Resultate zu leiden. Jedenfalls ist die ausserordentlich grosse Durchlässigkeit sogar der Metalle für den Weltäther mit der Hypothese des auf der Erdoberfläche ruhenden Aethers schwer vereinbar, wenngleich zu bedenken ist, dass, auf gleiche Durchströmungsquerschnitte reducirt, die in meinen Apparaten von Aether durchströmten *Massen* vielleicht Tausende von Malen geringer sind, als die beim Durchströmen der Atmosphäre durch den Weltäther dem letzteren Widerstand leistende Luftmasse.

Freiburg i. B., Februar 1895.

5. *Zur Dispersionstheorie; von R. Reiff.*

Unter den theoretischen Behandlungen der Dispersion, welche in den letzten Jahren von der electromagnetischen Lichttheorie aus gegeben wurden, ist die v. Helmholtz'sche [1]) durch die Einfachheit der Hypothesen ausgezeichnet, welche ihr zu Grunde liegen. Denn sie führt nur die Annahme ein, dass die Ionen infolge der raschen electrischen Schwingungen selbst in Schwingung versetzt werden, und dass sich dieser Bewegung der Ionen eine reibende Kraft entgegensetzt; dabei ist nach H. v. Helmholtz die wahre Electricität der Ionen fest mit denselben verbunden. Aus diesen Annahmen folgt dann sofort eine Umformung der lebendigen Kraft der Ionen, aus der mir im Folgenden gewisse Schlüsse auf die Eigenschwingungen der Ionen ziehen wollen. Es wird sich dabei ergeben, dass die in seiner Theorie auftretende Constante m eine ganz bestimmte physikalische Bedeutung besitzt, dass man aus ihr eine obere Grenze für die längsten Eigenwellen der Ionen finden kann. Man kann aber auch umgekehrt, wenn die längsten Eigenwellen der Ionen als bekannt angenommen werden aus dieser Grösse m einen Schluss ziehen auf die Grösse des electrischen Elementarquantums, das wir uns mit jeder Valenzstelle eines Molecüls verbunden denken müssen.

Um aber zu diesen Resultaten zu gelangen, müssen wir die Theorie etwas verallgemeinern, sodass nicht bloss *eine* Eigenschwingung des Ions sondern alle in Rechnung gezogen werden. Zunächst möge die Bedeutung der genannten Grösse erörtert werden, dann wird sich die Nothwendigkeit ergeben, die Formeln zu verallgemeinern.

§ 1. Die Bedeutung von m.

H. v. Helmholtz setzt die Componenten des auf die Volumeneinheit bezogenen electrischen Momentes der Ionen

1) v. Helmholtz, Wied. Ann. 48. p. 389. 1893.

$= \xi, \eta, \zeta$ und nimmt, wie gesagt, an, dass die Ladung der Ionen mit diesen selbst fest verbunden sei. Sind also α, β, γ die Geschwindigkeitscomponenten der Ionen, so hat man zu setzen.

$$(1) \qquad \sigma\alpha = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \qquad \sigma\beta = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \qquad \sigma\gamma = \frac{\partial \zeta}{\partial t},$$

wo σ die Dichtigkeit der wahren Electricität der Ionen ist, Dann setzt der die lebendige Kraft der bewegten Ionen

$$(2) \qquad T = \frac{1}{2}\iiint m_1 \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2 d t,$$

wo m_1 ein gewisser Factor ist. Andererseits ist aber diese lebendige Kraft der Ionen

$$T = \tfrac{1}{2} \sum \mu (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

wenn μ die Masse eines Ions bedeutet und die Summe über alle im gegebenen Raume vorhandenen Ionen zu nehmen ist. Die Summe kann man umformen in ein dreifaches Integral. Ist ϱ die Dichtigkeit der Massenvertheilung der Ionen (wenn wir als Zwischenmedium den Aether annehmen, das specifische Gewicht der Substanz), so erhalten wir für die Summe das Integral:

$$T = \tfrac{1}{2} \int\int\int \varrho (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, d t$$

mit Hülfe von (1) also:

$$(3) \qquad T = \frac{1}{2}\iiint \frac{\varrho}{\sigma^2}\left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2\right) d t.$$

Es gehen in diese Formel nur die Quadrate von σ ein; man hat also σ zu setzen gleich der Summe der absoluten Beträge der in der Volumeneinheit enthaltenen Electricitätsmengen, bezeichnen wir also mit e das positiv genommene Elementarquantum der Electricität, mit N die Anzahl der in der Volumeneinheit enthaltenen Valenzstellen, so ist:

$$(4) \qquad \sigma = N e.$$

Vergleicht man die Ausdrücke (2) und (3) miteinander, so folgt:

$$(5) \qquad m_1 = \frac{\varrho}{\sigma^2}.$$

Kennt man also die Anzahl der Valenzstellen im Cubiccentimeter und die Grösse des Elementarquantums e, die

Dichtigkeit ϱ der Massenvertheilung der Ionen, so ist m_1 vollständig bestimmt und nicht erst aus den optischen Eigenschaften des Mediums zu berechnen.

Ehe ich weiter gehe, möge mir hier eine Bemerkung zur v. Helmholtz'schen Abhandlung gestattet sein.

v. Helmholtz setzt die electrische Energie pro Volumenheit gleich:

$$(6) \qquad \frac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}{2\varepsilon} - \frac{\mathfrak{X}\mathfrak{x} + \mathfrak{Y}\mathfrak{y} + \mathfrak{Z}\mathfrak{z}}{\varepsilon} + \frac{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2}{2\vartheta},$$

wo $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ der Componenten der electrischen Polarisation des Zwischenmediums bez. der Molecüle sind. Ist das Zwischenmedium das Aether, so ist $\varepsilon = 1/4\pi$ zu setzen. Dieser Werth der electrischen Energie stimmt aber nicht mit demjenigen überein, der erfahrungsgemäss als der richtige angenommen wird nämlich:

$$(6a) \qquad \frac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}{2\varepsilon} + \frac{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2}{2\vartheta}$$

den auch v. Helmholtz seiner Abhandlung „über die auf das Innere magnetisch oder dielectrisch polarisirter Körper wirkende Kräfte“ [1]) zu Grunde gelegt hat. Der mit Hülfe von (6) abgeleitete Satz von Gleichungen für die Bewegung der Electricität, geht für langsame Schwingungen dann auch nicht über in den von v. Helmholtz in seiner vorhergehenden Abhandlung aufgestellten Satz von Gleichungen. Weiter ergiebt sich für langsame Schwingungen der Brechungscoefficient n_0 nach den v. Helmholtz'chen Gleichungen wenn wir als Zwischenmedium den Aether annehmen, bestimmt durch die Gleichung:

$$n_0^2 = \frac{1 + 12\pi\vartheta}{1 - 4\pi\vartheta},$$

ein Werth, der offenbar im Widerspruch zu der gewöhnlichen Formel steht. Wir werden daher, um im Einklang mit den als richtig erkannten Formeln zu bleiben, statt des Ausdruckes (6) für die electrische Energie den Ausdruck (6a) einführen, und bringen damit die v. Helmholtz'sche Theorie in Uebereinstimmung

1) v. Helmholtz, Ges. Abh. **1.** p. 798. 1882.

stimmung mit der der Hrn. Goldhammer[1]), Ebert[2]) und Drude.[3])

Der Satz der Gleichungen wird dadurch einigermaassen verändert, die wesentlichen Resultate bleiben allerdings dieselben. Auch unsere weiteren Ausführungen werden durch diese Abänderung nicht beeinflusst. Das System von Gleichungen, das wir dann an Stelle der v. Helmholtz'schen erhalten, lautet folgendermaassen, wenn $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ die Componenten des Vectorpotentials, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ die Componenten der magnetischen Polarisation sind.

$$\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} = A\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}, \quad \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} = A\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}, \quad \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} = A\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t}. \tag{7}$$

$$A\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} \text{ etc.} \tag{8}$$

$$A\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{X} + \mathfrak{x}) = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{M}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{N}}{\mu} \text{ etc.} \tag{9}$$

$$\frac{1}{\vartheta}\mathfrak{x} - A\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} + m_1\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2} + \varkappa_1\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} = 0. \tag{10}$$

$$\mathfrak{X} = a^2\mathfrak{x} + m\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2} + \varkappa\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}, \tag{11}$$

wo also:

$$a^2 = \frac{\varepsilon}{\vartheta}, \quad m = \varepsilon m_1, \quad \varkappa = \varepsilon \varkappa_1.\ ^4) \tag{12}$$

Setzt man den Brechungsexponenten des Mediums $= \mathfrak{n}$, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Zwischenmedium $= C_0$, so erhält man in ganz derselben Weise, wie bei v. Helmholtz, für den Brechungsexponenten $\mathfrak{n}$ einer Welle mit der Schwingungszahl $n = 2\pi/\tau$ (τ = Schwingungsdauer) die Gleichung:

$$\left(\mathfrak{n} + \frac{i q C_0}{n}\right)^2 = \frac{a^2 - m n^2 + i \varkappa n + 1}{a^2 - m n^2 + i \varkappa n}, \tag{13}$$

das vom Aether befreite Molecül besitzt nach (11) eine Eigenschwingung, die aus der Gleichung:

1) Goldhammer, Wied. Ann. **47**. p. 93. 1892.
2) Ebert, Wied. Ann. **48**. p. 1. 1893.
3) Drude, Physik des Aethers. 1894.
4) Bei v. Helmholtz ist:

$$a^2 = \frac{\varepsilon + 3\vartheta}{\varepsilon - \vartheta}, \quad m = \frac{\varepsilon}{2} m_1, \quad \varkappa = \frac{\varepsilon}{2}\varkappa_1.$$

$$o = a^2 \xi + m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \varkappa \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

berechnet wird.

Nehmen wir nun einmal ein schwach absorbirendes Medium (also $\varkappa = 0$) an, so wird:

$$n^2 = \frac{a^2 - m n^2 + 1}{a^2 - m n^2}. \tag{14}$$

Soll diese Gleichung den Gang des Brechungsexponenten im sichtbaren Theile des Spectrums darstellen, so muss für Werthe n von der Ordnung 10^{15} $a^2 + 1 > m n^2$ sein. Nun ergiebt sich aber, dass für eine Reihe von Körpern z. B. für Schwefelkohlenstoff $a^2 + 1/m$ von der Ordnung 10^{28} ist, wenn man m aus der Gleichung (5) und (12) mit Hülfe der weiter unten anzugebenden Grössen von e und N berechnet. Danach ist für $n = 10^{15}$ $n^2 < 1$. Das widerspricht aber den Beobachtungen für die durchsichtigen Körper. Somit genügt also Gleichung (14) nicht zur Darstellung der realen Verhältnisse. Es liegt daher nahe, anzunehmen, dass eine Abänderung als Gleichung vorzunehmen ist. Man hat dazu nur den Gedanken zu verfolgen, welche Hr. Ebert[1]) in seiner Verallgemeinerung der Maxwell'schen Theorie entwickelt hat.

§ 2. Verallgemeinerung der Theorie.

v. Helmholtz hat die Geschwindigkeit des Ions gleich der Geschwindigkeit seiner Ladung gesetzt. Es ist nun aus dem Vorhergehenden ersichtlich, dass die Gleichungen:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \alpha \sigma, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \beta \sigma, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \gamma \sigma \tag{1}$$

für so rasche Schwingungen wie die Lichtschwingungen nicht mehr richtig sein können; dass man also für diese die Geschwindigkeit des Ions nicht mehr gleich der Geschwindigkeit seiner Ladung setzen darf. Ist α' die Geschwindigkeit der Ladung des Ions, so ist:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \alpha' \sigma.$$

Wir müssen also eine Beziehung zwischen α und α' einführen, von der wir nur so viel aussagen können, dass für langsame

1) Ebert, Wied. Ann. **48.** p. 1. 1893.

Schwingungen $\alpha = \alpha'$ sein muss. Diese Beziehung muss nothwendigerweise die Schwingungszahl enthalten, es liegt also nahe zu setzen:

$$\alpha = \alpha'(1 - a_1 n^2 + a_2 n^4 - \ldots),$$

die allgemeine Beziehung wäre:

$$a = A_1 \alpha' + A_2 \alpha'^2 + \ldots$$

wo die A_i abhängen von n, wir legen also unsere Betrachtungen selbst wieder eine vereinfachte Annahme zu Grunde.

Dann wird das Quadrat von α:

$$\alpha^2 = \alpha'^2(1 - l_2 n^2 + l_4 n^4 + -).$$

Man hat also an Stelle von m einzuführen:

$$M = m - c_2 r^2 + c_4 n^4 + \ldots\ldots$$

und ebenso wird die Reibungsconstante $\varkappa$ als Function der Schwingungszahlen anzusehen sein, sodass also nun ist:

$$\ddot{\mathfrak{x}} = a^2 \mathfrak{x} + K \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} + M \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2}, \tag{15}$$

wo K und M für $n = 0$, d. h. für langsame Schwingungen in $\varkappa$ und m übergehen. Für die vom Aether befreiten Ionen erhält man die Eigenschwingungen aus der Gleichung:

$$0 = a^2 \mathfrak{x} + K \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} + M \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2},$$

oder wenn man $\mathfrak{x} = B \cdot e^{int}$ setzt.

$$0 = a^2 - m n^2 + c_2 n^4 - c_4 n^6 + \ldots - i(\varkappa n - \varkappa_3 n^3 + \varkappa_5 n^5 \ldots). \tag{16}$$

Diese Gleichung sei vom $p$ten Grade in n. Setzt man $in = z$, so erhält man p-Wurzeln z und diese Wurzeln sind, da die Gleichung in z reelle Coefficienten hat, alle von der Form:

$$z = -g_r \pm i n_r.$$

Die g_r müssen positiv sein, da ja sonst bei der Eigenschwingung die Amplitude der Schwingung über alle Grenzen hinaus mit der Zeit wachsen würde. Wir haben nur eine bestimmte Molecülgattung angenommen, und für diese sind also die Eigenschwingungen durch die Wurzel z definirt. Aus der Gleichung für z folgt, dass m/a^2 gleich der Summe der Producte der reciproken Wurzeln von Gleichung (16) zu je zweien ist.

Führt man diese Summe für alle Wurzeln z aus, so folgt:

$$\frac{m}{a^2} = \sum \frac{1}{n_r^2 + g_r^2} + \sum_r \sum_s \frac{4 g_r g_s}{(n_r^2 + g_r^2)(n_s^2 + g_s^2)}. \tag{17}$$

Die Glieder rechter Hand sind alle positiv. Es ist also:

$$\frac{m}{a^2} > \frac{1}{n_r^2 + g_r^2} \tag{18}$$

für jede Schwingung n_r. Die Untersuchungen von Hrn. E. Wiedemann [1]) führen zu der Annahme, dass die Dämpfungsconstante g_r der Schwingung n_r kleiner ist als die Schwingungszahl. Danach folgt aus (18) a fortiori:

$$\frac{2m}{a^2} > \frac{1}{n_r^2} \tag{19}$$

für alle Schwingungen, also auch für diejenige mit der grössten Wellenlänge. Bezeichnet man nun mit λ_{max} die obere Grenze der Wellenlängen der Eigenschwingungen, so folgt, da $\lambda = (2\pi V/n)$ ist, wo V die Lichtgeschwindigkeit im Aether ist:

$$\lambda_{max} = 2\pi V . \sqrt{\frac{2m}{a^2}}, \tag{20}$$

wo also $m = (\varrho / 4\pi\sigma^2)$ ist, wenn wir als Zwischenmedium den Aether annehmen.

Ist N die Anzahl der Atome Wasserstoff im g H_2, also $1/N$ das Gewicht eines Atoms H, ist p das Moleculargewicht der Substanz, ϱ ihre Dichtigkeit, so ist die Anzahl der Molecüle der Substanz im Cubiccentimeter $= N\varrho/p$. und wenn wir mit v die Anzahl der Valenzstellen der Molecüls bezeichnen, so ist die Anzahl der Valenzstellen im Cubiccentimeter $= v N \varrho/p$, also die Dichte der Electricität

$$\sigma = \frac{v N \varrho e}{p},$$

somit

$$m = \frac{p^2}{4\pi v^2 N^2 e^2 \varrho}.$$

Ist weiter k das Quadrat des Brechungsexponenten für langsame Schwingungen, d. h. für $n = 0$, so wird

$$a^2 = (k - 1)^{-1},$$

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. **37**. p. 177. 1889.

sodass also:

$$\lambda_{max} = \frac{Vp}{v N e} \sqrt{\frac{2\pi . k - 1}{\varrho}} . \quad (21)$$ [1]

Hat man andererseits eine Eigenwellenlänge λ_r der Substanz im Infrarothen gefunden, so folgt wegen (21):

$$e < \frac{Vp}{v N \lambda_r} \sqrt{\frac{2\pi . k - 1}{\varrho}} . \quad (22)$$

Man erhält also so eine obere Grenze für e.

Wir wollen diese theoretischen gefundenen Werthe nun auch zahlenmässig prüfen.

Für Fluorit [2]) und Quarz [3]) liegen Messungen des Brechungsexponenten in sehr weiten Grenzen vor, welche sich durch die Annahme einer Eigenschwingung im Infrarothen und einer solchen im Ultravioletten nach der Ketteler'schen Formel darstellen lassen.

Wir nehmen für das Gewicht des Wasserstoffatoms an die Zahl [4]) $7{,}5 . 10^{-25}$ g. Für e legen wir den Werth zu Grunde, den Hr. Richarz [5]) aus der Electrolyse berechnet hat.

$$e = 12{,}9 . 10^{-11} (m^{3/2} g^{1/2} s^{-1}).$$

Für Fluorit findet Hr. Paschen:

$$k = 6{,}09,$$

darnach ergiebt sich, wenn die Werthe $v = 4$, $p = 78$, $\varrho = 3{,}2$ eingesetzt werden:

$$\lambda_{max} = 201{,}5\,\mu \text{ (Fluorit).}$$

Ebenso erhält man aus den Messungen von Hrn. Rubens für Quarz $\varkappa = 3{,}56$, und darnach, wenn man $v = 8$, $p = 60$, $\varrho = 2{,}6$ setzt,

$$\lambda_{max} = 52{,}5\,\mu \text{ (Quarz).}$$

---

1) Würde man den v. Helmholtz'schen Ausdruck der Energie zu Grunde legen, so ergiebt sich:

$$\lambda_{max} = \frac{Vp}{v N e} \sqrt{\frac{\pi . k - 1}{\varrho}} .$$

2) Paschen, Wied. Ann. **53.** p. 812. 1894.
3) Rubens, Wied. Ann. **53.** p. 267. 1894.
4) Ebert, Wied. Ann. **51.** p. 255. 1894.
5) Richarz, Wied. Ann. **52.** p. 385. 1894.

Die Werthe λ_r im Infraroth, welche zur Darstellung des Quarz der Brechungsexponenten benutzt werden, sind

$$\lambda_r = 35{,}475\ \mu \text{ (Fluorit)}$$
$$\lambda_r = 10{,}4\ \mu \text{ (Quarz).}$$

Diese sind also wirklich kleiner, als die oben gefundenen Maximalwerthe. Benutzt man diese Werthe nach Gleichung (22) zur Berechnung einer oberen Grenze von e, so ergiebt sich

$$e < 73{,}8 \cdot 10^{-11}\ \text{cm}^{3/2}\ \text{g}^{1/2}\ \text{s}^{-1} \text{ (Fluorit)}$$
$$e < 64\ \ \cdot 10^{-11}\ \text{cm}^{3/2}\ \text{g}^{1/2}\ \text{s}^{-1} \text{ (Quarz).}$$

Dass es sich bei Berechnung dieser Werthe wegen der Unsicherheit von N und e nur um ungefähre Werthe handelt, braucht wohl nicht hervorgehoben zu werden.

Wollen wir statt der aus den Brechungsindices abgeleiteten Werthe von k die Dielectriticitätsconstante zu Grunde legen, so können wir auch für andere Substanzen die $\lambda_{\max}$ berechnen. Einige Werthe mögen noch angeführt werden:

Steinsalz	$k = 5{,}85$	$\lambda_{\max} = 475\ \mu$
Schwefelkohlenstoff	$k = 2{,}49$	$\lambda_{\max} = 40\ \mu$
Kohlensäure	$k = 1{,}000\,946$	$\lambda_{\max} = 17\ \mu$
Wasserstoff	$k = 1{,}000\,264$	$\lambda_{\max} = 8\ \mu$

Den beiden Werthen von $\lambda_{\max}$ für Kohlensäure und Wasserstoff sind die Werthe k von Boltzmann zu Grunde gelegt. Hätte man die Werthe von Ayrton und Perry benutzt, so würden sich grössere Werthe von $\lambda_{\max}$ ergeben.

Die wesentlichste Voraussetzung unserer ganzen Rechnung war, dass die Anzahl der Eigenschwingungen eines Molecüls eine endliche ist, d. h. dass die Gleichung $f(z)=0$, welche die Eigenschwingungen bestimmt, eine Gleichung von endlichem Grade ist. Ist dagegen $f(z)$ eine unendliche Reihe, so lässt sich a priori über die obere Grenze der Eigenschwingung nichts aussagen. Um zu einer oberen Grenze zu gelangen, müssen wir annehmen, dass die $f(z)$ im ganzen Gebiete von z nicht bloss convergirt, sondern auch gleichmässig convergirt, d. h. dass man stets eine Grösse q angeben kann, sodass für alle Werthe $(z) < (z_p)$ der Rest der Reihe vom q Gliede ab

kleiner ist, als eine beliebig kleine Grösse ε. Dann stellt also die Function

$$f_1(z) = a^2 + \varkappa z + \ldots c z^q$$

für alle Werthe $(z) < (z_p)$ die Function $f(z)$ mit hinreichender Annäherung dar und alle Wurzeln der Gleichung $f'(z) = 0$, deren absolute Beträge $< (z_p)$ sind, fallen mit den Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ im selben Gebiete zusammen. Man hat also für diesen Fall die Gültigkeit unserer Entwickelungen bewiesen.

Sollten aber Verdichtungsstellen der Wurzeln gefunden werden, d. h. solche, in deren Umgebung unendlich viele Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ existiren, so liesse sich über das Maximum der Wellenlänge nichts mehr aussagen. Ein solcher Fall ist nicht undenkbar, wie sich aus der Untersuchung von Lamb[1]) und J. J. Thomson[2]) über die electrischen Schwingungen einer leitenden Kugel ergiebt.

§ 3. Verallgemeinerung der Theorie für mehrere Molecülgattungen.

Es wird sich nun fragen, ob eine ähnliche Behandlung auch für Gemische aus mehreren Molecülgattungen zulässig ist. Wir können zeigen, dass dies wirklich der Fall ist. Nur müssen wir dabei die Grössen m für jede Molecülgattung besonders definiren.

Es seien wieder $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die electrischen Polarisationscomponenten des Aethers, $\mathfrak{x}_l$, $\mathfrak{y}_l$, $\mathfrak{z}_l$ die Polarisationscomponenten der einzelnen Molecülgattungen, ϑ_l die zugehörigen Dielectricitätsconstante, sodass $1 + 4\pi\vartheta_l$ die Dielectricitätsconstante des Mediums ist, wenn die Molecülgattung l allein vorhanden ist. Dann haben wir also für die electrische Energie das Medium zu setzen:

$$\Phi_e = \int\int\int d\tau \left(\frac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}{2\varepsilon} + \sum_l \frac{\mathfrak{x}_l^2 + \mathfrak{y}_l^2 + \mathfrak{z}_l^2}{2\vartheta_l} \right).$$

Weiter seien α_l, β_l, γ_l die Geschwindigkeiten der Molecüle; die zugehörige Dichtigkeit der wahren Electricität sei σ_l, d. h.

1) Lamb, Phil. Trans. 1893.
2) J. J. Thomson, Rec. Res. i. El. p. 36 ff.

diejenige Dichtigkeit, welche das Medium zeigt, wenn die Moleculargattung (l) allein vorhanden ist. Dann geht in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit die Electricitätsmenge $\Sigma\sigma_l\alpha_l$, $\Sigma\sigma_l\beta_l$, $\Sigma\sigma_l\gamma_l$, wobei zunächst wieder angenommen werden soll, dass die Ladung mit den Molecülen fest verbunden sei und man hat

$$\sigma_l\alpha_l = \frac{\partial \mathfrak{x}_l}{\partial t}. \tag{24}$$

Die lebendige Kraft der bewegten Ionen ist wieder

$$\sum \sum_l \frac{\mu_l}{2}(\alpha_l^2+\beta_l^2+\gamma_l^2),$$

wo die erste Summe über den ganzen Raum, die zweite über die Gesammtzahl der Molecüle genommen ist. Hierfür kann man wieder schreiben

$$\iiint \sum \frac{\varrho_l}{2}(\alpha_l^2+\beta_l^2+\gamma_l^2)\,d\tau,$$

wo ϱ_l die Massendichtigkeit der Molecülvertheilung l bedeutet. Daher wegen (24)

$$\iiint \sum \frac{\varrho_l}{2}(\alpha_l^2+\beta_l^2+\gamma_l^2)\,d\tau = \iiint \sum \frac{\varrho_l}{2\sigma_l^2}\left(\left(\frac{\partial \mathfrak{x}_l}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathfrak{y}_l}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{z}_l}{\partial t}\right)^2\right)d\tau = \iiint \sum \frac{m_l'}{2}\left(\left(\frac{\partial \mathfrak{x}_l}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathfrak{y}_l}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathfrak{z}_l}{\partial t}\right)^2\right)d\tau,$$

wo

$$m_l' = \frac{\varrho_l}{\sigma_l^2}. \tag{25}$$

Ebenso ist die Arbeit der reibenden Kräfte zu setzen

$$= \iiint \Sigma \varkappa_l'\left(\mathfrak{x}_l\frac{\partial \mathfrak{x}_l}{\partial t}+\mathfrak{y}_l\frac{\partial \mathfrak{y}_l}{\partial t}+\mathfrak{z}_l\frac{\partial \mathfrak{z}_l}{\partial t}\right)d\tau,$$

sodass man also in der v. Helmholtz'schen Bezeichnungsweise hat

$$\left\{\begin{aligned} R = &-\frac{1}{2}\iiint \Sigma m_l'\left(\left(\frac{\partial \mathfrak{x}_l}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathfrak{y}_l}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathfrak{z}_l}{\partial t}\right)^2\right)d\tau \\ &+\iiint \Sigma \varkappa_l'\left(\mathfrak{x}_l\frac{\partial \mathfrak{x}_l}{\partial t}+\mathfrak{y}_l\frac{\partial \mathfrak{y}_l}{\partial t}+\mathfrak{z}_l\frac{\partial \mathfrak{z}_l}{\partial t}\right)d\tau. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Weiter wird

$$\Phi_q = \iiint d\tau \left(\mathfrak{U} \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \Sigma \alpha_l \sigma_l \right) + \mathfrak{V} \left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} + \Sigma \beta_l \sigma_l \right) + \mathfrak{W} \left(\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} + \Sigma \gamma_l \sigma_l \right) \right),$$

oder wegen (24)

$$(27) \quad \left\{ \Phi_q = A \iiint d\tau \left\{ \mathfrak{U} \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \sum \frac{\partial \mathfrak{x}_l}{\partial t} \right) + \mathfrak{V} \left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} + \sum \frac{\partial \mathfrak{y}_l}{\partial t} \right) + \mathfrak{W} \left(\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} + \sum \frac{\partial \mathfrak{z}_l}{\partial t} \right) \right\}, \right.$$

während

$$(28) \quad \Phi_m = \iiint \frac{\partial \tau}{2\mu} \left(\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \right)^2 \right)$$

bleibt.

Aus diesen Werthen gibt sich folgender Satz von Gleichungen:

$$(29) \quad \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} = A \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}, \quad \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} = A \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}, \quad \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} = A \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t}$$

$$(30) \quad A \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\mathfrak{V}}{\varepsilon} \text{ etc.}$$

$$(31) \quad A \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{X} + \Sigma \mathfrak{x}_l) = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\mathfrak{M}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mathfrak{N}}{\mu} \text{ etc.}$$

$$(32) \quad \frac{1}{\vartheta_l} \mathfrak{x}_l - A \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} + m_l' \frac{\partial^2 \mathfrak{x}_l}{\partial t^2} + \varkappa_l' \frac{\partial \mathfrak{x}_l}{\partial t} = 0,$$

oder wegen (29) und (32), wenn man setzt:

$$(33) \quad a_l^2 = \frac{\varepsilon}{\vartheta_l}, \quad \varkappa_l = \varkappa_l' . \varepsilon, \quad m_l = m_l' . \varepsilon$$

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{X} &= a_l^2 \mathfrak{x}_l + \varkappa_l \frac{\partial \mathfrak{x}_l}{\partial t} + m_l \frac{\partial^2 \mathfrak{x}_l}{\partial t^2} \\ \mathfrak{Y} &= a_l^2 \mathfrak{y}_l + \varkappa_l \frac{\partial \mathfrak{y}_l}{\partial t} + m_l \frac{\partial^2 \mathfrak{y}_l}{\partial t^2} \\ \mathfrak{Z} &= a_l^2 \mathfrak{z}_l + \varkappa_l \frac{\partial \mathfrak{z}_l}{\partial t} + m_l \frac{\partial^2 \mathfrak{z}_l}{\partial t^2}. \end{aligned} \right.$$

Man erhält also ganz denselben Satz von Gleichungen, wie die Hrn. Goldhammer[1]) und Ebert[2]) und demnach für den

1) Goldhammer, Wied. Ann. **47.** p. 93. 1892.
2) Ebert, Wied. Ann. **48.** p. 1. 1893.

Brechungsexponenten mit derselben Bezeichnungsweise wie oben:

$$\left(n + q\frac{c_0 i}{n}\right)^2 = 1 + \sum \frac{1}{a_l^2 + i\varkappa_l n - m_l n^2}. \tag{35}$$

In dieser Formel haben wieder die m_l eine ganz bestimmte wohl definirte Bedeutung

$$m_l = \frac{1}{4\pi}\frac{\varrho_l}{\sigma_l^2}. \tag{36}$$

Die Gleichungen (34) lassen nun ganz dieselbe Behandlung zu, wie oben die Gleichung (11), und man erhält wieder eine obere Grenze für die Wellenlängen der Eigenschwingungen Molecülgattung.

Wieder unter der Voraussetzung, die allerdings mit den thatsächlichen Verhältnissen in Uebereinstimmung ist, dass die Dämpfungsconstante einer Schwingung kleiner ist, als die Schwingungszahl, erhält man

$$\lambda_{\max}^{(l)} = \frac{V p_l}{v_l N e}\sqrt{\frac{2\pi \cdot k_l - 1}{\varrho_l}},$$

wo

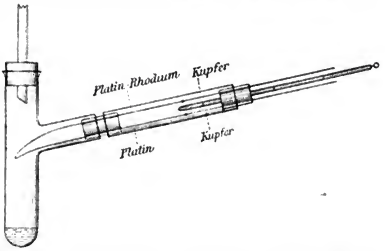
$$\frac{1}{a_l^2} = k_l - 1$$

gesetzt ist.

Heilbronn, 17. Febr. 1895.

6. *Ueber Messung hoher Temperaturen mit dem Thermoelement und den Schmelzpunkt einiger anorganischer Salze; von John McCrae.*

Zur Untersuchung der Schmelzpunkte einiger anorganischer Salze eignet sich sehr ein Thermoelement aus Drähten von Platin und Platinrhodium (10 Proc. Rhodium). Wenn die Contactstelle eines solchen Elementes erwärmt wird, während die andere bei constanter Temperatur bleibt, wird ein electrischer Strom erzeugt, und zwar geht dieser Strom in der Richtung von Platin nach Platinrhodium an der erwärmten Contactstelle. Bei Temperaturen von 300° C. bis 1400° C. ist die electromotorische Kraft dieses Elementes nahezu proportional der Temperatur.[1])



Die Drähte von Platin und Platinrhodium von 10 cm Länge und 0,2 mm Durchmesser waren in der Knallgasflamme aneinandergeschmolzen und mit den anderen Enden an dünne Kupferdrähte von 1 m Länge und 0,36 mm Durchmesser gelöthet. Die Drähte liefen durch zwei Korke an den Enden eines Glasröhrchens von 5 cm Länge und 1,2 cm Durchmesser, sodass die Löthstellen mit den Kupferdrähten vor Temperaturschwankungen geschützt waren. Mit dem einen Kork konnte das Thermoelement in das Seitenrohr eines Dampfbades von bekannter Temperatur eingesetzt werden. Durch den anderen Kork wurde ein Thermometer in das Glasrohr gesteckt, um die Temperatur der Löthstelle zu controlliren (vgl. Figur).

1) Holborn u. Wien, Ztschr. f. Instrumententenk. 1892. p. 257—307; Wied. Ann. **47**. p. 133. 1892.

Der erzeugte Strom wurde mittels eines Quincke'schen Multiplicators[1]) von 1 Ohm Widerstand mit objectiver Spiegelablesung gemessen. Bei der Messung wurde die Zunahme des Widerstandes des erwärmten Elementes als sehr klein vernachlässigt, sowie die Fehler, welche von der galvanischen Kette Platin—Salz—Platinrhodium herrühren.

Mittels eines Pohl'schen Commutators konnte der Strom umgeschaltet werden.

Die Multiplicatorrolle wurde so aufgestellt, dass die Contactstelle der zwei Drähte des Elementes in einer kleinen Alkoholflamme einen Ausschlag von etwa 200 Scalentheilen (200 mm) nach jeder Seite von der Mitte hervorbrachte.

Das Thermoelement wurde geaicht, indem man dasselbe mit einem Korke in dem kurzen Seitenrohr eines Probirröhrchens befestigte, in den Dämpfen von siedendem Schwefel und siedendem Diphenylamin auf eine bekannte Temperatur, 448° und 303,84° erwärmte und die Ablenkung σ_1 und σ_2 der Multiplicatornadel beobachtete.

Das Salz, dessen Schmelzpunkt zu bestimmen war, wurde in einem Platintiegel geschmolzen. Das Thermoelement wurde in das geschmolzene Salz eingetaucht, dann wurde das Ganze abkühlen gelassen. Für einen Augenblick, gerade als das Salz im Tiegel erstarrte, blieb der Lichtstift stehen und dieser Punkt wurde abgelesen. Es sei

t_1 der Siedepunkt des Schwefels $\begin{cases} \text{bei } 755{,}3 \text{ mm } 448^0 \\ \text{„ } 749{,}4 \text{ „ } 447{,}5^0 \\ \text{„ } 743{,}3 \text{ „ } 447^0 \end{cases}$

t_2 der Siedepunkt des Diphenylamins $= 303{,}84^0$,

σ_1 die Ablenkung mit Schwefeldampf,

σ_2 die Ablenkung mit Diphenylamindampf

und σ die Ablenkung mit dem betreffenden Salz; dann ist t der Schmelzpunkt des Salzes durch die Gleichung

$$t = t_1 + \frac{(\sigma - \sigma_1)(t_1 - t_2)}{(\sigma_1 - \sigma_2)}$$

gegeben.

Ergebnisse.

Mit der oben beschriebenen Methode wurden der Siedepunkt t^0 des Zinnchlorürs, die Schmelzpunkte t_1 der folgenden

1) Quincke, Wied. Ann. **48.** p. 25. 1893.

Salze und die Temperatur t_1 einer kleinen Alkoholflamme, der blauen Spitze und des heissesten Theiles einer nicht leuchtenden Bunsenflamme gemessen.

Salz	Chemische Formel	σ	σ_1	σ_2	t^0
1. Zinnchlorür	Cl_2Sn	78,25	56,5	36,5	603,25
2. Jodnatrium	JNa	138	85	54	694,7
3. Jodkalium	JK	144	85	54	722,7
4. Bromkalium	BrK	101,75	58,5	37,5	745,5
5. Bromnatrium	BrNa	104	58,5	37,5	761,1
6. Chlorcalcium	Cl_2Ca	111	59,5	38,5	802,15
		110,5	59	38	801,11
7. Chlorkalium	ClK	110,25	59,5	38,5	803,9
		96,5	52	34	796
8. Chlornatrium	ClNa	163	85	54	811,0
		110	58	37,5	814,5
9. Chlorstrontium	Cl_2Sr	118,5	59,5	38,5	853,75
10. Kohlensaures Natrium[1])	CO_3Na_2				
a) vom Heidelberger chem. Lab.		119	59,5	38,5	856,75
b) von Merck		119,75	59,5	38,5	858,25
c) von Kahlbaum		120,5	59,5	38,5	867,35
11. Schwefelsaures Natrium	SO_4Na_2	123	59,5	38,5	881,25
		110	53,5	34,5	885,2
12. Kohlensaures Kalium	CO_3K_2				
a) vom Heidelberger chem. Lab.		124	59,5	38,5	887,55
b) von Kahlbaum		126	59,5	38,5	897,75
13. Chlorbaryum	Cl_2Ba	128	59,5	38,5	915,6
14. Schwefelsaures Kalium	SO_4K_2	149	59,5	38,5	1058,9
15. Alkoholflamme	—	183	49,5	31	1488
16. Bunsenflamme, blaue Spitze	—	190	49,5	31	1542
17. Bunsenflamme, heissester Th.	—	213,5	49,5	31	1725

Es sei hier noch erwähnt, dass die Salze (besonders die Halogensalze) beim Erhitzen über einer freien Flamme eine chemische Zersetzung erleiden. Dies ist daran zu erkennen, dass man nach einer Erhitzung von 3—4 Minuten beim Erstarren keinen so grossen Ausschlag erhält, als wenn die Salze bloss zum Schmelzen gebracht, dann erstarren gelassen wurden.

Die Schmelzpunkte einiger der oben untersuchten Salze sind auch mit einem Platin—Platiniridium-Thermoelemente bestimmt worden. Die electromotorische Kraft in einem solchen Elemente wächst nicht proportional mit der Temperatur.

1) Barometerstand und Siedepunkt des Schwefels waren bei den verschiedenen Messungen verschieden, bei a) 757,5 mm; bei b) 745,5 mm; bei c) 757,5 mm.

Ergebnisse.

Salz	Chemische Formel	σ	σ_1	σ_2	t^0
1. Jodnatrium	JNa	92,5	59	37	667,5
2. Jodkalium	JK	94	59	37	677,3
3. Bromkalium	BrK	82	53	34	709,2
4. Kohlensaures Natrium	CO_3Na_2				
a) vom Heidelberger chem. Lab.		108,25	54	34,5	850,05
b) von Merck		119,5	59	37,5	853,6
c) von Kahlbaum		121,5	59	37,5	867,1
5. Kohlensaures Kalium	CO_3K_2				
a) vom Heidelberger chem. Lab.		115,5	54	34,5	873,1
b) von Kahlbaum		126	59	37,5	897,3
6. Chlorbaryum	Cl_2Ba	117	52	31	941,1
7. Schwefelsaures Kalium	SO_4K_2	185	66	42,25	1166,1

1 g Salz genügt zur Bestimmung des Schmelzpunktes nach dieser Methode.

Nachstehende Tabelle gibt eine Uebersicht der Werthe von verschiedenen Beobachtern.

Salz	Platin-Platinrhodium-element I.	Pl.-Platin-iridium-element II.	I.—II.	V. Meyer Riddle u. Lamb [1]) III.	I.—III.	Le Chatelier [2]) IV.	Heycock and Neville [3]) V.
1. Zinnchlorür (Siedepunkt)	0 603,25	0	0	0 606,1[4])	0 −2,85	0	0
2. Jodnatrium	694,7	667,5	27,2	661,4	33,3		
3. Jodkalium	722,7	677,3	45,4	684,7	38,0		
4. Bromkalium	745,5	709,2	36,3	722,0	23,5		
5. Bromnatrium	761,1			757,7	3,4		
6. Chlorcalcium	802,15 (801,11)			806,4	−4,25 (−5,3)	755	
7. Chlorkalium	803,9 (796)			800,0	−3,9 (4,0)	740	
8. Chlornatrium	811,0 (814,5)			815,4	−4,4 (−0,9)	775	
9. Chlorstrontium	853,75			832,0	21,75	840	
10. Kohlens. Natr.						810	848
a) v. chem. Lab.	856,75	850,05	6,7	849,2	7,55		
b) von Merck	858,25	853,6	4,65				
c) von Kahlbaum	867,35	867,1	0,25				

1) V. Meyer, Riddle u. Lamb, Ber. d. deutschen chem. Ges. **27.** p. 3129. 1894.

2) Le Chatelier, Bull. Soc. Chem. **47.** p. 300. 1887.

3) Heycock and Neville, Proc. Chem. Soc. **11.** p. 1. 1895.

4) Biltz u. V. Meyer, Ber. d. d. chem. Ges. 1888.

Salz	Platin-Platinrhodium-element I.	Pl.-Platiniridium element II.	I.—II.	V. Meyer Riddle u. Lamb III.	I.—III.	Le Chatelier IV.	Heycock and Neville V.
	°	°	°	°	°	°	°
11. Schwefels. Natr.	881,5 (885,2)			863,2	18,3 (21,0)	867	883
12. Kohlens. Kal.						885	
a) v. chem. Lab.	887,55	873,1	14,45	878,6	8,95		
b) von Kahlbaum	897,75	897,3	0,45				
13. Chlorbaryum	915,6	941,4	− 25,8	921,8	− 6,2	847	
14. Schwefels. Kal.	1058,9	1166,1	−107,2	1078,0	−19,1	1015	1066

Heidelberg, Phys. Laborat. d. Univ., März 1895.

7. *Experimentaluntersuchungen über die Wärmeausdehnung wässeriger Lösungen;* von *Carl Forch.*

(Hierzu Taf. I Fig. 5).

Nachdem durch die Arbeiten von Marek[1]), Thiesen[2]) und Scheel[3]) über die Wärmeausdehnung des Wassers dessen thermisches Verhalten innerhalb der bei physikalisch-chemischen Arbeiten gewöhnlich innegehaltenen Grenzen in besonders genauer Weise bekannt geworden, gewann die Aufgabe, unsere Kenntnisse der Ausdehnung wässeriger Lösungen über den bisherigen engen Bereich hinaus zu erweitern, wieder mehr Interesse. Es ist darum Gegenstand der vorliegenden, auf Veranlassung von Prof. Kohlrausch ausgeführten Arbeit, mehrere der gebräuchlicheren Lösungen hinsichtlich ihrer Wärmeausdehnung zu untersuchen.

Viele der verschiedensten Lösungen sind bereits früher untersucht und zwar durch Gerlach[4]) solche von: NaCl, KCl, LiCl, NH_4Cl; $MgCl_2$, $BaCl_2$, $CaCl_2$, $AlCl_2$; Na_2SO_4, K_2SO_4, $MgSO_4$; Na_2CO_3, K_2CO_3, Weinsäure, Citronensäure und Zucker.

Durch Marignac[5]) solche von: H_2SO_4, $NaHSO_4$, Na_2SO_4, NaCl, HCl, Zucker.

Durch Kremers[6]) solche von: NaCl, KCl, LiCl; $ZnBr_2$.

Durch Kreitling[7]) solche von Alkohol bei 20 Concentrationen.

1) Marek, Trav. et Mem. du Bur. intern. des poids et mésures. 1884.

2) Thiesen, Rapports de la conférance génerale des poids et des mésures. Sept. 1889.

3) K. Scheel, Die Ausdehnung des Wassers. Berliner Dissertation 1890 u. Wied. Ann. **47.** p. 440. 1890.

4) Th. Gerlach, Specifische Gewichte der gebräuchlichsten Salzlösungen. Freiberg 1859.

5) Marignac, Liebig's Ann. Suppl. **8.** p. 370 ff.

6) Kremers, Pogg. Ann. **105.** p. 367 ff.

7) W. Kreitling, Ausdehnung des Wassers, des absoluten Alkoholes und der Mischungen beider. Erlanger Dissert. 1892 (Berlin, Hendebett). — Die Zahlen in Beibl. zu Wied. Ann. **18.** p. 58. 1892.

Die ersten Resultate, welche man Gerlach verdankt, geben die Volumina nur mit vier Decimalen; ausserdem liegen die Temperaturen ungleich und in oft sehr weiten Sprüngen im Intervall von 0^0—100^0 vertheilt; besonders in dem für die meisten Arbeiten so wichtigen Intervalle von 0^0—20^0 sind häufig gar keine Beobachtungen gemacht (20 Proc. KCl, LiCl, NH_4Cl, $MgCl_2$ etc.), sodass die von 5^0 zu 5^0 angegebenen Volumina der Tabellen oft sehr weitgehend interpolirt sind. Ein Bild der Genauigkeit erhält man leicht durch folgende graphische Darstellung: man wähle als Ordinaten die Ausdehnungscoefficienten und als Abscissen die Concentrationen. Dann erhält man für jedes Temperaturintervall eine Curve, für alle Intervalle mithin eine Curvenschaar, und zwar convergirt dieselbe mit steigender Temperatur ziemlich rasch. Die Gerlach'schen Zahlen ergeben so dargestellt meistens ein recht unregelmässiges Bild.

Die Sicherheit der Angaben Kremers' ist eine weit höhere; man sieht dies sofort bei der angeführten graphischen Darstellung, sowie an den zweiten Differenzen. Dasselbe gilt in noch höherem Maasse von den Arbeiten Marignac's und Kreitling's.

Wenngleich nach diesen Bemerkungen betreffend der Angaben Gerlach's eine Wiederholung dieser Untersuchungen vielleicht am Platze gewesen wäre, so wurde doch davon Abstand genommen, und es wurden noch nicht oder in zu wenig Concentrationen untersuchte Salze vorgenommen, da für eine grosse Anzahl von Fällen selbst die von Gerlach erreichte Genauigkeit genügt.

Es wurden untersucht Lösungen von: HNO_3, $LiNO_3$, NH_4NO_3, $NaNO_3$, KNO_3; H_2SO_4, Li_2SO_4, $KHSO_4$, K_2SO_4, $ZnSO_4$, $CuSO_4$; H_3PO_4, KH_2PO_4, K_2HPO_4, K_3PO_4; KBr, KJ; NaOH, KOH; $ZnCl_2$.

Die Concentrationen waren in den meisten Fällen so gewählt, dass die Lösungen sehr nahe $^1/_2$, 1 und 2 Grammäquivalente im Liter enthielten. Dieselben wurden aus der stärksten Lösung durch Verdünnen — mittels Pipette und Messkolben — zu $^1/_2$ bez. $^1/_4$ der Concentration der Ausgangslösung gewonnen. Von H_2SO_4 wurde nur eine einfach normale Lösung untersucht behufs Vergleich mit den Angaben Marignac's.

Als erstrebenswerthe Fehlergrenze der Temperaturbestimmung wurde 0,01°—0,02° angenommen. Dem entspricht bei einem Ausdehnungcoefficienten von 0,00025 bei 18° — ungefährer Werth für Normallösungen — in der Volumenbestimmung ein Fehler von 0,0000025—0,0000050 des Volumens und im Ausdehnungscoefficienten bei Beobachtungen von 5° zu 5° im ungünstigsten Falle Fehler von 2 Proc.

So ist z. B. für $CuSO_4$

für $t = 15°$ das Volumen = 1,001633
$t = 20°$ „ „ = 1,002720

mithin $\alpha = 0{,}0002174$; nimmt man nun bei beiden Volumenbestimmungen entgegengesetzte Fehler von je 0,000005 des Volumens an, so folgt

t 15° $v = 1{,}001628$
t 20° $v = 1{,}002725$

mithin $\alpha = 0{,}0002194$. Wären ausserdem bei den Temperaturen beidesmal entgegengesetzte Fehler von je 0,02° gemacht worden, so würde der Fehler sich verdoppeln und erst dadurch die angegebene Höhe von 2 Proc. erlangen.

Das Verfahren.

Dilatometer. Als Beobachtungsmethode war eine dilatometrische vorgesehen. Den oben aufgestellten Bedingungen genügte ein Dilatometer von folgenden Dimensionen: Das Dilatometergefäss enthielt ca. 38500 mal die Volumeneinheit, die durch das Volumen eines 1 mm langen Stückes von mittlerem Kaliber des Messrohres dargestellt wurde. Das benutzte Thermometer war bei einer Gradlänge von 5 mm in $^1/_5$ Grad getheilt.

Das Dilatometer bestand aus einem 80 mm langen, im Lichten 30 mm weiten, nahezu cylindrischen Glasgefäss von 1 mm Wandstärke. Dasselbe trug am oberen Ende an der einen Seite einen Glashahn, an der anderen die Messcapillare und in der Mitte einen Schliff zum Einsetzen des Thermometers.

Dieser Schliff wurde, nachdem er sorgfältig eingefettet und schlierenfrei eingesetzt war, mit einem von Mendelejeff angegebenen aus Wachs, Colophonium und Eisenoxyd bestehenden Kitte befestigt[1]), gestattete dann aber, selbst 5° über

1) Die Unregelmässigkeiten bei Gerlach glaube ich hauptsächlich auf Rechnung zweier nicht gekitteter Schliffe setzen zu sollen, die sich an dem von ihm benutzten Dilatometer befinden (Taf. I, Fig. A seiner Arbeit).

der höchsten zu berücksichtigenden Temperatur, keinerlei Verschiebung.

Die benutzte Capillare war 470 mm lang, in Millimeter getheilt und hatte auf 1 mm Länge bei 18° im Mittel 1,456 mm³ Volumen. Sie war nach der Neumann-Thiesen'schen Methode[1]) calibrirt; die Fäden wurden stets um 50 mm verschoben und zwar einmal zu abnehmenden und einmal zu steigenden Zahlen, um Temperaturungleichheiten zu eliminiren. Für die zwischen den einzelnen Hauptpunkten 0, 50, 100, ... 400, 450 mm liegenden je 50 mm langen Rohrstücke wurden die Correctionen graphisch interpolirt, ein Verfahren, das in dem regelmässigen Verlauf der Curve seine Berechtigung fand. Es wurden zwei Caliberbestimmungen vorgenommen: zu Anfang und zu Ende der Arbeit. Dieselben ergaben folgende Correctionen ausgedrückt im Volumen der mittleren Längeneinheit des Messrohres:

0	50	100	150	200	250	300	350	400	450
± 0,00	+ 0,70	2,08	2,98	3,21	2,94	1,54	+ 0,37	− 0,19	− 0,01
± 0,00	+ 0,77	2,14	2,98	3,27	2,99	1,62	+ 0,40	− 0,08	± 0,00.

Der Berechnung liegen die Mittelwerthe aus beiden Bestimmungen zu Grunde. Das mittlere Volumen der Längeneinheit betrug für 18° dabei 1,455 bez. 1,457 mm³. Man wird aus dem Gang der Zahlen auf eine geringe Corrosion der Capillaren durch den Gebrauch schliessen dürfen.

Die wegen des Hahnes befürchteten Unregelmässigkeiten traten bei häufigem, sorgfältigen Fetten desselben nicht ein. Abgesehen von einigen Vorversuchen, bei denen diesem Punkte noch nicht die hinreichende Aufmerksamkeit zu Theil wurde, brauchte keine einzige Reihe deshalb ausgeschlossen zu werden. So stand z. B. das Dilatometer mit Lösung H_3PO_4 $m = \frac{1}{2}$ gefüllt vom 24. Februar bis 5. März unter einem Drucke von 140—100 mm der Lösung bei Temperaturen zwischen 20° und 15°. Während dieser Zeit wurden folgende Ablesungen gemacht:

Es ist wenigstens in der Arbeit keinerlei Andeutung bezüglich irgend welcher besonderen Befestigung (Kittung, Anpressen durch elastische Bänder oder dergleichen) enthalten. Kremers' Dilatometer bestand aus einem Stück und hatte zwei Capillaren, ebenso das von Kreitling benutzte.

1) Genauere Angaben über diese Methode finden sich bei: Thiesen, Ueber das Calibriren von Thermometern. Carl's Repert. der Physik. 15. p. 284 ff. 1879.

Febr. 24	$t = 19{,}92$	$v' = 38443{,}93$	$\frac{v_{20}}{v_0}$	$= 1{,}002700$
März 2	20,04	38444,79	$\frac{v_{20}}{v_0}$	$= 1{,}002693$
März 5	20,02	38444,46	$\frac{v_{20}}{v_0}$	$= 1{,}002687.$

Bei höheren Temperaturen wird natürlich das Verhältniss ungünstiger. So ergab sich bei Bestimmung des Wasservolumens bei einer die Temperaturen von 30°, 35° und 40° umfassenden Reihe, je nachdem das am Anfang oder am Ende dieser Reihe bei 30° beobachtete Volumen gleich 1 gesetzt wurde, das Volumen bei 35° zu 1,001472 bez. 1,001480 und bei 40° zu 1,003161 bez. 1,003167.

Berücksichtigt man aber nun, dass zwischen den beiden Beobachtungen bei 30° mindestens die doppelte Zeit liegt, welche die Beobachtungen bei 30° und 40° trennt, da zum Erkalten, wenn nichts an den Wänden der Capillaren hängen bleiben sollte, mindestens die gleiche Zeit nöthig war, wie zum Erwärmen, so reducirt sich der durch den Hahn eingeführte Fehler auf höchstens einige Einheiten der sechsten Stelle in der Volumenbestimmung.

Das Thermometer ward wiederholt mit einem durch die Physikalisch-technische Reichsanstalt beglaubigten Normalthermometer verglichen. Die Angaben beziehen sich mithin auf die Scala des Gasthermometers. Das Gefäss des Thermometers war, bei einem äusseren Durchmesser von 6 mm, 60 mm lang, durchsetzte also fast das ganze Dilatometer.

Magnetischer Rührer. Der in einem Dilatometer sehr langsam vor sich gehende Wärmeaustausch nöthigt zu zeitraubendem Arbeiten. Ausserdem lassen sich besonders bei niederer Temperatur Schichtungen in der völlig ruhigen Flüssigkeit gar nicht vermeiden. Es wurde deshalb die Construction eines im Dilatometer befindlichen Rührers versucht, der sich auch sehr bewährte. Der Grundgedanke dabei war: es sollte eine im Dilatometer befindliche Eisenmasse durch ausserhalb um dasselbe laufende Magnete bewegt werden. Derselbe wurde folgendermaassen verwirklicht:

Aus einem 0,2 mm dicken Platinblech ward ein Rahmen geschnitten; derselbe trug an seinem unteren Ende eine mit Gold angelöthete und ebenso verschlossene Büchse, die mit 25 mm

langen Stücken dünnen geglühten Eisendrahtes gefüllt war. In der Mitte der Büchse war nach unten ein 10 mm langer dicker Platindraht als Träger angelöthet. Die beiden Ringe der horizontalen Querstücke wurden aus der Blechebene um 90° gedreht, sodass der Rührer nun vertical stehend in diesen Ringen um einen passenden verticalen Glasstab als Axe auf dem dicken Draht als Träger leicht laufen konnte. Dieser Rahmen wurde in das Dilatometer eingeführt, ehe dasselbe an seinem unteren Ende geschlossen wurde. An Stelle des oben genannten Glasstabes trat dann als Axe natürlich das Thermometer.

Um das Dilatometer liefen auf verticaler Axe vier horizontal gelagerte halbkreisförmige Stahlmagnete, deren nach innen gebogene etwas zugespitzte Polenden ca. 1,5 mm Spielraum gegen das Dilatometer hatten. Dieselben waren zu je zwei mit ihren gleichnamigen Polen durch diese durchsetzende Schrauben verbunden. Die beiden Paare wurden dann unter Zwischenlegen dünner Messingbleche vermittelst langer Eisenschrauben aufeinander gepresst. Um die Pole wirklich an den nach innen umgebogenen Enden zu haben, wurden die Magnete einzeln durch ein zwischen die Pole eingefügtes Stück weichen Eisens in geschlossene Ringmagnete verwandelt und hierauf ein starker Strom um die halbkreisförmigen Schenkel geschickt. Die Magnete waren auf einem entsprechenden Gestelle montirt. Die Drehung erfolgte mittels einfacher Zahnradübertragung durch die Hand von oben. Bei etwa 60—100 Touren in der Minute folgte der Rührer stets den Magneten.

Die ganze Drehvorrichtung sass fest in einem 15 cm hohen und 20 cm breiten runden Wasserbade, in welches das Dilatometer von oben in einen wiederholt in Schellacklösung getränkten Holzring als Träger eingesetzt wurde. Drei an der Montirung der Magnete befestigte Flügel aus Messingblech sorgten gleichzeitig für ausreichende Wärmevertheilung im Bade. Dasselbe war ringsum, sowie am Boden und Deckel durch Filz gegen Wärmeverluste geschützt.

Correctionen. Ausser den Correctionen für Faden und Caliber, die sowohl an den Thermometer- als auch an den Rohrablesungen anzubringen waren, kam noch eine weitere Instrumentalcorrection nämlich für Compression in Betracht.

Dieselbe setzt sich zusammen aus der durch den Druck der in dem Messrohre stehenden Flüssigkeitssäule bewirkten Compression der Flüssigkeit im Dilatometer sowie der Druckdilatation des Gefässvolumens. Letztere ist nur Function des Druckes; erstere auch solche der qualitativen und quantitativen chemischen Zusammensetzung der Flüssigkeit. Zur Bestimmung des Gesammtdruckcoefficienten wurden bei einer H_2O-Füllung von 14,37° zwei unter sich durch einen Gummischlauch verbundenen Glasröhren auf das Messrohr gesetzt und mit Hg gefüllt. Das dadurch entstehende kleine Manometer gestattete durch Heben und Senken des einen Schenkels Druckdifferenzen zwischen innen und aussen bis zu 80 mm Hg zu geben und gleichzeitig zu messen. Aus einigen Messungen ergab sich im Mittel für 1 mm Hg-Druck eine Depression von 0,0071 mm in der Capillaren.

Berechnet man nach Grassi, um wieviel bei gleicher Temperatur und gleichem Druck das Wasser allein zusammengedrückt würde, so findet man 0,0024 mm. Es kommen mithin $^2/_3$ dieses Druckcoefficienten auf die Dilatation des Gefässes und nur $^1/_3$ auf die nach Salz und Concentration veränderliche, specifische Compression der Lösung. Die Gesammtdruckcorrection kann nun aber für specifisches Gewicht $s = 1$ und 450 mm Druckhöhe nur 0,23 mm und für $s = 1{,}2$ 0,28 mm in dem Messrohre betragen, also etwa 0,000006 des Gesammtvolumens. Davon ist nur 0,000002 je nach der Zusammensetzung der Lösung veränderlich und zwar nimmt dieser Theil mit steigendem specifischem Gewichte für eine und dieselbe Lösung ab, aber höchstens um 10 Proc., und die Schwankung beeinflusst also das Resultat überhaupt kaum. Ich habe dieselbe aber in der Rechnung doch berücksichtigt, indem ich bei grösseren specifischen Gewichten statt der richtigen etwas kleinere einsetzte. Die Correctionen wurden einer Tabelle entnommen, welche die abgelesenen Stände des Messrohres sowie die specifischen Gewichte als Eingänge enthielt.

Caliber- und Fadencorrection des Thermometers wurden gemeinsam angebracht und zwar nach einer Tabelle, in welche die Temperaturen des Dilatometers sowie der Luft unmittelbar neben dem Thermometer eingingen. Die Calibercorrection des Rohres wurde an einer Curve abgelesen; für die Fadencorrection

desselben wurde ein vorläufiger Ausdehnungscoefficient der betreffenden Flüssigkeit abgeleitet.

Das *Volumen des Dilatometers* ergab sich als Mittel aus zwei Auswägungen mit Wasser von 16,4° bez. 16,8° ($d = 0{,}998909$ bez. 0,998843) zu 56,0111 cm^3 bei 0°. Mehrere Auswägungen des Messrohres mit Hg ergaben als mittleres Volumen eines Rohrstückes von 1 mm Länge bei 0° 1,453 mm^3. Mithin erhält das Dilatometer bei 0° 38548,57 oder rund 38549 Einheitsvolumina.

Beobachtung. Nachdem das Dilatometer durch den Hahn mit der längere Zeit vor der Luftpumpe geschüttelten Lösung beschickt war, wurde dasselbe in das mit Eis und Wasser gefüllte Bad bei geöffnetem Hahne eingesetzt. Unter öfterem Rühren verblieb es etwa 20 Minuten darin; hierauf wurde der Hahn geschlossen und nun fortgesetzt innen und aussen ca. 3—5 Minuten gerührt. Alsdann war die Temperatur im Dilatometer selten noch 0,1° über dem Nullpunkte. Hierauf wurden bei stets noch sinkender Temperatur drei Ablesungen gemacht sowie die Faden- und Badtemperatur notirt. Dann wurde das Dilatometer auf einen Augenblick gehoben und in eine schwache Kältemischung gesetzt. Nachdem das Dilatometer in das Bad zurückgebracht war, folgten wieder nahe beim Nullpunkte je drei weitere Ablesungen, nun aber bei steigender Temperatur. Derselbe Gang wurde bei den weiteren acht Temperaturen 5°, 10°, ... 35°, 40° innegehalten, nur ging hier der stärkeren Strömung und dem nicht mehr durch Eisstücke im äusseren Bade gehinderten leichteren Rühren entsprechend der Wärmeaustausch und mithin auch die Beobachtung schneller von statten. Es wurde darauf gesehen, dass das Mittel aus den sechs Temperaturablesungen nahe bei der für Faden und Caliber corrigirten ganzzahligen Temperatur lag, sowie dass während der drei bei wachsender Temperatur gemachten Ablesungen die Temperatur etwa ebenso rasch anstieg, als sie während der drei anderen sank. Doch liess sich dies erst nach längerer Uebung bewerkstelligen. Bei einigen Lösungen, die wegen ihres Verhaltens dem verwendeten Hahnfett gegenüber ein schnelleres Beobachten verlangten, musste davon Abstand genommen werden.

Rechnung. Sei V_0 das Volumen des bis zum Theilstrich 0

gefüllten Dilatometers bei 0°, V_T dasselbe bei der — für Faden und Caliber corrigirten — Temperatur T; als Volumeneinheit gelte der 450ste Theil des in der Capillaren zwischen 0 und 450 mm bei 0° enthaltenen Volumens. Da das Dilatometer bis zum Theilstrich 0 eintaucht, so ist der herausragende Faden gleich der abgelesenen Länge L; seine Temperatur ist t. Die Calibercorrection betrage C, die Druckcorrection $\triangle$; der Volumenausdehnungscoefficient der Flüssigkeit bez. des Glases sei gleich α bez. β, dann wird das Gesammtvolumen der Flüssigkeit für die Temperatur T

$$V_T = (L + C)\{1 + \alpha(T - t)\}\{1 + \beta t\}. + V_0\{1 + \beta T\} + \triangle.$$

Löst man auf und berücksichtigt, dass Glieder mit $\alpha.\beta$ und β^2 unter die Fehlergrenze fallen, so folgt, wenn man das Glied $C\{\alpha(T - t) + \beta t\}$, dessen Werth im nie erreichten ungünstigsten Falle $^1/_{1\,900\,000}$ des Werthes von V_T betragen kann, weglässt:

$$(1) \quad V_T = L + C + L(T - t)\alpha + L\beta t + V_0(1 + \beta T) + \triangle.$$

Um den Ausdehnungsceofficienten β des Glases zu berechnen, geht man zum sogenannten „scheinbaren" Wasservolumen V_{T_s} in dem betreffenden Glase über, indem man in (1) $\beta = 0$ setzt. Dann folgt, wenn α der mittlere Ausdehnungscoefficient des Wassers zwischen T und t ist,

$$(2) \quad V_{T_s} = L + C + L(T - t)\alpha + V_0 + \triangle.$$

Eliminirt man aus (1) und (2), indem man auch für (1) eine Wasserfüllung annimmt, α, so erhält man:

$$\beta = \frac{(V_T - V_{T_s})\frac{1}{V_0}}{\frac{Lt}{V_0} + T}.$$

Das scheinbare Volumen des Wassers wurde mit möglichster Sorgfalt in verschiedenen Beobachtungsreihen bestimmt. Um bei dem Nullpunkte einen völligen Temperaturausgleich garantiren zu können, blieb das Dilatometer noch längere Zeit im Bade stehen, nachdem bereits eine fast feste Einstellung erreicht war. Die Temperatur des Bades wurde zuweilen durch beigefügte Spuren von Kochsalz etwas unterhalb 0° gehalten. Die gewonnenen Zahlen sind in nachstehender Tabelle I vereinigt.

Tabelle I.

Scheinbares Wasservolumen.

t	v					
	I	II	III	IV	V	Mittel
0	1,000000	0000	0000	0000	0000	1,000000
5	0,999739	9736	9741	9738		0,999739
10	0,999862	9864	9860	9865		0,999863
15	1,000317	0321	0317	0320		1,000319
20	1,001070	1072	1074	1074	1070	1,001072
25	1,002091		2090	2086	2087	1,002089
30	1,003353		3345	3346	3354	1,003350
35					4816	1,004816
40					6442	1,006442

Zur Bestimmung des Glasausdehnungtcoefficienten wurden bis 30° die Wasservolumina nach Mittelwerthen von Thiesen, Marek und Scheel[1]) benutzt. Für 35° und 40° habe ich nach der Formel von Scheel gerechnet, wobei also zu beachten ist, dass diese Werthe extrapolirt sind, da Scheel's Beobachtung nur bis 33° reicht. Tabelle II enthält die benutzten Zahlen nebst ihren ersten und zweiten Differenzen.

Die allen Zahlen zu Grunde liegenden Wasservolumina sind mithin folgende:

Tabelle II.

Ausdehnung des Wassers.

t	v_t/v_0		
0	1,000000		
		− 119	
5	0,999881		380
		+ 261	
10	1,000142		338
		599	
15	1,000741		301
		900	
20	1,001641		267
		1167	
25	1,002808		243
		1410	
30	1,004218		232
		1642	
35	1,005860		217
		1859	
40	1,007719		

Hieraus ergeben sich die für die Reduction benutzten Werthe der Glasausdehnung, berechnet nach (3):

Tabelle III.

Ausdehnungscoefficienten des Glases.

0−5	0−10	0−15	0−20	0−25	0−30	0−35	0−40
0,0000284	278	281	284	287	289	293	297

1) Scheel, l. c.

Aus diesen folgen wieder untenstehende Volumina des Dilatometers:

Tabelle IV.

Volumen des Dilatometers.

t	v	t	v
0	38549,00	25	38576,66
5	38554 47	30	38582,42
10	38559,72	35	38588,70
15	38565,25	40	38594,89
20	38570,90		

Da nicht bei sämmtlichen Lösungen die Ausgangslösung genau einfach bez. zweifach normal ist, so sind die specifischen Gewichte und die daraus sich ergebenden Aequivalentgehalte derselben nachstehend aufgeführt. Letztere wurden aus ersteren nach den Tabellen von F. Kohlrausch, Leitfaden der praktischen Physik, VI. Auflage, sowie nach denen von Landolt und Börnstein abgeleitet.[1]) Einige wenige Lösungen, für die keine zusammengehörenden Beobachtungen von specifischen Gewichten und Gehalten vorlagen, wurden direct mit dem Messkolben bereitet. Für $LiNO_3$ war dies nicht möglich, da dieses Salz stark hygroskopisch ist; es wurden deshalb für dasselbe zwei Lösungen von bekanntem Procentgehalt, der eine etwas oberhalb, der andere unterhalb der Concentration 2,5 hergestellt, deren specifisches Gewicht bestimmt und daraus das

1) Bezüglich der $ZnCl_2$-Lösungen sei Folgendes bemerkt: Der bei der Herstellung entstehende feine weisse Niederschlag von basischem Salze wurde abfiltrirt und so die Ausgangslösung $m = 2{,}025$ hergestellt. Bei weiterer Verdünnung auf $^1/_2$ bez. $^1/_4$ dieses Gehaltes trat wiederum dieser Niederschlag auf, welcher gleichfalls entfernt wurde. Derselbe war zu minimal, als dass dadurch eine in Betracht zu ziehende Concentrationsänderung hätte eintreten können. Gleichwohl zeigen die Ausdehnungen graphisch dargestellt eine auffallende Abweichung von den übrigen Salzen. Nimmt man die Ausdehnungscoefficienten zu Ordinaten und die Aequivalentgehalte zu Abscissen, so werden die für jedes Temperaturintervall entstehenden Curven bei allen Lösungen mit Ausnahme von $ZnCl_2$ convex nach oben, für dieses Salz aber sind sie concav nach oben. (Wie weit der bei den Temperaturen oberhalb 20° um $m = 1$ eintretende Wendepunkt der Curven wirklich richtig ist, lässt sich schwer beurtheilen.)

Die Lösungen von KOH, NaOH und K_3PO_4 konnten nicht bei Temperaturen über 30° untersucht werden, da alsdann das Hahnfett angegriffen wurde.

specifischen Gewicht einer zweieinhalbfach normalen Lösung abgeleitet.[1])

Tabelle V.

Ausgangslösungen.

	$d^{18°}/_{4°}$	m		$d^{18°}/_{4°}$	m
HNO_3	1,0693	1,998	KBr	1,1642	2,063
$LiNO_3$	1,0954	2,52	KJ	1,2365	2,005
$NaNO_3$	1,1039	1,958			
KNO_3	1,1090	1,945	H_3PO_4	1,1010	2,0
NH_4NO_3	1,0621	1,964	KH_2PO_4	1,0881	0,985
			K_2HPO_4	1,2633	2,0
$\frac{1}{2}\,H_2SO_4$	1,0307	1,016	K_3PO_4	1,1805	1,0
$\frac{1}{2}\,Li_2SO_4$	1,0866	1,948			
$\frac{1}{2}\,KHSO_4$	1,0887	1,937	$\frac{1}{2}\,ZnCl_2$	1,1138	2,025
$\frac{1}{2}\,K_2SO_4$	1,0654	0,995			
$\frac{1}{2}\,ZnSO_4$	1,1544	1,999	NaOH	1,0633	1,52
$\frac{1}{2}\,CuSO_4$	1,1523	2,07	KOH	1,0890	1,896

Im Nachstehenden sind zuerst, Tab. VI, die Volumina der untersuchten Lösungen bei den direct beobachteten Temperaturen und Concentrationen angegeben; Einheit ist dabei das dem Nullpunkt zunächst liegende Volumen. Hierauf folgen in Tab. VII die Volumina von 5 zu 5 Grad; als Einheit ist das Volumen bei 0° angenommen. Die Concentrationen sind dieselben. Hieran schliesst sich eine Uebersicht — Tab. VIII — der Ausdehnungscoefficienten für die Intervalle 0—5°, 5—10°, ... 35—40° und die Concentrationen von $^1/_2$, 1 und 2 Grammäquivalenten im Liter der Lösung.

Tabelle VI.

Volumina der Lösungen bei den direct beobachteten Temperaturen.

HNO_3

$m = 0{,}500$		$m = 0{,}999$		$m = 1{,}998$	
t	v	t	v	t	v
0,01	1,000000	0,01	1,000000	−0,03	1,000000
4,95	1,000380	4,95	1,000825	4,93	1,001519
9,98	1,001072	10,01	1,001900	9,97	1,003205
14,97	1,002022	15,03	1,003179	15,08	1,005073
19,99	1,003228	19,94	1,004641	19,97	1,006987
25,04	1,004667	24,95	1,006319	24,99	1,009092

1) Es sei bei dieser Gelegenheit auf ein Versehen in der zweiten Auflage der genannten Tabellen von Landolt und Börnstein hingewiesen. Sämmtlichen Lösungen der Arbeit von F. Kohlrausch (Wied. Ann. 6. p. 1 ff. 1879) liegt als Einheit des specifischen Gewichtes das von Wasser bei 4° zu Grunde und nicht wie bei Landolt und Börnstein citirt das von Wasser bei 18° bez. 15°. Vgl. speciell die Bemerkung Wied. Ann. 6. p. 13. 1879.

$m = 0{,}500$

t	v
30,04	1,006293
34,98	1,008092
39,97	1,010094

$m = 0{,}999$

t	v
29,96	1,008152
34,98	1,010166
39,85	1,012316

$m = 1{,}998$

t	v
29,96	1,011295
29,97	1,000000
35,10	1,002375
39,96	1,004762

$LiNO_3$

$m = 0{,}63$

t	v
−0,03	1,000000
4,93	1,000451
9,98	1,001176
14,95	1,002150
19,86	1,003338
24,79	1,004741
30,05	1,006445
35,05	1,008254
40,12	1,010273

$m = 1{,}26$

t	v
0,01	1,000000
4,96	1,000876
9,99	1,001971
15,04	1,003278
20,01	1,004749
24,95	1,006378
29,97	1,008188
34,90	1,010103
40,08	1,012284

$m = 2{,}52$

t	v
0,02	1,000000
4,94	1,001487
9,92	1,003107
15,04	1,004911
19,92	1,006733
24,97	1,008741
30,03	1,010851
29,93	1,000000
35,00	1,002217
40,09	1,004544

$NaNO_3$

$m = 0{,}490$

t	v
0,14	1,000000
5,07	1,000559
10,09	1,001390
15,10	1,002483
20,18	1,003833
25,15	1,005359
30,19	1,007140
35,27	1,009042
40,20	1,011096

$m = 0{,}979$

t	v
0,01	1,000000
5,02	1,001054
10,33	1,002393
14,96	1,003735
20,06	1,005416
24,78	1,007126
30,06	1,009209
35,12	1,011362
39,68	1,013392

$m = 1{,}958$

t	v
0,24	1,000000
5,13	1,001692
10,37	1,003621
15,54	1,005681
20,36	1,007731
20,11	1,000000
25,22	1,002257
30,38	1,004625
35,45	1,007148
40,19	1,009529

KNO_3

$m = 0{,}486$

t	v
0,11	1,000000
5,06	1,000481
10,05	1,001246
15,11	1,002295
19,90	1,003499
24,93	1,004990
30,01	1,006678
35,01	1,008535
40,03	1,010576

$m = 0{,}972$

t	v
0,12	1,000000
5,09	1,000897
10,51	1,002124
15,32	1,003416
20,25	1,004938
24,99	1,006561
30,06	1,008455
35,18	1,010490
39,94	1,012534

NH_4NO_3

$m = 0{,}491$

t	v
0,02	1,000000
4,97	1,000375
10,01	1,001044
15,01	1,001982
20,00	1,003169
24,97	1,004574
29,97	1,006190
34,99	1,007988
39,94	1,009979

$m = 0{,}982$

t	v
0,00	1,000000
5,02	1,000782
9,98	1,001775
15,00	1,003006
19,98	1,004433
24,97	1,006048
30,05	1,007868
34,97	1,009773
40,02	1,011910

$m = 1{,}964$

t	v
0,02	1,000000
5,05	1,001355
10,02	1,002845
14,99	1,004493
20,04	1,006323
24,97	1,008224
30,04	1,010318
29,93	1,000000
34,96	1,002190
39,93	1,004455

$\frac{1}{2}H_2SO_4$

$m = 1{,}016$

t	v
0,02	1,000000
4,93	1,000733
10,04	1,001743
14,86	1,002933
19,97	1,004404
25,06	1,006068
30,10	1,007896
35,13	1,009874
40,12	1,012007

$\frac{1}{2}Li_2SO_4$

$m = 0{,}487$		$m = 0{,}974$		$m = 1{,}948$	
t	v	t	v	t	v
−0,02	1,000000	0,01	1,000000	0,01	1,000000
4,93	1,000231	4,98	1,000491	5,04	1,000824
10,04	1,000770	9,99	1,001222	9,96	1,001783
14,90	1,001561	14,89	1,002153	15,01	1,002941
19,91	1,002595	19,95	1,003319	20,05	1,004246
25,05	1,003900	25,08	1,004706	25,07	1,005694
30,05	1,005381	30,00	1,006204	30,13	1,007304
34,96	1,007034	35,12	1,007949	35,00	1,008952
40,29	1,008990	40,14	1,009812	40,03	1,010810

$\frac{1}{2}KHSO_4$

$m = 0{,}484$		$m = 0{,}968$		$m = 1{,}937$	
t	v	t	v	t	v
−0,02	1,000000	0,03	1,000000	−0,02	1,000000
4,98	1,000416	5,05	1,000849	4,93	1,001472
9,97	1,001143	9,99	1,001929	9,97	1,003123
15,02	1,002153	15,00	1,003242	14,99	1,004924
20,00	1,003399	20,01	1,004778	19,96	1,006872
24,92	1,004847	25,00	1,006486	24,96	1,008956
30,01	1,006556	29,98	1,008364	29,98	1,011165
35,03	1,008436	34,93	1,010400	30,03	1,000000
40,04	1,010491	40,03	1,012641	35,01	1,002307
				39,94	1,004685

$\frac{1}{2}K_2SO_4$

$m = 0{,}498$		$m = 0{,}995$	
t	v	t	v
0,02	1,000000	0,00	1,000000
4,93	1,000381	4,90	1,000718
9,97	1,001055	10,09	1,001711
15,06	1,002006	15,04	1,002862
20,02	1,003166	19,96	1,004203
24,93	1,004530	25,00	1,005751
29,88	1,006083	30,04	1,007466
34,99	1,007904	35,03	1,009325
39,99	1,009851	39,99	1,011320

$\frac{1}{2}ZnSO_4$

$m = 0{,}50$		$m = 1{,}00$		$m = 1{,}999$	
t	v	t	v	t	v
0,03	1,000000	−0,01	1,000000	−0,01	1,000000
4,92	1,000261	4,94	1,000545	4,95	1,000968
10,02	1,000838	9,97	1,001350	9,98	1,002125
15,01	1,001679	15,00	1,002392	14,98	1,003433
19,93	1,002759	19,95	1,003626	19,90	1,004881
25,01	1,004105	25,00	1,005082	25,02	1,006552
30,04	1,005652	30,02	1,006724	30,13	1,008353
35,12	1,007425	35,02	1,008542	35,05	1,010234
40,02	1,009303	40,05	1,010517	40,21	1,012357

$\frac{1}{2}\,CuSO_4$

$m = 0{,}517$		$m = 1{,}035$		$m = 2{,}07$	
t	v	t	v	t	v
0,01	1,000000	0,05	1,000000	0,07	1,000000
5,09	1,000301	5.21	1,000634	5,19	1,001120
10,03	1,000894	10,31	1,001525	10,07	1,002345
15,03	1,001769	14,99	1,002551	15,08	1,003775
19,84	1,002856	19.95	1,003843	20,22	1,005409
25,08	1,004280	24,92	1,005352	25,24	1,007167
29,79	1,005754	30,11	1,007096	30,16	1,009038
34,92	1,007565	35,21	1,009048	34,99	1,010995
39,97	1,009546	40,03	1,011033	39.76	1,013066

KBr

$m = 0{,}516$		$m = 1{,}032$		$m = 2{,}063$	
t	v	t	v	t	v
0,00	1,000000	0,01	1,000000	0,05	1,000000
5,27	1,000373	5,08	1,000732	5,12	1,001252
10,15	1,001018	9,95	1,001646	10,23	1,002656
15,05	1,001910	15,07	1,002836	14,92	1,004106
19,88	1,003030	19,93	1,004162	19,87	1,005750
24,92	1,004414	24,98	1,005712	24,97	1,007580
30,04	1,006023	30,30	1,007541	29,99	1,009458
35,06	1,007808	35,09	1,009345	35,16	1,011592
40,15	1,009811	40,28	1,011464	35,04	1,000000
				40,03	1,002210

KJ

$m = 0{,}501$		$m = 1{,}002$		$m = 2{,}005$	
t	v	t	v	t	v
0,02	1,000000	0,01	1,000000	−0,01	1,000000
5,11	1,000456	5,16	1,000913	5,10	1,001528
10,15	1,001202	10,08	1,001992	9,93	1,003092
14,99	1,002151	15,08	1,003300	15,09	1,004893
19,98	1,003384	19,95	1,004756	20,06	1,006780
25,11	1,004862	24,96	1,006428	25,03	1,008779
30,18	1,006509	30,19	1,008337	30,06	1,010906
35,11	1,008329	35,15	1,010323	30,11	1,000000
40,17	1,010360	40,32	1,012522	35,18	1,002251
				40,06	1,004531

H_3PO_4

$m = 0{,}5$		$m = 1{,}00$		$m = 2{,}00$	
t	v	t	v	t	v
−0,02	1,000000	0,00	1,000000	0,00	1,000000
4,98	1,000236	4,92	1,000483	4,92	1,000922
9,89	1,000765	9,94	1,001252	9,90	1,002055
14,80	1,001562	14,98	1,002283	14,90	1,003387
19,90	1,002676	20,02	1,003547	19,85	1,004888
25,00	1,004032	24,99	1,005000	24,95	1,006603
30,02	1,005581	30,07	1,006684	29,93	1,008452
35,06	1,007361	35,09	1,008539	34,94	1,010449
39,99	1,009269	40,02	1,010528	40,04	1,012643

KH_2PO_4

$m = 0{,}498$		$m = 0{,}996$	
t	v	t	v
0,00	1,000000	0,00	1,000000
5,01	1,000474	4,99	1,000838
10,04	1,001218	10,02	1,001881
15,00	1,002196	15,00	1,003098
19,97	1,003399	19,98	1,004509
24,99	1,004818	25,02	1,006098
29,97	1,006416	30,04	1,007824
35,10	1,008251	35,03	1,009692
40,02	1,010172	40,03	1,011715

K_2HPO_4

$m = 0{,}5$		$m = 1{,}0$		$m = 2{,}0$	
t	v	t	v	t	v
0,02	1,000000	−0,02	1,000000	0,00	1,000000
4,98	1,000759	4,95	1,001243	5,01	1,001695
10,03	1,001750	10,01	1,002645	10,01	1,003438
15,00	1,002924	14,99	1,004154	14,96	1,005236
20,02	1,004290	19,94	1,005790	19,97	1,007133
24,99	1,005836	25,00	1,007589	24,97	1,009082
30,02	1,007564	30,03	1,009485	30,02	1,011127
34,96	1,009412	35,02	1,011467	29,98	1,000000
40,01	1,011454	34,93	1,000000	34,95	1,002053
		39,98	1,002125	40,03	1,004221

K_3PO_4

$m = 0{,}5$		$m = 1{,}0$	
t	v	t	v
0,13	1,000000	−0,01	1,000000
5,11	1,001045	5,02	1,001642
9,99	1,002234	10,04	1,003347
15,04	1,003642	15,02	1,005121
19,94	1,005161	20,00	1,007001
24,93	1,006878	25,02	1,008991
29,94	1,008708	30,06	1,011044

NaOH

$m = 0{,}38$		$m = 0{,}76$		$m = 1{,}52$	
t	v	t	v	t	v
0,12	1,000000	0,10	1,000000	0,13	1,000000
5,06	1,000343	4,90	1,000653	5,20	1,001225
10,12	1,000987	9,87	1,001572	10,13	1,002550
15,21	1,001923	15,20	1,002789	15,38	1,004130
20,11	1,003054	20,13	1,004127	20,00	1,005654
24,88	1,004360	25,11	1,005675	25,22	1,007533
29,97	1,005962	29,80	1,006268	30,01	1,009349

KOH

$m = 0{,}474$		$m = 0{,}948$		$m = 1{,}896$	
t	v	t	v	t	v
0,26	1,000000	0,49	1,000000	0,01	1,000000
5,09	1,000408	5,28	1,000764	5,00	1,001266
10,19	1,001110	11,34	1,002007	9,92	1,002639
14,98	1,002015	14,92	1,002881	15,06	1,004219
20,02	1,003199	20,09	1,004307	19,85	1,005816
24,87	1,004541	24,99	1,005831	25,04	1,007660
30,00	1,006151	30,00	1,007523	30,02	1,009562

$\frac{1}{2}\,ZnCl_2$

$m = 0{,}506$		$m = 1{,}012$		$m = 2{,}025$	
t	v	t	v	t	v
0,00	1,000000	0,00	1,000000	−0,02	1,000000
4,98	1,000222	4,95	1,000593	5,00	1,001379
10,09	1,000771	10,06	1,001483	10,05	1,002988
14,97	1,001576	14,95	1,002607	15,02	1,004762
19,94	1,002652	20,00	1,004022	19,94	1,006783
25,00	1,003996	24,96	1,005632	24,91	1,008902
29,95	1,005526	30,11	1,007532	30,04	1,011292
35,01	1,007304	35,04	1,009565	29,94	1,000000
39,96	1,009266	40,04	1,011809	34,87	1,002438
				40,06	1,005153

Tabelle VII.

Volumina der Lösungen bei den Temperaturen 0°, 5°, 10° . . . 35° und 40°.

	HNO_3			$LiNO_3$		
t	$m = 0{,}50$	$m = 0{,}999$	$m = 1{,}998$	$m = 0{,}63$	$m = 1{,}26$	$m = 2{,}52$
0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
5	1,000386	1,000836	1,001533	1,000458	1,000885	1,001512
10	1,001076	1,001900	1,003207	1,001178	1,001973	1,003140
15	1,002029	1,003173	1,005034	1,002159	1,003265	1,004902
20	1,003231	1,004661	1,006990	1,003372	1,004747	1,006769
25	1,004661	1,006339	1,009088	1,004804	1,006397	1,008759
30	1,006279	1,008169	1,011305	1,006426	1,008201	1,010844
35	1,008100	1,010177	1,013646	1,008233	1,010145	1,013055
40	1,010108	1,012385	1,016123	1,010222	1,012251	1,015364

	$NaNO_3$			KNO_3	
t	$m = 0{,}490$	$m = 0{,}979$	$m = 1{,}958$	$m = 0{,}486$	$m = 0{,}972$
0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
5	1,000560	1,001054	1,001720	1,000482	1,000898
10	1,001383	1,002304	1,003558	1,001245	1,002006
15	1,002470	1,003749	1,005534	1,002276	1,003342
20	1,003792	1,005396	1,007652	1,003534	1,004875
25	1,005321	1,007210	1,009874	1,005012	1,006583
30	1,007046	1,009186	1,012208	1,006682	1,008451
35	1,008945	1,011313	1,014675	1,008539	1,010435
40	1,011020	1,013535	1,017202	1,010572	1,012579

	NH_4NO_3			$\frac{1}{2}H_2SO_4$
t	$m = 0{,}491$	$m = 0{,}982$	$m = 1{,}964$	$m = 1{,}016$
0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
5	1,000380	1,000778	1,001346	1,000748
10	1,001044	1,001780	1,002843	1,001737
15	1,001982	1,003006	1,004501	1,002973
20	1,003170	1,004440	1,006313	1,004416
25	1,004585	1,006058	1,008241	1,006050
30	1,006202	1,007849	1,010306	1,007861
35	1,007994	1,009785	1,012506	1,009824
40	1,010005	1,011901	1,014809	1,011959

	$\frac{1}{2}Li_2SO_4$			$\frac{1}{2}KHSO_4$		
t	$m = 0{,}487$	$m = 0{,}974$	$m = 1{,}948$	$m = 0{,}484$	$m = 0{,}968$	$m = 1{,}937$
0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
5	1,000232	1,000494	1,000818	1,000416	1,000843	1,001488
10	1,000760	1,001234	1,001793	1,001147	1,001936	1,003128
15	1,001576	1,002177	1,002940	1,002148	1,003246	1,004912
20	1,002613	1,003332	1,004233	1,003398	1,004779	1,006883
25	1,003882	1,004684	1,005674	1,004870	1,006490	1,008968
30	1,005360	1,006204	1,007262	1,006550	1,008376	1,011172
35	1,007045	1,007906	1,008953	1,008423	1,010434	1,013506
40	1,008873	1,009756	1,010799	1,010473	1,012632	1,015953

	$\frac{1}{2}K_2SO_4$		$\frac{1}{2}ZnSO_4$		
t	$m = 0{,}498$	$m = 0{,}995$	$m = 0{,}50$	$m = 1{,}00$	$m = 1{,}999$
0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
5	1,000389	1,000735	1,000268	1,000552	1,000977
10	1,001060	1,001692	1,000836	1,001354	1,002129
15	1,001995	1,002852	1,001678	1,002391	1,003437
20	1,003162	1,004214	1,002776	1,003639	1,004911
25	1,004552	1,005751	1,004103	1,005082	1,006544
30	1,006124	1,007452	1,005639	1,006718	1,008304
35	1,007909	1,009314	1,007382	1,008534	1,010214
40	1,009856	1,011325	1,009295	1,010496	1,012269

	$\frac{1}{2}CuSO_4$			KBr		
t	$m = 0{,}517$	$m = 1{,}035$	$m = 2{,}07$	$m = 0{,}516$	$m = 1{,}032$	$m = 2{,}064$
0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
5	1,000293	1,000608	1,000608	1,000346	1,000720	1,001233
10	1,000889	1,001469	1,001469	1,000994	1,001657	1,002601
15	1,001764	1,002558	1,002558	1,001900	1,002819	1,004142
20	1,002896	1,003862	1,003862	1,003060	1,004184	1,005807
25	1,004259	1,005382	1,005382	1,004438	1,005720	1,007602
30	1,005824	1,007060	1,007060	1,006010	1,007434	1,009474
35	1,007595	1,008970	1,008970	1,007786	1,009311	1,011536
40	1,009559	1,011025	1,011025	1,009725	1,011348	1,013767

	KJ			H_3PO_4		
t	$m=0{,}501$	$m=1{,}002$	$m=2{,}005$	$m=0{,}5$	$m=1{,}0$	$m=2.0$
0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
5	1,000444	1,000867	1,001494	1,000238	1,000494	1,000938
10	1,001177	1,001974	1,003112	1,000781	1,001263	1,002079
15	1,002155	1,003278	1,004858	1,001600	1,002288	1,003416
20	1,003391	1,004773	1,006753	1,002700	1,003542	1,004937
25	1,004829	1,006444	1,008764	1,004032	1,005004	1,006620
30	1,006448	1,008265	1,010877	1,005576	1,006660	1,008478
35	1,008287	1,010242	1,013117	1,007337	1,008504	1,010774
40	1,010290	1,012380	1,015476	1,009273	1,010520	1,012625

	KH_2PO_4		K_2HPO_4		
	$m=0{,}498$	$m=0{,}996$	$m=0{,}5$	$m=1{,}0$	$m=2{,}0$
0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
5	1,000472	1,000840	1,000766	1,001252	1,001692
10	1,001211	1,001877	1,001746	1,002638	1,003434
15	1,002196	1,003098	1,002926	1,004153	1,005251
20	1,003407	1,004514	1,004286	1,005806	1,007145
25	1,004821	1,006091	1,005843	1,007584	1,009094
30	1,006427	1,007810	1,007562	1,009466	1,011119
35	1,008213	1,009681	1,009431	1,011455	1,013207
40	1,010164	1,011703	1,011452	1,013585	1,015366

	K_3PO_4		NaOH		
t	$m=0{,}5$	$m=1{,}0$	$m=0{,}38$	$m=0{,}76$	$m=1{,}52$
0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
5	1,001045	1,001632	1,000342	1,000680	1,001203
10	1,002261	1,003330	1,000973	1,001500	1,002542
15	1,003654	1,005111	1,001884	1,002750	1,004040
20	1,005206	1,006998	1,003030	1,004100	1,005683
25	1,006928	1,008970	1,004409	1,005650	1,007481
30	1,008755	1,011012	1,005976	1,006350	1,009374

	KOH			$\frac{1}{2}ZnCl_2$		
t	$m=0{,}474$	$m=0{,}948$	$m=1{,}896$	$m=0{,}506$	$m=1{,}012$	$m=2{,}025$
0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
5	1,000411	1,000786	1,001269	1,000224	1,000600	1,001374
10	1,001092	1,001768	1,002663	1,000759	1,001474	1,002966
15	1,002032	1,002975	1,004202	1,001582	1,002620	1,004749
20	1,003206	1,004354	1,005870	1,002666	1,004022	1,006754
25	1,004592	1,005908	1,007647	1,003996	1,005646	1,008939
30	1,006164	1,007597	1,009556	1,005542	1,007490	1,011283
35				1,007300	1,009548	1,013812
40				1,009283	1,011791	1,016455

Tabelle VIII.

Ausdehnungscoefficienten für die Concentrationen

$m = \frac{1}{2}$, 1 und 2 $\frac{\text{g-Aequ.}}{\text{Liter}}$; $(\alpha . 10^6 = \ldots)$

	HNO_3			$LiNO_3$			$NaNO_3$		
t	$m=\frac{1}{2}$	$m=1$	$m=2$	$m=\frac{1}{2}$	$m=1$	$m=2$	$m=\frac{1}{2}$	$m=1$	$m=2$
0— 5	77	167	307	70	145	261	114	204	349
5—10	138	213	335	127	190	289	169	253	372
10—15	191	255	365	182	235	321	219	291	399
15—20	240	298	391	230	275	347	266	332	427
20—25	286	336	420	276	313	374	307	365	448
25—30	324	366	443	316	346	398	346	397	470
30—35	364	402	468	355	377	426	381	427	495
35—40	402	442	495	392	412	449	416	446	507

	KNO_3		NH_4NO_3			$\frac{1}{2}H_2SO_4$	$\frac{1}{2}Li_2SO_4$	
t	$m=\frac{1}{2}$	$m=1$	$m=\frac{1}{2}$	$m=1$	$m=2$	$m=1$	$m=\frac{1}{2}$	$m=1$	$m=2$
0— 5	99	183	78	158	273	147	48	101	166
5—10	155	223	134	202	301	196	107	150	197
10—15	208	270	189	247	333	245	164	190	231
15—20	253	309	239	288	364	287	208	232	260
20—25	299	343	284	325	388	326	254	271	289
25—30	334	375	324	359	415	361	296	304	318
30—35	372	398	359	388	441	392	337	341	338
35—40	407	430	403	424	462	426	366	370	367

	$\frac{1}{2}KHSO_4$			$\frac{1}{2}K_2SO_4$		$\frac{1}{2}ZnSO_4$		
t	$m=\frac{1}{2}$	$m=1$	$m=2$	$m=\frac{1}{2}$	$m=1$	$m=\frac{1}{2}$	$m=1$	$m=2$
0— 5	86	173	305	78	148	54	110	195
5—10	149	222	335	135	192	114	160	230
10—15	202	266	364	187	232	168	207	262
15—20	252	310	397	234	273	220	250	295
20—25	296	345	421	278	308	265	289	327
25—30	337	380	444	315	341	307	327	352
30—35	376	414	470	357	373	349	363	382
35—40	411	441	492	389	402	383	392	411

	$\frac{1}{2}CuSO_4$			KBr			KJ	
t	$m=\frac{1}{2}$	$m=1$	$m=2$	$m=\frac{1}{2}$	$m=1$	$m=2$	$m=\frac{1}{2}$	$m=1$	$m=2$
0— 5	56	118	212	67	140	241	88	173	298
5—10	117	169	245	128	184	269	146	221	323
10—15	173	215	281	180	230	304	195	260	349
15—20	222	258	314	231	270	330	247	299	378
20—25	271	302	350	274	305	356	287	334	402
25—30	312	334	373	313	341	373	323	364	422
30—35	353	381	403	355	374	410	367	395	447
35—40	392	410	433	387	406	444	400	427	471

	H_3PO_4			KH_2PO_4		K_2HPO_4		
t	$m=\frac{1}{2}$	$m=1$	$m=2$	$m=\frac{1}{2}$	$m=1$	$m=\frac{1}{2}$	$m=1$	$m=2$
0— 5	48	99	188	95	168	153	250	338
5—10	109	154	228	148	208	196	277	349
10—15	164	205	267	197	244	236	303	363
15—20	220	251	304	242	283	272	331	379
20—25	266	292	337	283	316	311	356	390
25—30	309	331	371	321	344	344	376	405
30—35	352	369	399	358	374	374	396	418
35—40	387	403	430	391	404	404	416	432

	K_3PO_4		NaOH			KOH		
t	$m=\frac{1}{2}$	$m=1$	$m=\frac{1}{2}$	$m=1$	$m=2$	$m=\frac{1}{2}$	$m=1$	$m=2$
0— 5	209	326	90	174	286	87	165	260
5—10	243	340	145	215	308	140	202	284
10—15	279	356	197	256	334	191	246	312
15—20	310	377	243	295	357	236	280	338
20—25	344	394	285	327	380	276	314	359
25—30	365	409	323	352	399	316	340	385

	$\frac{1}{2}\,ZnCl_2$		
t	$m=\frac{1}{2}$	$m=1$	$m=2$
0— 5	44	118	271
5—10	106	173	315
10—15	164	228	354
15—20	216	279	398
20—25	265	323	434
25—30	309	367	467
30—35	351	410	504
35—40	396	447	526

Es ist mir nicht gelungen, irgend welche Gesetzmässigkeit zwischen dem thermischen Verhalten und anderen physikalischen Eigenschaften der untersuchten Lösungen aufzustellen. Die von Marignac für H_2SO_4, $NaHSO_4$, Na_2SO_4 gefundene bemerkenswerthe Thatsache, dass das sauere Salz einen grösseren und das neutrale Salz einen kleineren Ausdehnungscoefficienten hat wie die H_2SO_4, fand ich an KH_2SO_4 und K_2SO_4 wieder.

Die zum Vergleich mit ihren drei Kaliumsalzen untersuchte Phosphorsäure zeigte nicht dieses Verhalten. Hier hat die Säure den kleinsten und das neutrale Salz den grössten Ausdehnungscoefficienten, die von KH_2PO_4 und K_2HPO_4 liegen ihrem K-Gehalt entsprechend zwischen jenen.

Strassburg, Physikalisches Institut.

8. *Ueber electrische Resonanz; von V. Bjerknes.*

1. Einleitung.

1. Schon bei seinen ersten Untersuchungen über sehr schnelle electrische Schwingungen wurde Hertz zu der Beobachtung der electrischen Resonanz geführt. Diese Erscheinung gab ihm das Hülfsmittel, wodurch er später die Entdeckung und die qualitative Untersuchung der electrischen Wellen vollführte.

Eine der wichtigsten Aufgaben, welche der jetzigen Generation von Physikern vorliegt, ist die quantitative Durchforschung des grossen Untersuchungsgebietes, welches uns durch Hertz's Genie eröffnet worden ist. Unsere Hülfsmittel zur Lösung dieser Aufgabe scheinen aber noch sehr beschränkt zu sein. Als ein erster vorbereitender Versuch in dieser Richtung dürfte es nahe liegen, ein eingehendes quantitatives Studium der electrischen Resonanz zu versuchen. Sobald wir im Stande sind, den Verlauf dieser Erscheinung vollständig zu verfolgen, dürfen wir hoffen in derselben ein Hülfsmittel ersten Ranges nicht nur für die qualitativen, sondern auch für die quantitativen Untersuchungen zu besitzen.

Ich wurde schon vor mehreren Jahren von meinem hochverehrten verstorbenen Lehrer veranlasst, mich mit dieser Aufgabe, die quantitative Verwerthung der Resonanzerscheinung, zu beschäftigen. Erst jetzt ist es mir aber gelungen die vollständige Lösung dieses Problems durchzuführen, welches ich mir seiner Anregung gemäss gestellt hatte.

2. Der Verlauf der im Resonator auftretenden Electricitätsbewegung muss von einer Reihe von Parametern abhängen. Kennt man die Werthe dieser Parameter, so wird man den electrischen Zustand des Resonators — zum Beispiel den Potentialunterschied seiner Pole, die auf seiner Oberfläche befindlichen Mengen freier Electricität, die Stromintensität in seinem Leitungsdrahte — zu jeder gegebenen Zeit vollständig

berechnen können. Wir stellen uns die Aufgabe, eine experimentelle Methode auszubilden zur Bestimmung dieser für die Beschreibung der Resonatorbewegung nothwendigen Parameter.

Zur Lösuug dieser Aufgabe benutzten wir die Hypothese, dass sowohl der Oscillator als der Resonator, wenn einmal erregt, Eigenschwingungen ausführen können. Als die in erster Linie eingreifenden Parameter dürfen dann, wie man leicht sieht, die folgenden gewählt werden:

1. Die Schwingungsdauer des Oscillators.
2. Die Schwingungsdauer des Resonators.
3. Das logarithmische Decrement des Oscillators.
4. Das logarithmische Decrement des Resonators.
5. Eine Constante, welche die Intensität der Schwingungen misst.

Die Resonanzversuche denken wir uns in der Weise ausführbar, dass man an einem der Leiter die Schwingungsdauer verändern kann, während sie am anderen constant gehalten wird. Den veränderlichen Leiter denken wir uns in Bezug auf die Schwingungsdauer calibrirt, sodass dieselbe immer eine bekannte Grösse ist. Unsere Aufgabe ist, solche Resonanzversuche anzustellen, dass wir aus denselben die Werthe der vier übrigen Parameter, nämlich die Schwingungsdauer des constant gehaltenen Leiters, die logarithmischen Decremente der beiden Leiter und den Intensitätsfactor ableiten können.

3. Die Bestimmung der Schwingungsdauer des constant gehaltenen Leiters ist der Hauptsache nach längst bekannt, indem man nach der Fundamentaleigenschaft der Resonanz annimmt, dass die höchste Resonanz bei Isochronismus eintritt. Dies ist jedoch im allgemeinen nicht streng richtig; man erhält eine Correction, welche sowohl positiv als negativ sein kann, und welche meistens nicht vernachlässigt werden darf.

Das Hauptinteresse knüpft sich jedoch an die Bestimmung der logarithmischen Decremente, welche man bis jetzt fast nie hat bestimmen können. Da die Vorstellungen, welche man sich auf Grundlage beiläufiger theoretischer Betrachtungen und unvollkommener Experimente über diese Grössen gemacht hat, zum Theil sehr unrichtig sind, so führe ich hier sofort das wenige an, was ich einigermaassen sicher über dieselben aus meinen Versuchen habe schliessen können.

Das kleinste logarithmische Decrement, welches ich bei meinen Resonatoren constatirt habe, ist etwa 0,034. Zahlen wie 0,002 [1]) und 0,00015 [2]), sind sicher zehn oder hundertmal zu klein und die combinirten Electrometer- und Funkenmessungen, durch welche sie gefunden worden sind, müssen verworfen werden, bis wir eine genauere Kenntniss der Funkeneigenschaften erworben haben.

Das logarithmische Decrement kann immer in zwei Theile getheilt werden: *das Hertz'sche Ausstrahlungsdecrement* und *das Joule'sche Erwärmungsdecrement.* Für gewöhnliche Formen der Instrumente mit Leitungsdrähten aus gutleitenden unmagnetischen Metallen von 1 mm oder grösserem Durchmesser, ist das Hertz'sche Decrement lange das überwiegende. Verkleinert man aber den Drahtdurchmesser und vergrössert den Widerstand oder die Magnetisirbarkeit desselben, so wird zuletzt das Joule'sche Decrement überwiegend. Beispielsweise haben die von mir in zwei früheren Abhandlungen beschriebenen Resonatoren mit 0,5 mm dicken Dräthen [3]) logarithmische Decremente von 0,034 beim Kupfer, bis 0,27 bei den magnetischen Metallen. Dabei war das Hertz'sche Decrement etwa 0,027, während das Joule'sche Decrement von dem Werth 0,007 beim Kupfer, bis zum Werth 0,24 bei den magnetischen Metallen anstieg.

4. Eine systematische Untersuchung des Hertz'schen Decrementes, um eventuell die experimentell gefundenen Gesetze und Zahlenwerthe dieser Grösse mit denjenigen zu vergleichen, die man aus der Maxwell'schen Theorie ableiten kann, dürfte die wichtigste hier vorliegende Aufgabe sein. Meine Experimentaluntersuchungen gestatten nur ein Gesetz festzustellen, nämlich, dass die möglichst geschlossene Leitform kleinere Decremente (wenigstens bis zu zehn mal), als die offene Leiterform hat, ein Resultat, welches nach bekannten theoretischen Ueberlegungen zu erwarten war.

Eine wichtige Anwendung der Joule'schen Decremente ist die Berechnung der magnetischen Permeabilität des im Leitungsdrahte benutzten Metalles. Beispielsweise habe ich

1) V. Bjerknes, Wied. Ann. **44.** p. 88. 1891.
2) Ebert u. Wiedeman, Wied. Ann. **49.** p. 20. 1893.
3) V. Bjerknes, Wied. Ann. **47.** p. 69. 1892 und **48.** p. 592. 1893.

aus meinen Beobachtungen für käufliches Eisen den Werth 50, für electrolytische Eisen- und Kobaltschichten bez. die Werthe 130 and 110 abgeleitet.

5. Eine Anwendung der Resonanzversuche endlich, welche besondere Beachtung verdient, ist das Studium gewisser Eigenschaften electrischer Funken, welche bis jetzt jeder Untersuchung unzugänglich gewesen sind.

Den Widerstand electrischer Funken kann man aus der Differenz der logarithmischen Decremente eines Oscillators und eines Resonators genau gleicher Form bestimmen. Beispielsweise habe ich für einen wirksamen Funken von 0,7 mm Länge einen Widerstand von etwa 11 Ohm gefunden.

Noch wichtiger wird das Studium einer anderen Funkeneigenschaft sein, welche man als die *Trägheit des Funkens* bezeichnen darf, und welche darin besteht, dass zur Herstellung von Funken gegebener Länge um so höhere Spannungen nöthig sind, je kürzer der Zeitraum ist, während welchen die Spannung besteht. Numerische Resultate kann ich leider nicht geben, wegen Lücken in meinem Beobachtungsmaterial. Die Existenz dieser Eigenschaft ist aber nichtsdestoweniger sicher, denn nur die Funkenträgheit wird erklären können, warum man durch Funkenmessungen, wo man für die secundären Hertz'schen Funken die unter statischen Verhältnissen gefundenen Tabellen über Funkenpotentiale benutzt, logarithmische Decremente findet, die mehr als hundertmal zu klein sein können.

Die hier erwähnten experimentellen Resultate sind alle aus einem alten Beobachtungsmaterial gewonnen, welches aus Versuchen hervorgegangen ist, die lange vor der Ausarbeitung der unten mitzutheilenden Theorie gemacht sind. Sie müssen deshalb als sehr unvollkommen und nur der Grössenordnung nach richtig angesehen werden. Mit Hülfe der Theorie, sowie sie jetzt vorliegt, wird man leicht die Versuche so anstellen können, dass man einerseits viel genauere Resultate gewinnt und andererseits, dass man systematisch die oben mehr zufällig berührten Fragen untersucht. [1])

1) Man wird diese Versuche und die quantitative Bearbeitung derselben im „Bihang till K. svenska Vetenskapsakademiens Handlingar" 1895 finden.

II. Ausgangspunkt der Theorie.

6. Die Electricitätsbewegung im Resonator wollen wir durch den Parameter φ beschreiben, welcher den Potentialunterschied der zwei Pole des Resonators bedeuten soll. Unsere erste Aufgabe ist die Bestimmung dieses Parameters als Function der Zeit, und um diese Aufgabe lösen zu können, wählen wir als Ausgangspunkt die folgende Arbeitshypothese:

Der Parameter φ soll, als Function der Zeit betrachtet, der allgemeinen lineären Differentialgleichung zweiter Ordnung mit constanten Coefficienten genügen:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\beta\frac{d\varphi}{dt} + (b^2 + \beta^2)\varphi = F(t), \tag{1}$$

wo weiter die Function F die specielle Form haben soll:

$$F(t) = \mathfrak{A}\, e^{-\alpha t}\sin(a\,t + \mathfrak{a}) \tag{1a}$$

und wo die Anfangsbedingungen die folgenden sind:

$$t = 0, \quad \varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0. \tag{1b}$$

Von diesen Annahmen enthält die letzte (1 b) nichts hypothetisches; sie besagt nur, dass der Anfangszustand ein Zustand des Gleichgewichts sein soll. (1) und (1 a) enthalten dagegen hypothetische Voraussetzungen, die wir nach einander näher betrachten wollen.

7. Wäre $F(t) = 0$, so würde die Gleichung (1) mit den Anfangsbedingungen (1 b) nur das identische Integral $\varphi = 0$ geben: das Gleichgewicht würde nie gestört werden. Die Störung des Gleichgewichtes rührt also ausschliesslich von $F(t)$ her, und $F(t)$ repräsentirt also die Kraft, womit die Oscillatorwellen das Gleichgewicht des Resonators stören.

(1 a) repräsentirt die Vorstellung, welche sich von Hertz an die meisten Physiker über diese Kraft gemacht haben, und welche auf der Hypothese beruht, dass im Oscillator wirkliche Schwingungen vorliegen. Was man ganz allgemein für diese Hypothese anführen kann, ist einerseits, dass sie qualitativ die Erklärung sämmtlicher Hertz'scher Versuche gestattet, andererseits, dass sie als eine theoretische Nothwendigkeit hervortritt als Consequenz der Thomson'schen Theorie der

electrischen Schwingungen, vorausgesetzt, dass der primäre Funke eine genügende Leitungsfähigkeit hat.

Doch ist es sowohl möglich als wahrscheinlich, dass (1a) nicht eine vollständige Beschreibung des Vorganges im Oscillator gibt. Die Theorie lässt z. B. die Möglichkeit von Obertönen voraussehen, welche wir nach (1a) ausgeschlossen haben. Dies hat jedoch weniger Bedeutung, weil man die Intensität derselben bei den Versuchen beliebig viel verringern kann. Die Intensität der möglichen Obertöne muss nämlich um so geringer werden, je mehr sich der Oscillator der Form von zwei durch eine lineäre Leitung verbundenen Capacitäten nähert.

Schwerer zu beurtheilen ist aber der Einfluss des Inductoriums und der Funkenstrecke. Im allgemeinen muss nämlich der Inductionsstrom noch andauern, nachdem die Oscillatorschwingungen erregt sind, sodass man eine Superposition von zwei Bewegungen erhält. Die mit null anfangende, zu einem Maximum steigende und wieder zu null herabsinkende Leitungsfähigkeit der Funkenstrecke muss auch nothwendig eine mehr oder weniger bedeutende Modification des Schwingungsgesetzes (1a) zur Folge haben.

Unsere Hypothese ist also nur, dass (1a) den hauptsächlichen Theil der Electricitätsbewegung im Oscillator repräsentiren soll.

8. Die Hypothese (1) besagt endlich, dass die Resonatorbewegung, wenn man die störende äussere Kraft gleich null setzt, nach der Differentialgleichung des gedämpften Pendels verlaufen soll. Die Berechtigung dieser Annahme ist theils in der Analogie der electrischen und der mechanischen Resonanzerscheinungen zu suchen; theils in der Thomson'schen Theorie der electrischen Schwingungen, welche unmittelbar auf diese Gleichung führt, nur dass wir unterlassen die in dieser Theorie vorkommenden Ausdrücke der Coefficienten als Functionen von Selbstinduction, Capacität und Widerstand zu benutzen, weil diese Ausdrücke nicht als allgemein gültig angenommen werden dürfen. Allerdings ist ein strenger Beweis auf Grundlage der Maxwell'schen Electrodynamik ebensowenig für die Richtigkeit dieser Hypothese als für die der Hypothese (1a) geführt worden.

Zur Verhinderung der Bildung von Obertönen, deren Vorkommen durch die Gleichung (1) ausgeschlossen ist, wird es vortheilhaft, wenn auch vielleicht nicht nothwendig sein, im Resonator gleichfalls relativ dünnen Leitungsdraht und grosse Capacitäten an den Enden anzuwenden.

Endlich setzt die Gleichung (1) nothwendig eine gewisse Grösse des Abstandes zwischen Oscillator und Resonator voraus; die electrischen Wellen müssen sich nämlich ins unendliche zwischen den beiden Leitern hin und her reflectiren. Ist der Abstand der Leiter gross, so wird die Intensität des mehrere Mal reflectirten Wellenzuges klein werden, sodass man in erster Annäherung einfach einen einzigen Wellenzug zu beachten braucht, welcher nur einmal vorübergeht, so wie wir es in Gleichung (1) vorausgesetzt haben.

Durch die Wahl eines grossen Abstandes wird man auch die Sicherheit gewinnen, dass die Schwingungsdauer- und Dämpfungsconstanten, welche man durch die Resonanzversuche findet, den zwei einzelnen Leitern an sich angehören, und nicht der Gesammtanordnung der beiden Leiter.

Wie gross man den gegenseitigen Abstand der zwei Instrumente zur Erfüllung dieser Bedingungen wählen muss, kann erst eine eingehendere theoretische Untersuchung entscheiden. Die Thomson'sche Theorie lehrt, dass die Bedingung für die Unabhängigkeit der Constanten erfüllt ist, sobald das Quadrat des gegenseitigen Inductionscoefficienten gegen das Product der zwei Selbstinductionscoefficienten verschwindet, welches meistens schon bei sehr kleinem gegenseitigem Abstand der zwei Instrumente erfüllt ist. Um aber den Einfluss der wiederholten Reflexionen genügend zu verkleinern, muss man den Abstand über die so gefundene Grenze hinaus vergrössern, wahrscheinlich wird es indess genügen den kleinsten Abstand der Instrumente grösser als die lineären Dimensionen derselben zu wählen.

III. Die Bedeutung und die Bezeichnung der Parameter.

9. Die fünf in der Einleitung erwähnten Parameter kommen alle in der Differentialgleichung (1) vor, jedoch nur einer derselben explicite, nämlich der Intensitätsfactor $\mathfrak{A}$.

Die Schwingungsdauern und die logarithmischen Decre-

mente, sind, zur Vereinfachung der Schreibweise, vorläufig durch die Parameter a, b, α, β ersetzt, deren Bedeutung theils aus dem Ausdruck (1a), theils aus dem unten aufgestellten Ausdruck des Integrales (3) hervorgeht:

a und b sind die mit dem Factor 2π multiplicirten Schwingungszahlen bez. des Oscillators und des Resonators. Diese Parameter wollen wir abgekürzt als die „cyklischen" Schwingungszahlen bezeichnen.

α und β werden wir die Dämpfungsexponenten bez. des Oscillators und des Resonators nennen. Wenn man eine dieser Grössen mit der entsprechenden Schwingungsdauer multiplicirt, erhält man das logarithmische Decrement.

Später werden wir Schwingungsdauern und logarithmische Decremente einführen. Zur Bezeichnung der Schwingungsdauer, welche wir in einer graphischen Darstellung der Resonanzerscheinung als Abscissen benutzen werden, wählen wir den Buchstaben x, für die logarithmischen Decremente entweder γ oder δ. Zwischen primärem und secundärem Leiter werden wir durch die Indices 1 und 2 unterscheiden. Diese Parameter sind dann durch die folgenden Gleichungen mit den vorigen verbunden

$$(2a) \qquad a = \frac{2\pi}{x_1}, \quad b = \frac{2\pi}{x_2}, \quad \alpha = \frac{\gamma_1}{x_1}, \quad \beta = \frac{\gamma_2}{x_2}.$$

Schliesslich dürfen wir in den definitiven Formeln die Unterscheidung zwischen primärem und secundärem Leiter fallen lassen, um nur zwischen dem constanten und dem veränderlichen Leiter zu unterscheiden. Schwingungsdauer und logarithmisches Decrement des veränderlichen Leiters werden wir dann durch x und γ, des constanten Leiters durch X und δ bezeichnen.

Mit dieser Bezeichnung der Parameter lässt sich die Aufgabe, welche wir uns gestellt haben, folgendermaassen genauer definiren: In den anzustellenden Resonanzversuchen ist das veränderliche x immer eine bekannte Grösse: aus den Resonanzversuchen wollen wir die Werthe der vier Parameter

$$X, \ \delta, \ \gamma, \ \mathfrak{A}$$

ableiten.

10. Ueber die Werthe der Parameter γ und δ werden wir eine beschränkende Hypothese machen, welche wir folgendermaassen aussprechen:

Der Mittelwerth ω der logarithmischen Decremente γ und δ soll gegen 2π so klein sein, dass man ω^2 neben $(2\pi)^2$ vernachlässigen darf.

Ebenso wollen wir das veränderliche x einer Beschränkung unterwerfen:

Die Differenz $x - X$ soll neben X so klein sein, dass man $(x - X)^2$ neben $(2X)^2$ vernachlässigen darf.

Diese letzte Annahme besagt einfach, dass wir aus den Beobachtungsmaterial nur solche Beobachtungen benutzen wollen, die bei angenähertem Isochronismus gemacht sind. Offenbar wird dadurch die Allgemeinheit unserer Theorie nicht beschränkt. Eine wesentliche Beschränkung scheint dagegen beim ersten Anblick die erste dieser beiden Voraussetzungen zu enthalten, denn für beliebig grosse logarithmische Decremente wird dann unsere Theorie nicht gelten. Wir werden aber nachträglich zeigen, dass auch diese Beschränkung eine unwesentliche ist, indem sie besagt, dass wir nur von solchen Schwingungen absehen, welche so stark gedämpft sind, dass sie keine deutliche Resonanzerscheinung erzeugen können.

11. Im Laufe der Rechnung wird es sich vortheilhaft zeigen, die cyklischen Schwingungszahlen a und b und die Dämpfungsexponenten α und β durch die Mittelwerthe und die halben Differenzen zu ersetzen,

$$(2\,\mathrm{b}) \quad m = \frac{a+b}{2}, \quad n = \frac{a-b}{2}, \quad \mu = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \nu = \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Ueber die relativen Grössen dieser Parameter schliesst man leicht folgendes, welches eine unmittelbare Consequenz von den oben gemachten Voraussetzungen über x und ω ist.

n, μ und ν sind neben m so klein, dass man die Quadrate derselben neben dem Quadrat von m vernachlässigen darf.

12. Ausser den fünf Hauptparametern kommt in der Differentialgleichung noch ein sechster vor, nämlich α, welcher die Phase angiebt, worin zur Zeit $t = 0$ die Oscillatorschwingungen ihre Wirkung im Resonator geltend machen. Man sieht leicht ein, dass diese Grösse meistens nur wenig

in den Verlauf der Erscheinung eingreifen wird. Die Rechnungen vereinfachen sich etwas, wenn man für α entweder den Werth 0 oder $\pi/2$ wählt; der Allgemeinheit halber lassen wir indes α unbestimmt. Es wird sich dabei zeigen, dass es nur in Correctionsglieder eingeht, und eine Bestimmung desselben wollen wir deshalb nicht versuchen.

IV. Der Verlauf der Resonatorschwingungen.

13. Unsere erste Aufgabe ist nach den Bedingungen (1), (1a), (1b), φ als Function der Zeit darzustellen. Nach den gewöhnlichen Regeln für die Integration lineärer Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten, kann das Integral φ der Gleichung (1) als eine Summe von zwei Ausdrücken φ_a und φ_b dargestellt werden:

$$\varphi = \varphi_a + \varphi_b, \tag{3}$$

wobei φ_a ein beliebiger Ausdruck ist, welcher die Gleichung (1) erfüllt, während φ_b in dem Specialfalle $F = 0$ die Bedingung erfüllen muss, das allgemeine Integral der Gleichung (1) zu sein. Für φ_a und φ_b findet man leicht die Ausdrücke:

$$\varphi_a = e^{-\alpha t}(A_1 \sin a\,t + A_2 \cos a\,t) \tag{3a}$$

$$\varphi_b = e^{-\beta t}(B_1 \sin b\,t + B_2 \cos b\,t) \tag{3b}$$

Diesem mathematischen Resultat kann man eine einfache und nützliche physikalische Deutung geben: Die Electricitätsbewegung im Resonator kann als eine Superposition von zwei Partialbewegungen betrachtet werden:

a) Die „erzwungene" Schwingung, (3a) deren Schwingungszahl und Dämpfungsexponente diejenige des Oscillators ist.

b) Die freien Eigenschwingungen (3b), deren Schwingungszahl und Dämpfungsexponente dem Resonator eigenthümliche Constanten sind.

Den Werth der Constanten A_1 und A_2 findet man direct durch Substitution von φ in die Differentialgleichung. Nachher findet man B_1 und B_2 mit Hülfe der Anfangsbedingungen (1b).

14. Von der Form (3) des Integrals können wir zu einer anderen übergehen, welche für die Lösung unserer Aufgabe bequemer ist. Wenn wir nämlich nach (2b) die Parameter

m, n, μ, ν einführen und die Sinus und Cosinus der Summenausdrücke entwickeln, so können wir φ in die Form

$$\varphi = M \sin(m t + m') \tag{4}$$

bringen. (4) stellt also die Resonatorbewegung als eine einzige Schwingung dar, deren Schwingungsdauer der Mittelwerth ist von den Schwingungsdauern des Oscillators und des Resonators. In dieser Schwingung sind aber sowohl die Amplitude M als die Epoche m' Functionen der Zeit. Der Vortheil der Form (4) besteht darin, dass wir von dem Sinusfactor und der in demselben enthaltenen Grösse m' absehen können, um nur die Amplitude M zu betrachten, welche zu jeder beliebigen Zeit die Intensität der Schwingungen angiebt.

15. Bilden wir den Werth von M unter Benutzung unserer Hypothese § 10, wonach n^2, μ^2, ν^2 neben m^2 vernachlässigt werden dürfen, so finden wir den folgenden Ausdruck:

$$M^2 = \frac{\mathfrak{A}^2}{16 m^2 (n^2 + \nu^2)} \left\{ T_1 + 2 \frac{1 + \cos 2\alpha}{m} T_2 + 2 \frac{\sin 2\alpha}{m} T_3 \right\}, \tag{5}$$

wo

$$\left\{ \begin{aligned} T_1 &= e^{-2\mu t} \{ e^{-2\nu t} + e^{2\nu t} - 2 \cos 2 n t \} \\ T_2 &= e^{-2\mu t} \{ n e^{2\nu t} - n \cos 2 n t - \nu \sin 2 n t \} \\ T_3 &= e^{-2\mu t} \{ \nu e^{2\nu t} - \nu \cos 2 n t + n \sin 2 n t \}. \end{aligned} \right. \tag{5a}$$

In dem speciellen Fall, wenn $n = \nu = 0$, wenn also die zwei Leiter gleichzeitig in Schwingungsdauer und in Dämpfung gleich sind, so nimmt M scheinbar die Form $0/0$ an. Entwickelt man aber die Parentheseglieder der Grössen T in Reihen, so findet man, dass diese Reihen durch $n^2 + \nu^2$ theilbar sind, und man kommt leicht zu der Form

$$M^2 = \frac{\mathfrak{A}^2}{4 m^2} \cdot t^2 e^{-2\mu t} \left\{ 1 + \frac{\sin 2\alpha}{m t} \right\} \tag{6}$$

$$n = \nu = 0.$$

Besonders einfach wird der Ausdruck von M, wenn wir $\alpha = \pi/2$ annehmen. Es verschwinden dann die zwei Correctionsglieder, und da T ein vollständiges Quadrat ist, wird

$$M = \pm \frac{\mathfrak{A}}{4 m \sqrt{n^2 + \nu^2}} \cdot e^{-\mu t} \{ (e^{-\nu t} - e^{\nu t}) \cos n t + (e^{-\nu t} + e^{\nu t}) \sin n t \}. \tag{7}$$

16. Um ein anschauliches Bild der Resonatorschwingungen zu erhalten, brauchen wir nur die Curve

$$y = \pm M,$$

die „Amplitudencurve", zu zeichnen. Denn die Gleichung (4) zeigt sofort, dass φ eine zwischen die positive und die negative Amplitudencurve eingeschlossene Wellencurve ist. Wenn wir die Resonatorschwingungen nach der Form der Amplitudencurven klassificiren, indem wir uns auf die Discussion des durch (9) gegebenen Hauptgliedes beschränken, so können wir vier Typen unterscheiden.

Der erste Typus entspricht dem Fall, wo die zwei Leiter sowohl an Schwingungsdauer als an Dämpfung gleich sind, also $n = \nu = 0$. Die Amplitudencurve wird dann

$$M = \pm \frac{\mathfrak{A}}{2m} \cdot t e^{-\mu t}. \tag{8a}$$

In der Fig. 1 (*a*) ist diese Curve und die entsprechende Wellencurve gezeichnet für den Fall des logarithmischen Decrementes $\gamma = 0{,}04$, in Fig. 1 (c) für den Fall $\gamma = 0{,}4$.

Der zweite Typus ergiebt sich, wenn man n gleich Null, aber ν von Null verschieden annimmt, sodass die zwei Leiter gleiche Schwingungsdauer, aber verschiedene Dämpfung haben. Die Amplitudencurve wird dann

$$M = \pm \frac{\mathfrak{A}}{4m\nu} \cdot e^{-\mu t}(e^{-\nu t} - e^{\nu t}). \tag{8b}$$

Diese Curve und die entsprechende Wellencurve sind in Fig. 1 (*b*) gezeichnet für den Fall, dass die zwei logarithmischen Decremente $\gamma = 0{,}4$ und $\delta = 0{,}04$ sind, sodass diese Curve genau intermediär zwischen den zwei Curven (*a*) und (*c*) wird. Im Aussehen unterscheidet sich diese Curve nur sehr wenig von den vorhergehenden.

Der dritte Typus ergiebt sich, wenn $\nu = 0$, aber n von Null verschieden ist. Die Amplitudencurve erhält dann die einfach gedämpfte Sinusform

$$M = \pm \frac{\mathfrak{A}}{2mn} \cdot e^{-\mu t} \sin nt. \tag{8c}$$

Die Erscheinung, welche man in der Akustik *Schwebungen* nennt, tritt in diesem Falle auf, und zwar mit der grössten

Reinheit, welche sie im Falle gedämpfter Schwingungen haben kann. (a') und (c') sind solche Curven, die aus den Curven (a) und (c) entstanden sind durch Aenderung der einen Schwingungsdauer um ein Zehntel.

Der vierte Typus endlich ist der allgemeine Fall (7), wenn sowohl n als ν von Null verschieden sind. Eine solche Curve ist in Fig. 1 (b') gezeichnet, welcher aus (b) hervorgegangen ist in derselben Weise wie (a') und (c') aus (a) und (c). Dieser allgemeine Curventypus zeichnet sich durch schwache

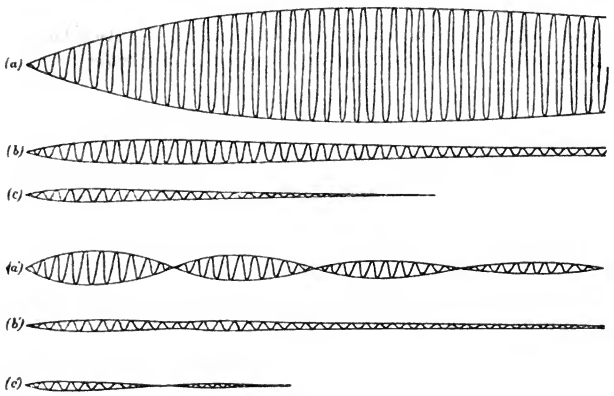


Fig. 1.

Schwebungen aus, die um so weniger hervortreten, je mehr die zwei Leiter an Dämpfung verschieden sind.

17. Eine besonders für die Theorie des secundären Funkens wichtige Aufgabe ist es, den Werth des grössten Maximums von q zu bestimmen. Diese Aufgabe kann man durch die einfachere ersetzen, dass man das erste Maximum der Amplitudencurve M sucht; nur bei sehr grossen Werthen von ν oder n wird dabei ein merkbarer Fehler einkommen. Leider lässt sich aber der analytische Ausdruck des Maximums von M auch nicht allgemein finden, weil die Aufgabe auf eine nicht auflösbare transcendente Gleichung führt. In den durch die Gleichungen (8) gegebenen Specialfälle ist aber die Aufgabe leicht durchführbar.

Das Maximum von (8b), welches dem Fall des Isochronismus entspricht, wird Folgendes, wo wir sofort nach den Relationen (2a) und (2b) die Parameter x, X, γ, δ eingeführt haben:

$$M_m = \frac{\mathfrak{A}}{4\pi}\frac{X^2}{\gamma}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{\delta}{\gamma-\delta}} = \frac{\mathfrak{A}}{4\pi}\frac{X^2}{\delta}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\frac{\gamma}{\delta-\gamma}}. \tag{9a}$$

Die erste Form ist bequem, wenn $\gamma > \delta$, die letzte im umgekehrten Falle. Ist der Parameter α nicht mehr gleich $\pi/2$, wie wir in (7) angenommen haben, so kann man nicht mehr den exacten Werth von M_m finden. Man überzeugt sich aber leicht, dass man den nächsten Schritt in der Annäherung macht durch Multiplication von (9a) mit dem Factor

$$1 + \frac{\gamma}{4\pi}\sin 2\alpha, \tag{9b}$$

und man überzeugt sich, dass bei Hinzunehmen dieses Factors die in § 10 gestellte Forderung zur Annäherung unserer Formeln erfüllt ist.

Zwei Grenzwerthe von M_m sind besonders zu beachten: wenn $\gamma = \delta$ wird

$$M_m = \frac{\mathfrak{A}}{4\pi}\frac{X^2}{\gamma}\cdot\frac{1}{e}, \tag{9c}$$

welchen das Maximum von (8a) darstellt. Ist andererseits $\delta = 0$, so wird:

$$M_m = \frac{\mathfrak{A}}{4\pi}\frac{X^2}{\gamma}. \tag{9d}$$

Der andere Fall, wo man den Werth von M finden kann, ist, wenn die beiden Dämpfungen gleich sind, also $\nu = 0$. Wenn wir der Einfachheit halber die Parameter m, n und ν beibehalten, so wird das Maximum von (8c)

$$M_m = \frac{\mathfrak{A}}{2m}e^{-\frac{\mu}{n}\operatorname{arctg}\frac{n}{\mu}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mu^2+n^2}}. \tag{10}$$

18. Wenn man den Ausdruck des Potentialunterschiedes φ der Resonatorpole als Function der Zeit kennt, kann man den Ausdruck der Stromintensität i im Resonatordrahte bilden, indem

$$i = k\frac{d\varphi}{dt}, \tag{11}$$

wo k ein constanter Proportionalitätsfactor ist, dessen Werth

man übrigens kennt, wenn man die Capacität des Condensators und somit die absolute Menge der in Bewegung gesetzten Electricität kennt. Den exacten Ausdruck von i kann man also durch directe Rechnung bilden aus einem der gegebenen Ausdrücke für φ. Wir wollen dies nicht durchführen; wir beschränken uns zu bemerken, dass man aus (8) sofort einen angenäherten Werth für i ableitet, welcher den charakteristischen Unterschied der Potential- und der Stromschwankungen zeigt.

Beachtet man nämlich, dass nach unserer Voraussetzung § 11 m gross ist relativ zu n, μ, ν, so sieht man, dass die Differentiation das folgende Hauptglied geben wird

$$i = k\,m\,M\cos(m\,t + m'). \tag{11a}$$

Denn die folgenden Glieder, welche durch Differentiation nach dem in M und m' implicite enthaltenen t hervorgehen, werden alle als Factoren eine der kleinen Grössen n, μ, ν enthalten.

Indem wir vom constanten Proportionalitätsfactor k absehen, welcher nur bei der Ausführung absoluter Messungen von Bedeutung wird, reducirt sich der hauptsächliche Unterschied zwischen Strom- und Potentialschwankungen auf Folgendes:

1. Die Amplitude der Stromschwankungen geht aus der Amplitude der Potentialschwankungen hervor durch Multiplication mit der mittleren cyklischen Schwingungszahl m.

2. Die Stromschwankungen sind relativ zu den Potentialschwankungen um ein Viertel Phase verschoben.

Die graphische Darstellung der Stromintensität im Resonatordrahte wird deshalb Curven geben, die sich nur unwesentlich von den Curven der Fig. 1 unterscheiden, indem wir eine proportionale Vergrösserung aller Ordinaten, oder eine Verschiebung der Wellencurve um ein Viertel Phase mit Beibehalten der Amplituden auch als unwesentlich ansehen.

Besonders bemerkt man, dass man approximative Ausdrücke der maximalen Stromintensität im Resonatordraht erhält durch Multiplication der entsprechenden maximalen Potentialunterschiede (9) oder (10) mit $k\,m$. Die Formel für

den Fall der Isochronismen wird dabei besonders, wenn wir m mit $2\pi/x$ ersetzen

$$i_m = k\frac{\mathfrak{A}}{2}\frac{X}{\gamma}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{\delta}{\gamma-\delta}} = k\frac{\mathfrak{A}}{2}\frac{X}{\delta}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\frac{\gamma}{\delta-\gamma}} \tag{12}$$

mit den zwei (9c) und (9d) entsprechenden Grenzwerthen.

V. Die Methoden zur Beobachtung der Resonatorschwingungen.

19. Die Methoden, welche man bis jetzt benutzt hat, um das Mitschwingen des Hertz'schen Resonators zu erkennen und zu messen, lassen sich in zwei Klassen theilen nach der Beziehung, worin sie zum Verlaufe der Resonatorschwingungen stehen:

Nach der Hertz'schen Funkenmethode erhält man ein Maass der grössten Amplitude, welche während des Verlaufes der Schwingungen vorgekommen ist. Dasselbe gilt von allen hieraus abgeleiteten Methoden, welche auf Leuchteffecten beruhen, sofern die Messung darin besteht, dass man das Aufhören des Leuchtens beobachtet.

Diesen Messungsmethoden gegenüber steht eine andere Klasse, wo die gemessene Grösse eine Summe ist von den Wirkungen der ganzen Reihe von Resonatorschwingungen. Hierher gehören die Methoden, nach welchen man die mechanischen Kräfte electrischer oder magnetischer Natur im Kraftfelde des Resonators, oder die Entwickelung von Joule'scher Wärme im Leitungsdrahte des Resonators abmisst. Indem wir von den individuellen Verschiedenheiten dieser Methoden absehen, wollen wir sie als Messungen des Integraleffectes der Resonatorschwingungen zusammenfassen.

Einige Methoden endlich, welche auf den Einflüssen der Resonatorschwingungen auf verdünntem Gase beruhen, wo man z. B. die Intensität des Leuchtens oder die Abänderungen des Gaswiderstandes misst, scheinen eine intermediäre Stellung zwischen den zwei oben charakterisirten Classen einzunehmen.

Einige Formeln, welche Bedeutung haben für die Theorie der Messungen der Maximalamplituden, haben wir schon im vorigen Abschnitte aufgestellt. Die für unsere Zwecke genügende praktische Brauchbarkeit und theoretische Durchsichtigkeit besitzen aber nur diejenigen Methoden, nach welchen man den Integraleffect der Schwingungen misst. Wir werden

deshalb erst die vollständige Theorie dieser Beobachtungsmethoden entwickeln, um zuletzt eine mehr beiläufige Theorie der Funkenmethode zu geben.

20. Eine ungeladene Electrometernadel, die wechselnder Influenz von Seiten der Resonatorpole unterworfen ist, wird einen ablenkenden Impuls erhalten proportional der Grösse

$$I = \int_0^\infty \varphi^2 \, dt. \tag{13}$$

Da selbst die kürzeste Beobachtungszeit Millionen von Schwingungen ablaufen lässt, darf man unbedenklich zur analytischen Einfachheit als obere Grenze $t = \infty$ einführen.

Nach (8) bilden wir den Ausdruck φ^2, welcher in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$\varphi^2 = \tfrac{1}{2} M^2 - \tfrac{1}{2} M^2 \cos 2 (m t + m').$$

Das letzte Glied auf der rechten Seite stellt eine Curve dar von genau derselben Form wie diejenigen der Fig. 1. Offenbar sind diese Curven bis auf verschwindende Correctionsglieder gleich viel positiv und negativ; ein Umstand, welcher physikalisch darin begründet ist, dass die Resonatorbewegung hauptsächlich in einer Schwingung um eine Gleichgewichtslage besteht. Wir dürfen deshalb das Integral dieses Gliedes verschwindend annehmen neben dem Integral der immer positiven Grösse M, und somit (13) ersetzen durch den einfachen annähernden Ausdruck

$$I = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty M^2 \, dt. \tag{13a}$$

21. Sind die magnetischen oder thermischen Wirkungen Gegenstand der Beobachtung, so hat man in (13) φ durch i zu ersetzen. Benutzt man für i den angenäherten Ausdruck (11a), so kommt man zu dem Resultate, dass der magnetische oder thermische Integraleffect I_i in der einfachen Beziehung

$$I_i = k^2 m^2 I \tag{13b}$$

zu dem electrischen Integraleffecte stebt.

Eine sehr nahe Verwandtschaft der magnetischen und thermischen Messungen mit den electrischen ist hiermit nach-

gewiesen und alles auf die Berechnung des electrischen Integraleffectes reducirt.

22. Um das Integral (13a) zu bilden, müssen wir die drei Functionen der Zeit T_1, T_2 und T_3 von 0 bis ∞ integriren. Man findet leicht jedes der Integrale als eine Summe von drei rationalen Brüchen. Summirt man diese drei Brüche, so scheidet sich in allen drei Fällen in den Zählern der Factor $n^2+\nu^2$ aus, welcher mit dem entsprechenden Nennerfactor in (5) wegfällt. Die Unbestimmtheit, welche an der Formel (5) haftet, fällt also jetzt fort, und man kommt leicht zu den folgenden Resultaten.

Sieht man von den zwei Correctionsgliedern in (5) ab, so findet man als den möglichst einfachen Ausdruck des electrischen Integraleffectes:

$$J = \frac{\mathfrak{A}^2 \mu}{32\, m^2 (\mu^2 - \nu^2)(\mu^2 + n^2)}. \tag{14}$$

Nimmt man die zwei Correctionsglieder hinzu, so ist der eben gefundene Ausdruck von I mit dem folgenden Correctionsfactor zu multipliciren:

$$1 + \frac{\mu + \nu}{m} \sin 2\mathfrak{a} + \frac{\mu + \nu}{\mu} \frac{n}{m} (1 + \cos 2\mathfrak{a}). \tag{14a}$$

Nehmen wir diesen Correctionsfactor hinzu, so sind die vernachlässigten Glieder von der Ordnung μ^2/m^2 und n^2/m^2 und dürfen folglich den in § 10 gemachten Voraussetzungen gemäss unberücksichtigt bleiben.

23. Kehren wir jetzt zu den Variablen a, b, α, β zurück, so bemerken wir besonders, dass innerhalb der Approximationsgrenze m^2 gleich $a\,b$ gesetzt werden darf. Es wird dann das Hauptglied

$$I = \frac{\mathfrak{A}^2 (\alpha + \beta)}{16\, a\, b\, \alpha\, \beta \{(a-b)^2 + (\alpha+\beta)^2\}}$$

und der Correctionsfactor

$$1 + \frac{2\alpha}{a+b} \sin 2\mathfrak{a} + \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} \frac{a-b}{a+b} (1 + \cos 2\mathfrak{a}).$$

Schliesslich ersetzen wir nach den Relationen (2a) die Dämpfungsexponente α und β durch die logarithmischen Decremente γ_1 und γ_2, und die cyklischen Schwingungszahlen a und b durch die Schwingungsdauern x_1 und x_2. Dann wird

$$(15) \qquad I = \left(\frac{\mathfrak{A}}{8\pi}\right)^2 \frac{x_1^3 x_2^3 (\gamma_1 x_2 + \gamma_2 x_1)}{\gamma_1 \gamma_2 \{(\gamma_1 x_2 + \gamma_2 x_1)^2 + 4\pi^2 (x_1 - x_2)^2\}}$$

und der Correctionsfactor, wo wir immer zweckmässige Vereinfachungen innerhalb der Annäherungsgrenze vornehmen dürfen:

$$(15a) \qquad 1 + \frac{\gamma_1}{2\pi} \sin 2\alpha + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} (1 + \cos 2\alpha).$$

Die Fehler in diesem Ausdrucke von I, wenn (15a) mitgenommen wird, sind von der Ordnung

$$\left(\frac{x - X}{2X}\right)^2 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2,$$

welche beide Grössen wir (§ 10) neben der Einheit klein angenommen haben.

24. Mittels Gleichung (13b) können wir aus dem electrischen Integraleffect (15) den magnetischen oder den thermischen Integraleffect I_i ableiten. Derselbe wird, indem wir wieder innerhalb der Approximationsgrenze

$$m^2 = a\,b = \frac{4\pi^2}{x_1 x_2}$$

setzen

$$(15b) \qquad I_i = k^2 \left(\frac{\mathfrak{A}}{4}\right)^2 \frac{x_1^2 x_2^2 (\gamma_1 x_2 + \gamma_2 x_1)}{\gamma_1 \gamma_2 \{(\gamma_1 x_2 + \gamma_2 x_1)^2 + 4\pi^2 (x_1 - x_2)^2\}},$$

während der Correctionsfactor (15a) unverändert bleibt.

Nun ist zu bemerken, dass die Gleichung (13b) nur annähernd richtig ist. Um sichere Grenzen für den Gültigkeitsbereich der Formel (15b) festzustellen oder eventuell die richtigere Formel zu finden, muss man den exacten Ausdruck von i nach (11) und nachher für I_i bilden, was ohne Schwierigkeit durchführbar ist nach dem schon gegebenen Muster für die Berechnung des electrischen Integraleffectes I. Diese Rechnungen werden wir nicht durchführen; wir beschränken uns auf eine vollständige Ausarbeitung der Theorie der electrometrischen Beobachtungsmethode. Wenn wir aber gelegentlich parallele Sätze und Formeln für andere Beobachtungsmethoden aufstellen, so geschieht es mit dem ein für allemal hier ausgesprochenen Vorbehalt, dass wir den Approximationsgrad und den Gültigkeitsbereich nicht genauer untersucht haben; wir haben nur constatirt, dass sie bei genügend kleinen Werthen der logarithmischen Decremente und des

Schwingungsdauerunterschiedes mit unbegrenzter Annäherung gelten.

25. Zur Lösung unserer Aufgabe ist jetzt der erste Schritt gethan: den Integraleffect I, wodurch die Resonatorschwingungen beobachtet werden, haben wir ausgedrückt als Function von einem bekannten Parameter und von sämmtlichen gesuchten unbekannten Parametern. Zu vollständiger Lösung unserer Aufgabe fehlt noch die Untersuchung, wie man durch systematische Beobachtungen des Integraleffectes die Bestimmung der Parameter erreichen kann.

Die Bestimmung der einzelnen Parameter kann natürlich nur dadurch erzielt werden, dass man die verschiedenen Werthe von I beobachtet, welche aus systematischen Abänderungen in den Werthen der Parameter hervorgehen. Dabei wollen wir folgendermaassen verfahren:

1. Erstens setzen wir als veränderlich voraus den einzigen bekannten Parameter, die Schwingungsdauer x des veränderlichen Leiters, welche entweder mit x_1 oder mit x_2 identificirt werden darf. Dies führt auf die Theorie der *„Resonanzcurve"*, durch welche wir die Bestimmung von den folgenden unbekannten erreichen: von der Schwingungsdauer X; der Scalenablesung Y am Beobachtungsinstrumente, welche der Schwingungsdauer $x = X$ entspricht; und von dem Mittelwerth ω der zwei logarithmischen Decremente γ und δ.

2. Nach der Bestimmung von X sind wir im Stande, den Fall des Isochronismus $x = X$ zu realisiren, und untersuchen die *Theorie der isochronen Leiter*. Durch Abänderungen der logarithmischen Decremente unter Beibehaltung des Isochronismus lassen sich Aenderungen in der Scalenablesung Y erzeugen, wodurch die vollständige Bestimmung der logarithmischen Decremente γ und δ erreicht wird.

3. Nachdem durch 1 und 2 die inneren Constanten der beiden Instrumente, Schwingungsdauer und logarithmische Decremente, gefunden sind — alles durch relative Messungen — wird eine einzige absolute Messung den Werth des Intensitätsfactors $\mathfrak{A}$ geben.

Ehe wir aber die somit angedeuteten Untersuchungen anfangen und die zur Bestimmung der Parameter dienenden Formeln aufstellen, wollen wir erst einige allgemeine Con-

sequenzen aus den Formeln (9) und (15) ziehen, die für die Vergleichung der verschiedenen Beobachtungsmethoden Interesse haben.

VI. Allgemeine Sätze über die Beobachtung der Resonatorschwingungen.

26. Den wichtigsten Specialfall unserer Formel erhalten wir durch die Substitution $x_1 = x_2 = X$, welches also dem Falle entspricht, dass die beiden Leiter auf Isochronismus abgestimmt sind. Wenn wir von dem Correctionsfactor absehen und wenn wir γ_1 und γ_2 durch γ und δ ersetzen, erhalten wir:

(16a) $$I = \left(\frac{\mathfrak{A}}{8\pi}\right)^2 \frac{X^5}{\gamma\,\delta\,(\gamma+\delta)}$$

als Ausdruck des electrischen Integraleffectes der Resonatorschwingungen. Nach (15b) leitet man den folgenden Ausdruck ab für den von der Stromintensität i abhängigen magnetischen oder thermischen Integraleffect

(16b) $$I = k^2 \left(\frac{\mathfrak{A}}{4}\right)^2 \frac{X^3}{\gamma\,\delta\,(\gamma+\delta)}.$$

Das Potential der grössten Schlagweite des secundären Funkens ist endlich nach (9a):

$$M_m = \frac{\mathfrak{A}}{4\pi}\,\frac{X^2}{\gamma}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{\delta}{\gamma-\delta}} = \frac{\mathfrak{A}}{4\pi}\cdot\frac{X^2}{\delta}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\frac{\gamma}{\delta-\gamma}}.$$

Betrachtet man diese Ausdrücke als Functionen der gemeinschaftlichen Schwingungsdauer der Leiter, so erhält man die folgenden Sätze über die Beobachtungsmethoden der Resonatorschwingungen, welche also für isochrone Leiter gelten:

Das secundäre Funkenpotential ist proportional dem Quadrat der Schwingungsdauer.

Der magnetische oder thermische Integraleffect ist proportional dem Kubus der Schwingungsdauer.

Der electrische Integraleffect ist proportional der fünften Potenz der Schwingungsdauer.

27. Die Bedeutung dieser Resultate für die Wahl einer zweckmässigen Beobachtungsmethode ist offenbar. Im allgemeinen sieht man ein, dass die Beobachtbarkeit der electrischen Schwingungen mit Hülfe von Resonator bei abnehmender

Schwingungsdauer rasch abnehmen muss. Diese Abnahme der Beobachtbarkeit verläuft am schnellsten für den Fall, dass man electrometrische Messungen macht; am weitesten kann man hoffen, die Beobachtbarkeit nach der Hertz'schen Funkenmethode zu treiben.

Uebrigens ist zu bemerken, dass wir hier ausdrücklich alle anderen Parameter constant vorausgesetzt haben, während doch die geometrische Aenderung, wodurch die Abnahme der Schwingungsdauer erreicht wird, im allgemeinen eine gleichzeitige Verkleinerung der Grösse $\mathfrak{A}$ zur Folge haben muss. Die Abnahme der Beobachtbarkeit wird also für alle drei Methoden noch schneller verlaufen, wenn man die Variationen von $\mathfrak{A}$ mitrechnet. Dabei wird wieder die Ueberlegenheit der Funkenmethode über die zwei anderen hervortreten, indem das secundäre Funkenpotential nur von $\mathfrak{A}$, die Integraleffecte dagegen von $\mathfrak{A}^2$ abhängen.

Die Erfahrung, dass die Beobachtung der Hertz'schen Wellen mit abnehmender Wellenlänge immer schwieriger wird, haben schon viele Physiker gemacht. Diese Erfahrung ist also eine Bestätigung der Theorie, und es ist ein Irrthum von Hrn. Zehnder, darin ein Argument gegen die gewöhnliche Hypothese (1a) über die Electricitätsbewegung im Hertz'schen Oscillator zu sehen.[1])

28. Betrachten wir jetzt die Integraleffecte und das secundäre Funkenpotential als Functionen der logarithmischen Decremente. In dieser Hinsicht verhalten sich der electrische und der magnetisch-thermische Effect identisch. Das secundäre Funkenpotential verhält sich dagegen wesentlich verschieden.

Setzen wir erst $\gamma = \delta$, so reducirt sich der Nenner von I und I_i auf $2\gamma^3$, der Nenner von M_m aber auf $e\gamma$ (9c). Also gelten die folgenden Sätze für den Fall, dass die isochronen Leiter auch gleiche Dämpfung haben:

Das secundäre Funkenpotential ist umgekehrt proportional der ersten Potenz des gemeinschaftlichen logarithmischen Decrementes.

Der Integraleffect ist umgekehrt proportional der dritten Potenz des gemeinschaftlichen logarithmischen Decrementes.

---

1) Zehnder, Wied. Ann. 52. p. 45. 1894.

Betrachten wir den entgegengesetzten Fall, dass γ und δ sehr verschieden sind, sodass man z. B. δ neben γ vernachlässigen darf, so reducirt sich M_m auf den Ausdruck (9 d) und der Zähler von I oder I_i wird $\gamma^2 \delta$. Die folgenden Sätze gelten also für isochrone Leiter mit sehr verschiedener Dämpfung:

Das secundäre Funkenpotential ist umgekehrt proportional dem grössten logarithmischen Decremente, und von dem kleinsten Decremente unabhängig.

Der Integraleffect ist umgekehrt proportional dem Quadrate des grössten und der ersten Potenz des kleinsten logarithmischen Decrementes.

29. Nach diesen Sätzen beurtheilt man leicht, wie die Beobachtbarkeit der Resonatorschwingungen mit der Dämpfung der Instrumente zu- oder abnimmt. Die auf den Integraleffecten beruhenden Beobachtungsmethoden eignen sich gut für schwach gedämpfte Schwingungen; bei steigender Dämpfung werden sie aber zuletzt unbrauchbar, und für die Beobachtung stark gedämpfter Schwingungen wird die Funkenmethode die beste sein.

Die grosse Empfindlichkeit des Integraleffectes für die Aenderungen der logarithmischen Decremente macht es leicht, nach der electrometrischen, galvanometrischen oder thermischen Beobachtungsmethode die Bestimmung der logarithmischen Decremente zu erreichen, während nach der Funkenmethode selbst der qualitative Nachweis einer Veränderung der Dämpfung unmöglich sein kann. Dies erklärt, warum Hertz durch Funkenbeobachtungen ein Eingreifen der Metalleigenschaften im Verlauf der Resonatorschwingungen kaum constatiren konnte [1]), während die thermischen und die electrometrischen Beobachtungen den Einfluss des Widerstandes und der Magnetisirbarkeit sofort zeigten. [2])

Am besten werden vielleicht diese Eigenthümlichkeiten der Beobachtungsmethoden durch den folgenden Satz illustrirt, die man einerseits aus dem Ausdruck für I, andererseits aus einem Vergleich der Ausdrücke (9 c) und (9 d) für M_m ableitet:

1) Hertz, Ausbreitung der electrischen Kraft, p. 50.

2) Klemenčič, Wien. Ber. 24. März 1892; V. Bjerknes, Wied. Ann. 47. p. 69. 1892.

Durch Verkleinerung des kleinsten der beiden logarithmischen Decremente ins unendliche erreicht man ein unbegrenztes Ansteigen des Integraleffectes, aber ein Ansteigen des secundären Funkenpotentiales auf höchstens den e-fachen oder 2,72-fachen Werth.

VII. Die Gleichung der Resonanzcurve.

30. Wir haben also jetzt zu untersuchen, wie sich der Werth des Integraleffectes I verändert, wenn der eine Leiter seine Schwingungsdauer verändert. Da die Formel (15) in Bezug auf die Parameter der zwei Leiter symmetrisch ist, brauchen wir nicht zwischen dem primären und dem secundären Leiter zu unterscheiden, sondern nur zwischen dem veränderlichen und dem constanten. Es seien x und γ Schwingungsdauer und logarithmisches Decrement des Veränderlichen, X und δ des constanten Leiters, so lässt sich (15) schreiben:

$$I = \left(\frac{\mathfrak{A}}{8\pi}\right)^2 \frac{x^3 X^3 (\gamma X + \delta x)}{\gamma\delta\{(\gamma X + \delta x)^2 + 4\pi^2 (x - X)^2\}}.$$

Die an dem einen Leiter ausgeführten Veränderungen, welche zur Veränderung der Schwingungsdauer x dienen sollen, müssen im allgemeinen gleichzeitige Veränderungen des logarithmischen Decrementes γ und des Intensitätsfactors $\mathfrak{A}$ herbeiführen. Die Grössen $\mathfrak{A}$ und γ entwickeln wir deshalb nach Potenzen der Schwingungsdauerdifferenz $x \div X$, und dieselbe Entwickelung dürfen wir gleichzeitig für den im Zähler vorkommenden Factor x^3 benutzen.

Durch Einsetzen dieser Entwickelungen in den Ausdruck für I erhält man diese Grösse als Function einer einzigen unabhängigen Variablen x, und einer grösseren Anzahl Parameter, indem nicht nur die in der Einleitung definirten Fundamentalparameter vorkommen, sondern auch eine Anzahl Constanten mehr zufälliger Natur, die von den am veränderlichen Leiter ausgeführten Formänderungen abhängen.

Um eine für die Praxis brauchbare Formel zu erhalten, müssen wir versuchen die Anzahl der Parameter möglichst zu reduciren. Die Variationen der veränderlichen x sind durch die Bedingung des § 10 begrenzt, dass $(x \div X)^2$ neben $(2X)^2$ klein sein soll. Sind x_1 und x_2 die äussersten Grenzwerthe, welche x annehmen darf, so ersetzen wir die vollständigen Entwickelungen durch diejenigen lineären Ausdrücke,

welche innerhalb des Intervalles von x_1 zu x_2 den besten Anschluss geben:

$$(17)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}_0^2 + \mathfrak{A}_1^2 \dfrac{x - X}{X} \\ \gamma = \gamma_0 + \gamma_1 \dfrac{x - X}{X} \\ x^3 = X^3 + 3 X_1^2 (x - X) \end{cases}$$

$\mathfrak{A}_0$ ist also der Mittelwerth des Intensitätsfactors, γ_0 der Mittelwerth des logarithmischen Decrementes im Intervalle von x_1 bis x_2; $\mathfrak{A}_1$ und γ_1 sind Coefficienten, welche die mittleren Veränderungen des Intensitätsfactors und des logarithmischen Decrementes innerhalb dieses Gebietes angeben.

31. Nach Einsetzen dieser Ausdrücke kann I geschrieben werden als ein rationaler Bruch, dessen Zähler eine Entwickelung ersten Grades, und dessen Nenner eine Entwickelung zweiten Grades nach $x \div X$ ist:

$$(18)\qquad I = I_0 \frac{\omega^2 X^2 + \pi^2 S(x - X)}{\omega^2 X^2 + 2\,\omega\,\varepsilon\, X(x - X) + (\pi^2 + \varepsilon^2)(x - X)^2}.$$

Die Bedeutung der Parameter ω und ε ist folgende:

$$(18a)\qquad \begin{cases} \omega = \dfrac{\gamma_0 + \delta}{2} \\ \varepsilon = \dfrac{\gamma_1 + \delta}{2} \end{cases}$$

ω ist der Mittelwerth der logarithmischen Decremente beider Leiter, also die in § 10 erwähnte Grösse. ε ist der Mittelwerth aus dem logarithmischen Decremente des constanten Leiters und dem Zuwachscoefficienten des Decrementes des veränderlichen Leiters. Diese Grösse wird im allgemeinen von derselben Grössenordnung wie ω sein; doch besteht der wichtige Unterschied, dass während ω immer positiv ist, ε positiv, null oder negativ sein kann.

I_0 und S sind Parameter, welche eine complicirtere Bedeutung haben. Nur beachten wir, dass S von der Grössenordnung $3(\omega/\pi)^2 . X$ ist.

Hätten wir den Correctionsfactor (15a) berücksichtigt, so wäre der Ausdruck (18), wie man leicht sieht, in äusserer Form unverändert geblieben. Der Unterschied wäre nur eine etwas abgeänderte Bedeutung der zwei Parameter I_0 und S.

32. Bedeutet nun y die Scalenablesung an dem Instrumente, Electrometer, Galvanometer oder der Vorrichtung für das Messen der Joule'schen Wärme, wodurch man die mechanische Summenwirkung der Resonatorschwingungen misst, und setzt man Proportionalität voraus zwischen Scalenablesung und Integraleffect I, so lässt sich folgendes behaupten:

Wählt man als Abscisse die Schwingungsdauer x des variablen Leiters, als Ordinate die Scalenablesung y, so erhält man eine Curve, deren Gleichung sich folgendermaassen schreiben lässt:

$$y = I \frac{\omega^2 X^2 + \pi^2 S(x - X)}{\omega^2 X^2 + 2\omega\varepsilon X(x - X) + (\pi^2 + \varepsilon^2)(x - X)^2} \tag{19}$$

33. Diese Gleichung enthält, ausser der unabhängigen Variabeln x, fünf Parameter X, I, S, ω, ε. Von denselben sind indess nur vier für die Form der Curve wesentlich; denn die Gleichung nimmt als Polynom geschrieben die Form an:

$$x^2 y - Axy - Bx + Cy + D = 0, \tag{20}$$

worin nur die vier Parameter A, B, C, D vorkommen.

Ist eine genügende Anzahl Punkte der Resonanzcurve durch Versuche gefunden, so kann man die Werthe von A, B, C, D durch Auflösung von linearen Gleichungen finden — eventuell unter Zuhülfenahme der Methode der kleinsten Quadrate. Nachher hat man zur Bestimmung der fünf Parameter nur vier Relationen. Die Untersuchung der Resonanzcurve hat also noch nicht zu dem erwünschten Ziele geführt: in der Form (19) oder (20) führt sie nicht zu der Bestimmung eines einzigen der für Oscillator und Resonator charakteristischen Parameter; sie gibt nur Relationen zwischen denselben.

VIII. Graphische Untersuchung der Resonanzcurve.

34. Um aus der Resonanzcurve die expliciten Werthe der Parameter unserer Leiter ableiten zu können, ohne fremde Versuche oder besondere aus theoretischen Betrachtungen abgeleitete Relationen zu Hülfe zu nehmen, ist es also nothwendig einen Parameter zu entfernen. Dies kann aber nur erreicht werden durch eine Vernachlässigung, welche Fehler erster Ordnung in den Werthen von y verursachen darf, während alle früher gemachten Vernachlässigungen zweiter Ordnung gewesen sind. Es fragt sich aber dann, wie stark dieser

eventuelle Fehler erster Ordnung in die Werthe der zu bestimmenden Parametern eingreifen wird. Dies werden wir leicht übersehen können, nachdem wir einige einfache geometrische Eigenschaften unserer Curve abgeleitet haben.

Wie die Gleichung (20) zeigt, ist die Resonanzcurve eine algebraische Curve dritten Grades, und den Verlauf derselben ersieht man aus der Fig. 2: Die Curve schmiegt sich asymptotisch an die X-Axe an, und in der Gegend des Abscissenwerthes $x = X$ hat sie ein ausgeprägtes Maximum. Nur in dieser Gegend hat sie physikalische Bedeutung.

Schreiben wir erst die Gleichung in der Form eines nach Potenzen von $x \div X$ geordnetes Polynomes:

$$(21) \qquad (x-X)^2-\left(\frac{\pi^2}{\pi^2+\varepsilon^2}S\frac{Y}{y}-\frac{2\omega\varepsilon}{\pi^2+\varepsilon^2}X\right)(x-X)+\frac{\omega^2}{\pi^2+\varepsilon^2}X^2\frac{y-Y}{y}=0.$$

Man sieht aus der Gleichungsform sofort, dass der Punkt

(21a) $x = X,\ y = Y$

der Curve angehört; nennen wir diesen Punkt den *Isochronitätspunkt.* Dieser Punkt liegt in der Nähe des Maximums, fällt aber im allgemeinen nicht mit demselben zusammen. Substituirt man $y = Y$, so ergibt sich

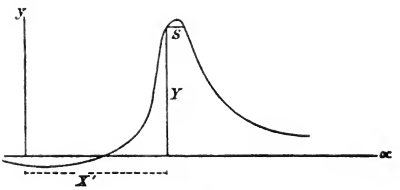


Fig. 2.

$$(21\,b) \qquad x - X = S' = \frac{\pi^2}{\pi^2+\varepsilon^2}S - \frac{2\omega\varepsilon}{\pi^2+\varepsilon^2}X.$$

Dieser Ausdruck repräsentirt also *die Länge einer horizontalen Sehne durch den Isochronitätspunkt.* Da der Isochronitätspunkt immer sehr nahe dem Maximum fällt, kann man sagen, dass $S/2$ annähernd der Abscissenabstand dieser Punkte darstellt.

35. Schneiden wir die Curve durch eine beliebige horizontale Sehne, $y = \text{const}$. Die Abscissen der Schnittpunkte dieser Sehne mit der Curve seien x_1 und x_2. Dann müssen $x_1 \div X$ und $x_2 \div X$ Wurzeln der Gleichung (21) sein, und die bekannten Relationen zwischen den Coefficienten und den Wurzeln einer Gleichung geben:

$$(22)\qquad \begin{cases} x_1 - X + x_2 - X = \dfrac{\pi^2}{\pi^2+\varepsilon^2} S\,\dfrac{Y}{y} - \dfrac{2\,\omega\,\varepsilon}{\pi^2+\varepsilon^2} X \\ (x_1 - X)(x_2 - X) = \dfrac{\omega^2}{\pi^2+\varepsilon^2} X^2 \dfrac{y-Y}{y} \end{cases}$$

Dividirt man die erste Gleichung durch 2, so bedeutet das Glied links den Abstand zweier Punkte der Sehne, nämlich zwischen seinen Mittelpunkt

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

und seinen Schnittpunkt mit der Isochronitätsordinate $x = X$. Bezeichnen wir den Abstand dieser Punkte mit ξ, so lässt sich die erste Gleichung (22) schreiben:

$$(22\,a)\qquad \xi y + \frac{\omega\,\varepsilon}{\pi^2+\varepsilon^2} Xy = \frac{1}{2}\,\frac{\pi^2}{\pi^2+\varepsilon^2}\, SY.$$

Die Resonanzcurve hat also die folgende Eigenschaft:

Der geometrische Ort der Mittelpunkte von Sehnen parallel zur XAxe ist eine gleichschenklige Hyperbel.

Die Asymptoten dieser Hyperbel sind die X-Axe und die Gerade

$$\xi = \frac{\omega\,\varepsilon}{\pi^2+\varepsilon^2} X,$$

oder

$$(22\,b)\qquad x = X\left(1 - \frac{\omega\,\varepsilon}{\pi^2+\varepsilon^2}\right).$$

Die in die zweite Gleichung (22) eingehenden Ausdrücke $x_1 \div X$, $x_2 \div X$, y, $y \div Y$ repräsentiren die Längen der vier Segmente, in welche die horizontale Sehne und die Ordinate Y des Isochronitätspunktes sich gegenseitig theilen. *Bezeichnen wir diese Segmente der Reihe nach mit a, b, c, d, wobei d dasjenige Segment ist, welches den Isochronitätspunkt als Endpunkt hat, so besteht die Beziehung:*

$$(22\,c)\qquad \omega^2 = \frac{a\,b\,c}{d}\,\frac{\pi^2+\varepsilon^2}{X^2}.$$

36. Da ω und ε Grössen derselben Ordnung sind, so wird das Nennerglied $2\,\omega\,\varepsilon\,X(x - X)$ nur um eine Ordnungsstufe kleiner als die zwei anderen Nennerglieder (19), und die Vernachlässigung dieses Gliedes wird deshalb, wie schon angedeutet, Fehler erster Ordnung in die Werthe von y ver-

ursachen können. Substituiren wir aber doch in unsere Formeln $\varepsilon = 0$. Die Gleichung der Resonanzcurve wird dann:

$$y = Y \frac{\omega^2 X^2 + \pi^2 S(x - X)}{\omega^2 X^2 + \pi^2 (x - X)^2}. \tag{23}$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Gleichung, welche ich früher unter specielleren Voraussetzungen für die Resonanzcurve aufgestellt habe [1]), nach der Vernachlässigung einiger Glieder höherer Ordnung als Specialfall in diese Gleichung (23) eingeht. Nach meinen damaligen Voraussetzungen über die Kleinheit des Resonatordecrementes dürfen wir nämlich γ mit 2ω identificiren; zu speciell war diese ältere Gleichung dadurch geworden, dass ich fehlerhaft S als eine Constante, statt als einen Parameter auffasste. Hierin liegt die Ursache des „systematischen Fehlers", dem ich damals (l. c. p. 86, § 18) begegnete.

Die Isochronitätssehne S' (21b) wird nun einfach S, und die Gleichung der Hyperbel durch die Mittelpunkte der Sehnen vereinfacht sich auf

$$\xi y = \tfrac{1}{2} S Y, \tag{23a}$$

die Asymptote wird einfach

$$x = X \tag{23b}$$

und der Ausdruck des mittleren logarithmischen Debrementes

$$\omega = \frac{\pi}{X} \sqrt{\frac{a b}{d}}. \tag{23c}$$

Die vier Parameter X, Y, S, ω der Gleichung (23) können explicite bestimmt werden, wenn die Form der Resonanzcurve durch Versuche gefunden ist. Dies kann durch Rechnung geschehen nach dem im § 33 angedeuteten Schema, oder einfacher graphisch mit Hülfe der in den Gleichungen (23a), (23b), (23c) enthaltenen geometrischen Eigenschaften der Curve. Die Fehler in den gefundenen Werthen bestimmen wir durch Vergleichung der Formeln (23) mit den früheren genaueren Formeln, welche wir dabei zweckmässig vereinfachen unter Beachtung der Kleinheit von ε. Sind X, Y, S, ω aus (23) erhalten, so werden die verbesserten Werthe, welche der genaueren Gleichung (19) genügen:

1) V. Bjerknes, Wied. Ann. **44.** p. 85. 1891.

$$(24)\qquad \begin{cases} X_c = X\left(1 + \frac{\varepsilon\,\omega}{\pi^2}\right) \\ Y_c = Y\left(1 + \frac{\varepsilon}{\omega}\,\frac{S}{X}\right) \\ S_c = S\left(1 - 2\,\frac{\omega\,\varepsilon}{\pi^2}\,\frac{X}{S}\right) \\ \omega_c = \omega\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon^2}{\pi^2}\right) \end{cases}$$

Bemerken wir nun, dass die Sehne S von der Grössenordnung 3 $(\omega/\pi)^2$ ist, so ersehen wir, dass die Fehler, welche die Substitution $\varepsilon = 0$ in den Werthen der Grössen X, Y, ω erzeugt, zweiter Ordnung sind, und nicht erster Ordnung, wie die Fehler in gewissen Ordinatenwerthen y. Der Werth der Grösse S dagegen, welcher selbst zweiter Ordnung ist, wird sehr unsicher. Diese Unsicherheit hat jedoch wenig Bedeutung, da die genaue Kenntniss von S wegen der complicirten physikalischen Bedeutung dieser Grösse keinen grösseren Nutzen haben kann.

37. Die Frage nach der Brauchbarkeit der Resonanzcurve für die Bestimmung der Parameter des Oscillators und des Resonators haben wir dadurch vollständig erledigt und die Resultate sind also die folgenden:

Das Ausmessen einer experimentell gefundenen Resonanzcurve gestattet die annähernde Bestimmung der drei Parameter X, Y, ω, von einem unbekannten Fehler zweiter Ordnung abgesehen; der vierte Parameter S wird mit grösserem Fehler behaftet sein.

Von diesen Parametern ist X eine der Grössen, welche wir suchen, nämlich die Schwingungsdauer des Isochronismus oder die Schwingungsdauer des constanten Leiters, ω ist der Mittelwerth von zwei gesuchten Grössen, der logarithmischen Decremente γ und δ und somit für die definitive Bestimmung dieser Grössen nützlich. Die Grösse Y endlich, der Electrometerausschlag bei Isochronismus, ist die Grösse, welche in der folgenden Vollendung der Theorie die wichtigste Rolle spielt.

Um aus einer experimentell gefundenen Resonanzcurve die approximativen Werthe dieser Parameter abzuleiten, kann man folgendermaassen verfahren:

Man zeichnet in der Curve (Fig. 3) eine Anzahl Sehnen parallel der X-Axe, und sucht die Mittelpunkte dieser Sehnen; diese Mittelpunkte bestimmen eine Hyperbel (23 a), deren Asymptote (23 b) man construirt. Diese Asymptote schneidet die Resonanzcurve in dem Isochronitätspunkte: die Abscisse dieses Punktes ist das gesuchte X, die Ordinate dieses Punktes ist das gesuchte Y, die horizontale Sehne durch diesen Punkt ist das gesuchte S.

Man misst so die vier Segmente a, b, c, d ab, worin sich die Ordinate Y und eine beliebige der Sehnen theilen, und bestimmt das mittlere logarithmische Decrement nach der Formel (23 c).

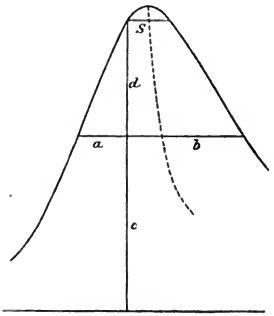


Fig. 3.

Verbesserungen der in dieser Weise gefundenen Werthe können nachträglich geschehen, wenn man durch andere Versuche das logarithmische Decrement δ des constanten Leiters und den Zuwachscoefficienten γ_1 des logarithmischen Decrementes des veränderlichen Leiters gefunden hat und somit das in den Formeln (24) vorkommende ε kennt.

38. Die Brauchbarkeit der obigen Methode der Resonanzcurve ist nur durch die zwei Bedingungen des § 10 und durch die Vernachlässigung der höheren Glieder in den Entwickelungen (17) beschränkt.

Die letzterwähnten Vernachlässigungen können Zweifel über die Ausdehnung des Abscissenbereiches veranlassen, innerhalb welches unsere Sätze gültig sind. Praktische Bedeutung hat jedoch dieser Zweifel nicht, da man immer die Untersuchung der Resonanzcurve mit kurzen Sehnen in der Nähe vom Isochronitätspunkte anfangen kann und nur mit grösseren Sehnen solange fortsetzt, als sich keine systematischen Abweichungen in die erhaltenen Werthe der Parameter zeigen.

Um den Inhalt der Beschränkung in Bezug auf die Werthe von ω beurtheilen zu können, zeichen wir (Fig. 4) eine Anzahl Resonanzcurven mit verschiedenen Werthen dieses Parameters

von $\omega = 0{,}1$ zu $\omega = 2$. Dabei haben wir S den Durchschnittswerth

$$S = 3\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 X$$

gegeben; die Werthe von x sind zwischen $1{,}2\ X$ und $0{,}8\ X$ gewählt, sodass an der Intervallgrenze

$$\left(\frac{x - X}{2X}\right)^2 = \frac{1}{100}.$$

Wenn $\omega = 2$ ist, wird der Fehler $(\omega/2\pi)^2$ etwa $1/10$ betragen. In diesem Falle fällt das Maximum der Curve weit ausserhalb der Schwingungsdauer $x = 1{,}2\ X$. Das eigentlich charakteristische der Resonanzerscheinung, nämlich ein maximales Ansprechen des Resonators bei ungefähr gleicher Schwingungsdauer der zwei Instrumente, scheint fast vollständig verschwunden, und quantitative Verwendungen sind, wenn auch formell möglich, doch wenig empfehlenswerth.

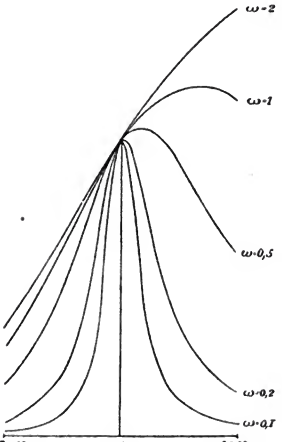


Fig. 4.

Bei $\omega = 1$ ist der Factor $(\omega/2\pi)^2$ etwa $1/40$. Das Maximum der Curve ist noch um mehr als 10 Proc. von dem Isochronismus entfernt, sodass die Resonanz, obwohl erkennbar, doch wenig charakteristisch ist, und die quantitative Verwendung noch wenig empfehlenswerth. Unsere Methode wird also schon in diesem Falle formell eine vier- bis fünfprocentige Genauigkeit geben.

Bei abnehmenden Werthen von ω wird die Resonanz immer mehr charakteristisch, und gleichzeitig nimmt die Genauigkeit unserer Formeln rasch zu. Wir dürfen deshalb folgendes aussagen:

Die Resonanzerscheinung wird sich im allgemeinen nur dann für quantitative Untersuchungen eignen, wenn der Mittelwerth der logarithmischen Decremente der zwei Leiter kleiner als 1 ist.

Da unsere Formeln noch bis zu diesem Grenzwerthe eine wenn auch rohe Brauchbarkeit haben, dürfen wir in den Bedingungen des § 10 keine wesentliche Beschränkung sehen.

IX. Theorie der isochronen Leiter.

39. Die Resonanzcurvenmethode gestattete also die approximative Bestimmung erstens der Schwingungsdauer X des Isochronismus, zweitens des Mittelwerthes ω der logarithmischen Decremente beider Leiter. Der nächste Schritt wird sein, die Einzelwerthe γ und δ der logarithmischen Decremente zu bestimmen. Dies wird man in verschiedener Weise durch Versuche mit isochronen Leitern erreichen können.

Die Theorie der isochronen Leiter ist in dem Specialfalle (16a) und (16b) unserer Hauptformel enthalten. Ersetzen wir den Ausdruck $(\mathfrak{A}/8\pi)^2 X^6$ durch K, so wird:

$$I\gamma\delta(\gamma+\delta)=K. \tag{25a}$$

Bei isochronen Leitern bleibt der Integraleffect der Resonatorschwingungen multiplicirt mit der Summe und dem Product der logarithmischen Decremente der beiden Leiter constant.

Diese Eigenschaft benutzen wir in folgender Weise:

Es sei wieder Y die Scalenablesung, welche dem Integraleffecte der Resonatorschwingungen proportional ist. Wird die geometrische Configuration der beiden Leiter und die Intensität der Oscillatorerregungen ungeändert gelassen, während man das logarithmische Decrement des einen Leiters von δ zu δ_1 verändert, und beobachtet man dabei die Scalenablesungen Y und Y_1, so besteht die Relation:

$$Y\gamma\delta(\gamma+\delta)=Y_1\gamma\delta_1(\gamma+\delta_1). \tag{25b}$$

40. Die erwünschte Aenderung der Dämpfung ohne Configurationsveränderung des Leiters erreicht man leicht durch Austausch des Leitungsdrahtes des Leiters mit einem zweiten von gleichen Dimensionen, welcher anderen Widerstand oder andere Magnetisirbarkeit hat. Dabei tritt allerdings immer noch eine kleine Aenderung der Schwingungsdauer ein. Am besten benutzt man nur Versuche, wo diese Aenderung

unmerkbar ist. Liegt aber eine merkbare Aenderung der Schwingungsdauer vor, sodass der veränderliche Leiter von der Schwingungsdauer X auf die Schwingungsdauer X_1 zur Wiederherstellung des Isochronismus verstellt werden muss, so kann man nach den Sätzen des § 26 zu der Schwingungsdauer X zurückcorrigiren. Ist Y_1 die Ablesung bei der zu grossen Schwingungsdauer X_1, so ist das corrigirte Y, welches in (25b) einzuführen ist:

$$Y = Y_1 \left(1 - 5 \frac{X_1 - X}{X}\right) \tag{26a}$$

im Falle der electrometrischen Messungen, und

$$Y = Y_1 \left(1 - 3 \frac{X_1 - X}{X}\right) \tag{26b}$$

im Falle der magnetischen oder thermischen Messungen.

41. Bei der Aufstellung der Gleichung (25a) ist der Correctionsfactor (15a)

$$1 + \frac{\gamma}{2\pi} \sin 2\alpha$$

nicht berücksichtigt. Hier ist γ das logarithmische Decrement des primären Leiters, woraus folgt, dass die Vernachlässigung keinen Einfluss hat, wenn man γ constant lässt, und also die Aenderungen der Dämpfung im secundären Leiter vornimmt. Macht man die Aenderung im primären Leiter, so hängt es von dem Werth der unbekannten Grösse α ab, inwieweit der Correctionsfactor Bedeutung erhält oder nicht. Setzen wir den ungünstigsten Fall voraus, dass $\alpha = \pi/4$, so muss der Zuwachs des logarithmischen Decrementes dividirt durch 2π neben der Einheit eine kleine Grösse sein.

Die Gleichungen (25) für isochrone Leiter sind also gültig unter den folgenden Bedingungen:

Werden die Abänderungen der Dämpfung im Resonator vorgenommen, so gilt die Gleichung, so lange $(\omega/2\pi)^2$ neben der Einheit klein ist.

Werden die Abänderungen im primären Leiter vorgenommen, so muss ausserdem beachtet werden, dass

$$\frac{\gamma_1 - \gamma}{2\pi} \sin 2\alpha$$

neben der Einheit klein ist, wo $\gamma_1 - \gamma$ den Zusatz zum logarithmischen Decremente des Oscillators bedeutet.

42. Beachtet man die so erwähnten Vorsichtsmaasregeln, so kann man durch successive Aenderungen der Decremente γ und δ beliebig viele Gleichungen von der Form (25b) erhalten. Dabei muss man aber genau beachten, ob alle Gleichungen voneinander unabhängig sind: man wird immer finden, dass im günstigsten Falle die Zahl der unbekannten Grössen um eins die Zahl der voneinander unabhängigen Gleichungen übersteigt.

Die Versuche mit isochronen Leitern genügen also auch nicht allein für die Bestimmung der logarithmischen Decremente der Leiter: zu den Gleichungen der Form (25) muss immer wenigstens eine in anderer Weise gefundene Beziehung gefügt werden. Man kann in mehrfacher Weise diese Beziehungen erhalten und somit eine grössere Anzahl mehr oder weniger verwandter Methoden zur Bestimmung der logarithmischen Decremente ausbilden.

X. Bestimmung der logarithmischen Decremente ausschliesslich durch Resonanzversuche.

43. Die in theoretischer Hinsicht allgemeinste Methode zur Bestimmung der logarithmischen Decremente ergiebt sich aus der Combination der Resonanzcurvenversuche und der Versuche mit isochronen Leitern.

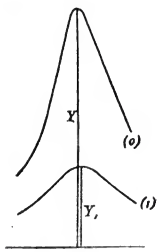


Fig. 5.

Man mache also folgende Versuche: Man bestimmt die Resonanzcurve (*0*) Fig. 5, welche zwei Leiter geben, deren logarithmische Decremente γ und δ sein sollen. Man vergrössert die Dämpfung des einen Leiters von δ auf δ_1 und bestimmt die neue Resonanzcurve (*1*), welche immer kleinere Ordinaten als (*0*) haben wird. Nach den Regeln des § 37 bestimmt man die Parameter X, Y, ω, X_1, Y_1, ω_1 der beiden Curven (*0*) und (*1*). Eventuell wird man X_1 ein wenig grösser als X finden und führt deshalb nach einer der Formeln (26) die entsprechende Correction an Y_1 aus. Da es auf die relativen Höhen der Ordinaten Y und Y_1 besonders ankommt, so ist ein Vergleich derselben durch nachträgliche Versuche, sobald die gehörigen Schwingungsdauern X und X_1 bestimmt sind, besonders zu

empfehlen. Zur Bestimmung der zwei logarithmischen Decremente γ und δ und des Hülfsdecrementes δ_1 ergeben sich dann die drei folgenden linearen Gleichungen, deren letzte aus der Gleichung (25b) der isochronen Leiter hervorgegangen ist:

$$\text{(27a)} \qquad \begin{cases} \gamma + \delta = 2\,\omega \\ \gamma + \delta_1 = 2\,\omega_1 \\ \Gamma\omega\,\delta = \Gamma_1\,\omega_1\,\delta_1 \end{cases}$$

Diese Gleichungen geben durch Auflösung:

$$\text{(27b)} \qquad \begin{cases} \gamma = 2\,\dfrac{\Gamma\omega^2 - \Gamma_1\,\omega_1^2}{\Gamma\omega - \Gamma_1\,\omega_1} \\ \delta = 2\,\Gamma_1\,\omega_1\,\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{\Gamma\omega - \Gamma_1\,\omega_1} \\ \delta_1 = 2\,\Gamma\omega\,\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{\Gamma\omega - \Gamma_1\,\omega_1} \end{cases}$$

44. Diese Methode ist am zuverlässigsten, wenn γ und δ ungefähr von derselben Grössenordnung sind. Man braucht dann nur dafür zu sorgen, dass die Differenz $\omega_1 - \omega$ nicht allzu klein neben ω sei, oder dass die Vergrösserung $\delta_1 - \delta$ von der Grössenordnung ω sei.

Ist aber δ sehr klein neben γ, so kann man δ auf den vielfachen Werth δ_1 vergrössern und folglich Γ auf den vielmal kleineren Werth Γ_1 verkleinern, ohne eine erhebliche Differenz $\omega_1 - \omega$ zu erhalten. Sind somit ω_1 und ω innerhalb der Fehlergrenze gleich, so besagen die Gleichungen (27b), dass man innerhalb der Fehlergrenze $\gamma = 2\,\omega$ setzen darf, und dass δ und δ_1 unbestimmbar, aber neben γ klein sind. Ob dieser Fall vorliegt, lässt sich sofort aus der Form der Resonanzcurven ersehen. Reducirt man nämlich die Ordinaten der einen Curve, sodass sie, wie die Curven der Fig. 4, gleich hohe Isochronitätsordinaten erhalten, so gibt sich dieser Fall dadurch zu erkennen, dass beide Curven (*0*) und (*1*) gleich stumpf sind.

Ist umgekehrt δ sehr gross neben γ, und δ_1 durch Vergrösserung von δ entstanden, so erreicht man leicht eine messbare Differenz $\omega_1 - \omega$. In diesem Falle wird sich aber die dritte Gleichung (27a) auf $\Gamma\omega^2 = \Gamma_1\,\omega_1^2$ reduciren, wonach die erste Gleichung (27b) $\gamma = 0$ gibt; das heisst: γ ist neben δ und δ_1 klein und unbestimmbar, während die zwei ersten

Gleichungen (27a) die Näherungswerthe $\delta = 2\omega$, $\delta_1 = 2\omega_1$ für die zwei grossen Decremente geben.

Diese zwei illusorischen Fälle müssen natürlich vor allem vermieden werden, was immer gelingen wird, wenn man nach der folgenden Regel fortgeht:

Man bildet das Hülfsdecrement δ_1 durch Vergrösserung des kleinsten oder durch Verkleinerung des grössten Decrementes um einen Betrag von der Grössenordnung ω.

XI. Bestimmung der logarithmischen Decremente durch Messung der Widerstände der Leitungsdrähte und Resonanzversuche mit isochronen Leitern.

45. Unter den Ursachen der Dämpfung gibt es eine, deren Gesetze schon nach der alten Electrodynamik bekannt sind: die Umwandlung der electromagnetischen Energie in Joule'sche Wärme. Erreicht man die Abänderung der Dämpfung durch Austausch von Drähten mit bekannten Widerständen, so kann man die Dämpfungsdifferenzen berechnen nach den bekannten Formeln der alten Electrodynamik, und dadurch die nothwendigen supplementären Relationen zu den Gleichungen der isochronen Leiter hinzufügen.

Bezeichnen wir durch Index *I* denjenigen Theil des Decrementes, welcher durch die Entwickelung Joule'scher Wärme bedingt ist, durch Index *II* denjenigen Theil, welcher auf andere Ursachen, wie das Ausstrahlen von Hertz'schen Wellen, zurückzuführen ist. Dann ist

$$\delta = \delta_{II} + \delta_I.$$

Sind alle secundären Ursachen der Dämpfung vermieden, wie z. B. Entladungen in der Luft oder Bildung von Kathodenstrahlen, so wird δ_{II} das in § 3 erwähnte Hertz'sche *Decrement.* Ist nun der Zuwachs beim Uebergang zum Decremente δ_1 nur auf einen Zuwachs des Joule'schen Decrementes zu schreiben, so ist

$$\delta_1 = \delta_{II} + \delta'_I$$

und also wird die Differenz

$$\eta = \delta_1 - \delta = \delta'_I - \delta_I \tag{28a}$$

der Berechnung zugänglich, wenn man die Joule'schen Decremente δ_I und δ'_I berechnen kann.

46. Was die Berechnung der Joule'schen Decremente betrifft, werden wir nur die Formeln citiren, welche in den einfachsten Fällen zur Verwendung kommen.

Besteht der Leiter aus zwei durch eine lineare Leitung verbundenen Armaturen, so gibt die Thomson'sche Theorie der electrischen Schwingungen den folgenden Werth des Joule'schen Decrementes

$$\delta_I = \frac{R X}{2 L}, \tag{29a}$$

wo X wie oben die Schwingungsdauer, L der Selbstinductionscoefficient und R der Widerstand des Drahtes sind.[1]) Durch die Formel $X = 2\pi\sqrt{LC}$, wo C die Capacität bedeutet, kann man eine der Grössen L oder X elimiriren, um nur die eventuell bekannten oder leicht bestimmbaren Grössen in den Formeln zu haben.

47. Behalten wir die Form (29a) bei, so muss erst der Selbstinductionscoefficient berechnet werden. Diese Berechnung vereinfacht sich dadurch, dass man meistens den Strom als vollkommen oberflächlich ansehen darf. Die Berechnung scheint aber mit unseren jetzigen Kenntnissen nur praktisch durchführbar, wenn der Stromkreis fast geschlossen ist, weil nur dann der Einfluss der Verschiebungsströme im Dielectricum vernachlässigt werden darf.[2]) Die fast geschlossene Form, die man meistens dem secundären und jetzt auch mehr und mehr dem primären Leiter gibt, ist also in diesem Falle vortheilhaft.

Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die Berechnung des Selbstinductionscoefficienten exact oder in beliebiger Annäherung durchführbar. Hat z. B. die Drahtleitung die Form eines ebenen Polygon, so führt die Berechnung des Kraft-

1) Hr. Drude gibt diese Formel, nach Einsetzen der Werthe von R und L als das logarithmische Decrement eines geschlossenen Resonators an, indem er das Hertz'sche Decrement verschwindend annimmt (Physik des Aethers p. 477; Wied. Ann. **53.** p. 427. 1894). Dies ist jedoch, wie in der Einleitung bemerkt, nur dann richtig, wenn der Resonatordraht sehr grossen Widerstand hat. Die Uebereinstimmung der Drude'schen Formel mit dem unrichtigen, von mir früher angegebenen Decremente 0,002 beruht auf einem sonderbaren Zufall.

2) Vgl. Poincaré, Les oscillations électriques, Chap. II.

stromes durch die vom Polygon begrenzte Fläche auf äusserst einfache Integrale; und die Berechnung für den Fall einer beliebigen ebenen krummlinigen Drahtleitung ist mit beliebiger Annäherung durchführbar. Ist der Leitungsdraht kreisförmig, der Fall, welcher natürlich das grösste Interesse darbietet, so ist nach Stefan [1])

$$L = 2\,l \log \mathrm{nat} \frac{4}{\pi e^2} \frac{l}{\varrho}, \tag{29b}$$

wo l die Drahtlänge ist, ϱ der Radius des Drahtquerschnittes und π und e die zwei transcendenten Zahlen.

48. Bei unendlichen Schwingnngszahlen ist der Strom streng oberflächlich, der Widerstand unendlich. Die Veränderungen, welche die Werthe der Selbstinductionen und des Widerstandes infolge eines endlichen aber kleinen Eindringens des Stromes erleiden, kann man nach Formeln von Lord Rayleigh und Stefan berechnen. Nach Lord Rayleigh berechnen wir erst die Grösse [2])

$$P = \sqrt{\pi r \mu l X} \tag{29c}$$

wo r der Widerstand gegen constanten Strom, μ die magnetische Permeabilität, l die Länge des Drahtes und X die Schwingungsdauer ist.

Ist nun L der Grenzwerth des Selbstinductionscoefficienten bei streng oberflächlicher Stromvertheilung, so wird der corrigirte Werth L_C

$$L_C = L + \frac{1}{2\pi} P. \tag{29d}$$

Und der Widerstand des Drahtes wird:

$$R = \frac{P}{X} + \frac{r}{4}. \tag{29e}$$

Das letzte Glied $r/4$, wodurch Stefan [3]) die ursprüngliche Formel von Lord Rayleigh ergänzt hat, erweitert bedeutend das Gültigkeitsbereich der Formel für den Fall, dass X oder r sehr gross, oder der Drahtdurchmesser ϱ sehr klein ist.

In diesen Formeln ist die Anwendung des absoluten Maass-

1) Stefan, Wied. Ann. **41.** p. 405. 1890.
2) Rayleigh, Philosophical Magazine **21.** p. 390. 1886.
3) Stefan, Wied. Ann. **41.** p. 411. 1890.

systemes voraussetzt. Als eine praktische Regel, um das Rechnen mit Potenzen von 10 zu vermeiden, kann man aber in den Formeln (29) r und R nach Ohm und X nach Tausendmilliontelsecunden rechnen.

49. Hat man somit nach (29a) drei Joule'sche Decremente δ_I, δ'_I und δ''_I berechnet, und die Differenzen derselben η und η_1 (28b), und hat man die drei entsprechenden Versuche mit isochronen Leitern gemacht, so bestehen die folgenden vier Gleichungen

$$(30) \quad \begin{cases} Y\delta(\gamma+\delta) = Y_1\delta_1(\gamma+\delta_1) = Y_2\delta_2(\gamma+\delta_2) \\ \delta_1 - \delta = \eta_1 \qquad \delta_2 - \delta = \eta_2, \end{cases}$$

woraus man die zwei ursprünglichen Decremente γ und δ, und die zwei Hülfsdecremente δ_1 und δ_2 findet.

Eine Discussion wie diejenige des § 54 wird zeigen, dass die Gleichungen (30) illusorische Resultate geben, wenn die drei Decremente δ einer anderen Grössenordnung angehören als das γ. Also:

Will man nach (30) die Bestimmung aller Decremente erreichen, so muss man die Regel des § 44 befolgen.

50. Ein wichtiger Gegensatz besteht aber zwischen den Gleichungssystemen (27) und (30). In (27) war es das kleine Decrement, welches sich der Bestimmung entzog, und man fand einfach das grosse als

$$(31a) \qquad \gamma = 2\omega.$$

Setzen wir aber in (30) voraus, dass sowohl δ als δ_1 neben γ klein sind, so reducirt sich die erste Gleichung angenähert auf $Y\delta = Y_1\delta_1$, und durch Einführung von $\delta_1 = \delta + \eta$ findet man:

$$(31b) \qquad \delta = \eta \frac{Y_1}{Y - Y_1}.$$

Hier fällt also das grosse Decrement aus den Gleichungen fort, und man erreicht die Bestimmung des kleinsten Decrementes in äusserst einfacher Weise. Also: *Sind die zwei Leiter an Dämpfung sehr verschieden, so bestimmt man am einfachsten das grosse Decrement aus einer einzigen Resonanzcurve (31a) das kleine mittelst Formel (31b) nach der Widerstandsmethode.*

XII. Symmetrische Resonanzversuche.

51. Oben sind die zwei einfachsten Methoden beschrieben, welche jede für sich oder beide combinirt zu der Bestimmung der logarithmischen Decremente der zwei Leiter führen können. Wenn es darauf ankommt möglichst sichere und scharfe Bestimmungen zu erhalten, empfiehlt es sich diese Versuche in symmetrischer Weise auszuführen.

Die einfachste Gruppe symmetrischer Versuche mit isochronen Leitern ist die folgende: die Leiter haben ursprünglich die zwei Decremente γ und δ und der dabei erhaltene Electrometerausschlag sei Y_{00}; man behält γ unverändert, vergrössert das Decrement δ auf δ_1, und findet den Electrometerausschlag Y_{01}; man lässt umgekehrt δ ungeändert, verändert γ auf γ_1 und findet den Electrometerausschlag Y_{10}; endlich vergrössert man die beiden Decremente auf γ_1 und δ_1 und findet den Ausschlag Y_{11}. Die Gleichung der isochronen Leiter gibt dann für diese Versuchsreihe

$$(32\,a)\quad \begin{cases} Y_{00}\,\gamma\,\delta(\gamma+\delta) = Y_{01}\,\gamma\,\delta_1(\gamma+\delta_1) = Y_{10}\,\gamma_1\,\delta(\gamma_1+\delta) \\ \qquad\qquad = Y_{11}\,\gamma_1\,\delta_1(\gamma_1+\delta_1). \end{cases}$$

Dies gibt drei Gleichungen zwischen den vier unbekannten. Durch zweckmässige Elimination kann man drei Gleichungen vierten Grades ableiten zur Bestimmung bez. der Verhältnisse γ/γ_1, δ/δ_1 und γ/δ.

Zur Bestimmung sämmtlicher unbekannten ist nur eine Hülfsgleichung nothwendig. Durch eine durchgeführte Symmetrie der Versuche kann man leicht weiter erreichen, dass der Zuwachs $\gamma_1 - \gamma$ gleich $\delta_1 - \delta$ ist also

$$(32\,b)\qquad \gamma_1 - \gamma = \delta_1 - \delta.$$

Schon die vier Gleichungen (32a) und (32b) genügen also zu der Bestimmung der vier Unbekannten. Nur insofern wird diese Bestimmung etwas beschwerlich, als sie auf der Auflösung von Gleichungen höheren Grades führt, welche jedoch leicht gelingt, wenn man nach Einsetzen der Zahlenwerthe der Grössen Y, die bekannten Regeln für das Auflösen numerischer Gleichungen anwendet.

52. Denken wir uns nun weiter die Versuche insofern vervollständigt, dass die vier den Combinationen $\gamma\,\delta$, $\gamma\,\delta_1$, $\gamma_1\,\delta$,

$\gamma_1 \delta_1$ entsprechenden Resonanzcurven experimentell bestimmt sind, und durch Ausmessen derselben die vier mittleren logarithmischen Decremente ω_{00}, ω_{01}, ω_{10}, ω_{11} gefunden. Wir können dann die folgenden vier Gleichungen aufschreiben

$$\text{(32c)} \qquad \begin{cases} \gamma + \delta = 2\,\omega_{00} \\ \gamma + \delta_1 = 2\,\omega_{01} \\ \gamma_1 + \delta = 2\,\omega_{10} \\ \gamma_1 + \delta_1 = 2\,\omega_{11}. \end{cases}$$

Sehen wir vorläufig von der Symmetriegleichung (32b) ab, so stellen (32a) und (32c) sieben Gleichungen dar zwischen unseren vier Unbekannten. Von diesen sieben Gleichungen sind aber nur fünf voneinander unabhängig. Man kann zwei Beziehungen zwischen bekannten Grössen ableiten, nämlich

$$\text{(33a)} \qquad \begin{gathered} \omega_{00} + \omega_{11} = \omega_{01} + \omega_{10} \\ Y_{00}\, Y_{11}\, \omega_{00}\, \omega_{11} = Y_{01}\, Y_{10}\, \omega_{01}\, \omega_{10} \end{gathered}$$

Diese Gleichungen sind in zwei Beziehungen wichtig: Sie geben vorerst ein werthvolles Kriterium dafür ab, ob die hier entwickelte Theorie mit der Erfahrung übereinstimmt. Ist diese Uebereinstimmung einmal bestätigt, so haben die Gleichungen (33a) dadurch eine grosse praktische Bedeutung, dass man sie verwenden kann, um das Beobachtungsmaterial zu verbessern, ehe man die Werthe der beobachteten Grössen in diejenigen Gleichungen einführt, welche zur Bestimmung der Unbekannten verwendet werden.

Besteht nun zugleich die Symmetriebeziehung (32b), so findet man noch eine Beziehung zwischen bekannten Grössen, nämlich

$$\text{(33b)} \qquad \omega_{01} = \omega_{10}.$$

Endlich kann man noch die Versuche in der Weise vervollständigen, dass man durch Messung der Widerstände die Differenzen $\gamma_1 - \gamma$ und $\delta_1 - \delta$ bestimmt, sodass man zu den vorhergehenden Gleichungen noch die zwei folgenden fügen kann

$$\text{(32d)} \qquad \begin{cases} \gamma_1 - \gamma = \eta \\ \delta_1 - \delta = \zeta, \end{cases}$$

wo, je nachdem die Symmetriebedingung (32b) erfüllt ist oder nicht, η und ζ einander gleich oder ungleich sind.

53. Führt man die Versuche nach diesem Plane aus, so wird man einerseits eine scharfe Prüfung der Uebereinstimmung der hier vorgeschlagenen Theorie mit der Erfahrung erreichen können. Andererseits wird die Combination aller dieser Versuche als Resultat die möglichst wahrscheinlichen Werthe von den gesuchten logarithmischen Decrementen geben. In der Berechnung verfolgt man am besten den folgenden Weg:

Erst benutzt man alle zwischen bekannten Grössen bestehenden Gleichungen zu einer Verbesserung des Beobachtungsmaterials. Dann kann man aus den voneinander unabhängigen Gleichungen vier auswählen, welche nach den gesuchten unbekannten linear sind, wie es nach den Vorgängen in den Abschnitten X oder XI immer möglich ist. Diese Gleichungen geben dann Annäherungswerthe für die vier unbekannten. Die Verbesserung dieser Annäherungswerthe bei der gleichzeitigen Berücksichtigung sämmtlicher voneinander unabhängigen Gleichungen kann nachher in bekannter Weise auf die Auflösung von nur linearen Gleichungen zurückgeführt werden.

XII. Absolute Messungen.

54. Alle oben entwickelte Methoden beruhen auf der Vergleichung von Electrometerausschlägen untereinander, also auf relativen Messungen. Dadurch haben wir angenäherte Bestimmungen sämmtlicher innerer Constanten unserer Leiter gewonnen. Es fehlt nur die Bestimmung der zwei äusseren Constanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$, von welchen uns nur $\mathfrak{A}$ interessirt. Die Bestimmung dieses Parameters, des Intentitätsfactors, lässt sich erst durchführen, wenn man den absoluten Werth der Ausschläge des Electrometers oder des benutzten Messinstrumentes kennt.

Es sei c die Electrometerconstante; da wir das Instrument als ein idiostatisches Electrometer benutzen, so ist die Beziehung zwischen dem constanten Potentialunterschied V und dem Electrometerausschlag y

$$V^2 = c\,y.$$

Nun wird bei unseren Versuchen der Electrometerausschlag y durch den Impuls I des schwankenden Potentialunterschiedes

φ erzeugt; die Constante c kommt aber ausserhalb des Integralzeichens, sodass wir die Beziehung

$$I = cy$$

erhalten zwischen dem Integraleffest und dem Electrometerausschlag. Meistens beobachtet man in der Praxis nicht den Ausschlag für einen einzigen Integraleffect, sondern für eine Anzahl p solcher Effecte in der Stunde — einen für jeden primären Funken. Schreiben wir also $C = c/p$, so ist

$$I = Cy, \tag{34a}$$

wo C die Electrometerconstante dividirt durch die Anzahl der Erregungen des Oscillators in der Secunde ist. Kennt man den Werth von C und hat man nach den oben gegebenen Methoden alle Grössen bestimmt, welche in den Ausdruck von I eingehen, bis auf den Intensitätsfactor $\mathfrak{A}$, so gestattet diese Gleichung die Bestimmung von $\mathfrak{A}$.

Am einfachsten benutzt man den Fall des Isochronismus. Man findet dann, indem man nach $\mathfrak{A}$ auflöst:

$$\mathfrak{A} = 8\pi\left(1 - \tfrac{1}{2}\tfrac{\gamma}{2\pi}\sin 2\mathfrak{a}\right)\sqrt{\gamma\,\delta(\gamma+\delta)\,C\,Y}\,.\,X^{-5/2}. \tag{34b}$$

Dieser Fall ist der einzige, dem wir begegnet sind, wo der unbekannte Parameter $\mathfrak{a}$ grössere Bedeutung erhält, indem die Vernachlässigung desselben Fehler erster Ordnung in dem Werth von $\mathfrak{A}$ hervorbringen mag. In diesem Falle wird es deshalb besonders vortheilhaft sein, eine solche Aufstellung zu wählen, dass man den Werth von $\mathfrak{a}$ voraussehen kann. Dies ist in zwei Fällen möglich: in genügender Nähe des Oscillators muss $\mathfrak{a} = \pi/2$ sein, wie es die Thomson'sche Theorie der electrischen Schwingungen lehrt. In genügend grossem Abstand vom Oscillator darf man dagegen $\mathfrak{a} = 0$ setzen. Ist einer von diesen Fällen realisirt, so ist einfach

$$\mathfrak{A} = 8\pi\sqrt{\gamma\,\delta(\gamma+\delta)\,C\,Y}\,.\,X^{-5/2} \tag{34c}$$

wo rechts nur bekannte Grössen vorkommen.

XIV. Zur Theorie der Funkenbeobachtungen.

55. Man sieht sofort ein, dass man mit Hülfe der Formel (9a) eine Gleichung aufstellen kann, welche der Gleichung (25b) analog ist, und welche die Gleichung der isochronen Leiter

für den Fall der Funkenbeobachtungen darstellt. Durch Funkenmessungen bei Resonanz in Verbindung mit Widerstandsmessungen wird man deshalb, nach Analogie mit der in Abschnitt XI dargestellten Methode, die Bestimmung der logarithmischen Decremente beider Leiter erreichen können, obwohl man auf mathemathisch weniger bequeme Gleichungen kommt.

56. Schwieriger ist aber die Theorie der Resonanzcurve. Um diese Theorie möglichst analog der electrometrischen Resonanzcurventheorie zu erhalten, wollen wir als Ordinaten *die Quadrate* der Funkenpotentiale wählen.

Betrachten wir erst den Fall, dass die beiden Dämpfungen gleich sind. Die Formel (10) gibt dann den Werth des Funkenpotentiales M_m. In der Nähe des Isochronismus kann der Ausdruck von M_m^2 einigermaassen angenähert durch die folgende einfachere Formel dargestellt werden.

$$M_m^2 = \frac{\mathfrak{A}^2}{4\,m^2}\,\frac{1}{e^2\,(\theta\,\mu)^2 + n^2}, \tag{35}$$

wo θ eine Constante ist, welcher man etwa den Werth 1,8 geben kann. Die Formel (35) hat, als Function von n betrachtet, dieselbe Form als die Formel (14). Behandeln wir deshalb (35) nach demselben Schema wie früher die Formel (14), so werden wir erst zu einer Gleichung von der Form (19) und später durch fortgesetzte Vereinfachung zu einer Gleichung von der Form (23) kommen, nur das überall ω durch $\theta\,\omega$ zu ersetzen ist.

Wir können also behaupten, dass die Gleichung der eben definirten Resonanzcurve angenähert in der Form

$$y = Y\frac{(\theta\,\omega)^2\,X^2 + \pi^2\,S(x - X)}{(\theta\,\omega)^2\,X^2 + \pi^2\,(x - X)^2}$$

geschrieben werden kann, und dass die Bestimmung der Parameter X, Y, ω nach der graphischen Methode des § 37 geschehen kann, nur dass die Formel (23c) durch

$$\omega = \frac{\pi}{\theta\,X}\sqrt{\frac{a\,b\,c}{d}} \tag{36a}$$

zu ersetzen ist.

Die Curve (36) ist stumpfer als die entsprechende electrometrische Curve mit demselben Werth von ω. Die Ursache dieses charakteristischen Unterschiedes ist offenbar in der Er-

scheinung der Schwebungen zu suchen. Verlassen wir nun den Fall der gleichen Dämpfung unter Beibehaltung des Werthes von ω, so werden die Schwebungen schwacher, die Curve wird spitzer und man muss in (36) kleinere Werthe von θ wählen, doch nie kleinere als 1, welches dem Falle der electrometrischen Resonanz entspricht. Durch numerische Rechnungen wird man sich überzeugen können, dass man die untere Grenze von θ noch etwa bis zu 1,1 erhöhen kann.

Wir schliessen also folgendes:

Die Gleichung der Resonanzcurve, für die als Ordinaten die Quadrate der secundären Funkenpotentiale verzeichnet werden, kann beiläufig in der Form (36) geschrieben und nach der Regel für die electrometrische Resonanzcurve behandelt werden. Die Grösse θ hängt von dem Unterschied der zwei logarithmischen Decremente ab und liegt etwa zwischen den Grenzen 1,8 und 1,1, wo die obere Grenze im Falle gleicher die untere im Falle sehr verschiedener Dämpfung zu benutzen ist.

57. Verwenden wir diesen Satz auf die von Hertz in seiner ersten Arbeit „Ueber sehr schnelle electrische Schwingungen", Fig 10a[1]) gegebenen Resonanzcurve. Die Schwingungsdauer des Resonators setzen wir proportional der Drahtlänge, und die Funkenpotentiale nehmen wir proportional der Funkenlänge an. Wir zeichnen dann eine neue Curve, deren Ordinaten die Quadrate der Ordinaten der von Hertz angegebenen Curve sind, und finden nach unserer Regel

$$\omega = \frac{1}{\theta}\, 0{,}54,$$

welches für $\theta = 1{,}1$, $\omega = 0{,}5$, für $\theta = 1{,}8$, $\omega = 0{,}3$ gibt. Das mittlere logarithmische Decrement der damaligen Hertz'schen Instrumente ist, also zwischen diesen Grenzwerthen und wahrscheinlich in der Nähe von 0,4 gewesen.

Später erwähnt Hertz, dass Vergrösserung des Widerstandes des Resonators bis auf das hundertfache die Funkenlänge nur sehr wenig beeinflusst hat. Vergleicht man diese Aussage mit den Funkenformeln (9), so schliesst man leicht,

1) Ausbreitung der electrischen Kraft p. 49.

dass das Oscillatordecrement γ gegenüber dem Resonatordecrement δ gross gewesen ist, sodass man γ mit 2ω identificiren und

$$\gamma = 0{,}8$$

als den wahrscheinlichsten Werth des logarithmischen Decrementes des damals von Hertz benutzten Oscillators annehmen kann.

Nimmt man endlich das hundertfache als eine quantitative Angabe an, und setzt man eine zehn- oder zwanzigprocentige Abnahme der Funkenlänge infolge der Widerstandsvergrösserung voraus, so kommt man auf eine untere Grenze des ursprünglichen Resonatordecrementes von der Ordnung 0,01, während wir als obere Grenze haben, dass δ neben γ klein sein soll und somit höchstens etwa $\gamma/10$ oder 0,08. Das Resonatordecrement hat somit wahrscheinlich nach Hundertsteln gezählt.

58. Funkenbeobachtungen können somit zur Orientirung über die Parameter der Instrumente dienen. Für das Gewinnen quantitativer Resultate werden jedoch im allgemeinen die electrometrischen oder die damit verwandten Methoden, deren Theorie wir oben entwickelt haben, vorzuziehen sein, und zwar sowohl aus mathematischen als aus physikalischen Gründen.

Vor allem muss man mit der Verwendung der Funkenmessungen deshalb vorsichtig sein, weil in die Formeln die *Funkenpotentiale* eingehen, während die *Funkenlängen* Gegenstand der Messung sind. Wenn wir wie oben nur die relativen Werthe der Funkenpotentiale brauchen, können grössere Fehler wahrscheinlich nicht verursacht werden. Die absolute Beziehung zwischen Funkenlänge und Potential ist aber nur unter statischen Verhältnissen und nicht für den Fall der secundären Hertz'schen Funken bekannt.[1])

1) *Anmerkung bei der Correctur.* — Nach den sehr bemerkenswerthen Arbeiten des Hrn. Jaumann (Wiener Berichte **97.** p. 765. 1888 und 104 Abth. 2a. p. 7. 1895) auf welche ich eben aufmerksam gemacht worden bin, sind die Eigenschaften der Funken noch viel complicirter, als man sich bis jetzt vorgestellt hat, und die Funkenpotentiale sind nicht einmal unter statischen Verhältnissen sicher bekannt. Um so weniger darf es überraschen, dass die Funkenmessungen unter Benutzung der gewöhnlichen Tabellen der Funkenpotentiale so unrichtige Werthe der Resonatordämpfung gegeben haben (vgl. Einleitung § 3)

Die wichtigste Verwendung unserer Funkenformeln wird deshalb die Aufsuchung dieser Beziehung sein: wenn man nach der electrometrischen Methode sämmtliche Parameter des Oscillators und des Resonators bestimmt hat, inclusive des Intensitätsfactors $\mathfrak{A}$, werden die Formeln (9) unmittelbar die Funkenpotentiale geben. Die in der Einleitung erwähnte *Funkenträgheit* wird man in dieser Weise erschöpfend untersuchen können.

XV. Schluss.

Die Aufgabe, welche wir uns in der Einleitung gestellt, ist also mit Hülfe von Funkenmessungen schwer durchführbar. Für den Fall der electrometrischen oder verwandten Beobachtungsmethoden ist sie aber vollständig gelöst, und zwar genügen, glaube ich, die gegebenen Methoden, die Parameter der Hertz'schen Leiter zu finden, allen Ansprüchen, welche man an Einfachheit stellen kann. Die auszuführenden physikalischen und mathematischen Operationen sind die folgenden:

1. Als einziger vorbereitender Versuch calibrirt man den einen Leiter, welcher an Form veränderlich ist, in Bezug auf die Schwingungsdauer durch Messen von Wellenlängen.

2. Man misst den Electrometerausschlag im Resonator bei verschiedenen Schwingungsdauern des veränderlichen Leiters (welcher der Resonator selbst oder der Oscillator sein kann). Man verzeichnet die Schwingungsdauern als Abscissen und die Electrometerausschläge als Ordinaten und findet durch die in § 37 angegebene Construction die Schwingungsdauer X des constanten Leiters, den entsprechenden Electrometerausschlag Y und den Mittelwerth ω der logarithmischen Decremente beider Leiter.

3. Man wiederholt diesen Versuch, nachdem man in dem einen Leiter den Leitungsdraht durch einen Draht von gleichen Dimensionen aber aus einem anderen Metalle ersetzt hat, und leitet aus der neuen Resonanzcurve angenähert dasselbe X, aber ein neues Y und ω ab. Durch Einsetzen dieser Werthe in die Gleichung (27) findet man die gesuchten logarithmischen Decremente γ und δ sammt dem Hülfsdecrement δ_1.

4. Man kann nacheinander drei Leitungsdrähte von gleichen Dimensionen benutzen, aus den Formeln (29) die durch Wärmeentwickelung verursachten Decremente berechnen und drei Elecrometerausschläge Y, Y_1, Y_2 bei Isochronismus abmessen. Durch Einsetzen dieser Grössen in die Gleichungen (30) findet man die logarithmischen Decremente γ und δ, und die zwei Hülfsdecremente δ_1 und δ_2. .

5. Sind die zwei Decremente sehr verschieden, so kann man das grössere aus einer einzigen Resonanzcurve finden, Formel (31 a), das kleinere aus einem einzigen Specialfall der Methode 4, Formel (31 b).

6. Nachdem X, γ und δ gefunden sind, findet man aus einem der gemessenen Electrometerausschläge Y den Werth des Intensitätsfactors $\mathfrak{A}$ nach Formel (34 c), sofern man die Electrometerconstante C bestimmt hat.

9. *Ueber ein aperiodisches, magnet- und nachwirkungsfreies Quadrantelectrometer; von W. Hallwachs.*

(Aus den Nachr. d. k. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, math.-physik. Klasse. 1895. Heft 1.)

Bei einem früher beschriebenen Quadrantelectrometer[1]) waren zwar die bedeutenden Fehler, welche Flüssigkeitsdämpfungen in diesen Apparaten hervorrufen, beseitigt und ausserdem constante Empfindlichkeit erzielt worden, aber das Instrument hatte noch eine unbequem geringe Dämpfung ($k = 3{,}6$), und der Aufhängedraht war nicht genügend nachwirkungsfrei. Aus dem letzteren Grund traten Fehler von 0,2 Proc. der Potentiale bei Doppelschaltung auf, wenn man nicht besondere, etwas zeitraubende Correctionen für die elastische Nachwirkung anbrachte. Beide Uebelstände sind inzwischen beseitigt worden.

Anfänglich versuchte ich magnetische Dämpfungen, welche ja in vielen Formen im Quadrantelectrometer in Gebrauch sind[2]); fand es aber für störend, dass durch dieselben das Electrometer seiner schätzenswerthen Eigenschaft, keine magnetischen Wirkungen nach aussen auszuüben und eventuell von dort zu empfangen, beraubt wird. Ersteres tritt bei festliegenden Magneten, letzteres bei festliegendem Dämpfer und beweglichen Magneten ein. Eine Luftdämpfung[3]) wäre deshalb

1) W. Hallwachs, Wied. Ann. **29.** p. 1. 1886.

2) Donati, Mem. di Bologna (2) **15.** p. 95. 1876; (4) **8.** p. 327—353. 1888; Rendic. di Bologna p. 92—94. 1886/7; J. Carpentier, Compt. rend. **104.** p. 1694. 1887; Gerard, Lum. él. **25.** p. 117. 1887; F. Himstedt, Wied. Ann. **50.** p. 752. 1893; Hr. Himstedt beschreibt ein Electrometer, in welchem mehrere Nadeln zur Anwendung kommen und verweist darauf, dass Hr. Guglielmo, (Nuovo Cim. **29.** 1891) diese Anordnung zuerst gebraucht habe. Historisch möge bemerkt werden, dass ein vielzelliges Electrometer von Thomson schon länger vielfach im Gebrauch ist, (Electrician **24.** 6. 1889). Uebrigens hat Hr. Guglielmo schon früher eine zweite Nadel angewendet (Riv. Scient. Industr. 1887).

3) A. Töpler, Pogg. Ann. **149.** p. 416. 1873.

vorzuzieheu. Es gelang eine solche so einzurichten, dass sie die Electrometerbeobachtungen nicht beeinflusst, indem sowohl der Flügel als auch das Gefäss der Dämpfung dauernd mit der Electrometernadel in leitende Verbindung gebracht wurden.

Die Dämpfung ist regulirbar, der Aperiodicität lässt sich je nach Bedürfniss beliebig nahe kommen.

Ein auch für genauere Messungen genügend nachwirkungsfreier Aufhängedraht aus Platin kam mir gelegentlich specifischer Gewichtsbestimmungen[1]) in die Hände, als gerade Versuche mit versilberten Glas- und Quarzfäden beim Electrometer stattfanden. Letztere haben für manche electrometrische Methoden einen zu hohen Leitungswiderstand. Der erwähnte Platindraht war in dieser Richtung besser, auch nicht so zerbrechlich. Dass sich derselbe als fast völlig nachwirkungsfrei erwies, werden im Folgenden mitgetheilte Beobachtungen erweisen.

Das unter Anwendung der Luftdämpfung construirte Electrometer mit dem neuen Aufhängedraht gestattet Potentialdifferenzen mit einer Genauigkeit von wenigen Zehntausendsteln zu vergleichen. Das Instrument arbeitet dabei wegen der grossen Dämpfung sehr bequem. Es ist auch für Pendelschwingungen sehr gut gedämpft, sodass die in einer verkehrsreichen Stadt oft sehr störenden Erschütterungen nur sehr geringen Einfluss gewinnen. In dem hiesigen Institut können mit Galvanometern wegen der genannten und der magnetischen Störungen genauere Beobachtungen über Tag nur selten ausgeführt werden, mit dem Electrometer jederzeit, gleichzeitige Beobachtungen mit beiden Instrumenten liessen diesen Unterschied sehr hervortreten.

Beschreibung des Instruments.

(Vgl. Fig. 1.)

Das messende Drehmoment wird von einem von Hrn. Heräus bezogenen, $^1/_{40}$ mm dicken Platindraht geliefert, welcher in einer Doppelhülle aus Silber und Kupfer gezogen ist. Kleine Federklemmen mit Ring fassen die Enden des Drahtes. Die obere Federklemme steckt in einer Hülse des Aufhängestiftes *a*

1) F. Kohlrausch u. W. Hallwachs, Wied. Ann. **53.** p. 14. 1894.

federnd fest, die untere trägt ein Doppelypsilon *b* zum Anhängen des Nadelhalters *c*.

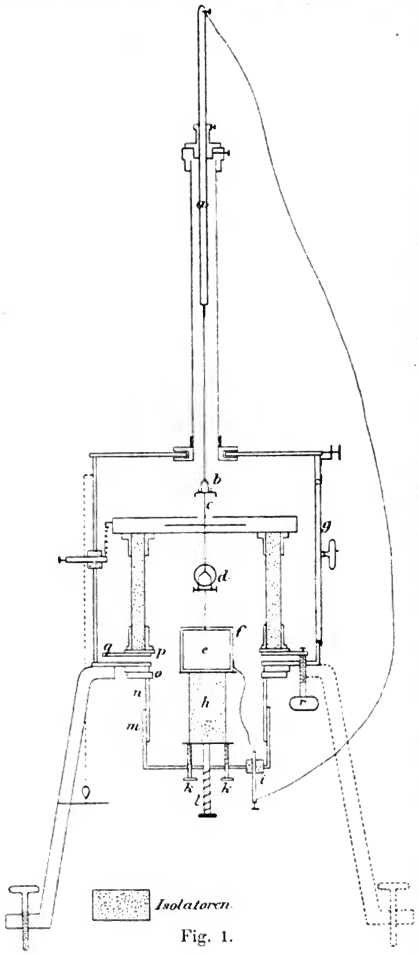


Fig. 1.

Der Aufhängestift kann sowohl drehend als vertical verstellt werden, er besitzt eine erhebliche Länge, um je nach der gewünschten Empfindlichkeit mit Drahtlängen von 10—30cm benutzt werden zu können. Oben endigt er in einer Klemmschraube für die Leitung zur Nadel. Der ihn tragende Torsionskopf ist zur Verbesserung der Isolation unter Vermittelung einer dickeren Schellackschicht auf das Suspensionsrohr aufgekittet.

An dem erwähnten Nadelhalter *c* ist die aus 0,06—0,08mm dickem Aluminiumblech bestehende Nadel so befestigt, dass sie bequem losgenommen und eventuell

für grössere Empfindlichkeit mit einer grösseren Nadel vertauscht werden kann. Zwei schwarze Striche, welche der Symmetrieaxe der Nadel folgen, erleichtern die Orientirung derselben.

Das untere Ende des Nadelhalters trägt wieder ein Doppelypsilon *d*, in welches der Halter des rechteckigen, aus dünnem Aluminiumblech bestehenden Dämpferflügeln *e* eingehängt ist. Letzterer schwebt im Innern eines parallelepipedischen Dämpferkästchens *f* mit verstellbaren Querwänden. Zum Verstellen dienen Schrauben aussen am Kästchen, welche nach Oeffnen der Thür *g* im Gehäuse ohne Aenderung der Orientirung des Apparates gehandhabt werden können. Auf dem gleichen Wege lassen sich die Deckel des Dämpfers entfernen und aufsetzen. Um zu verhindern, dass durch die Dämpfung ein Drehmoment auftritt, erhalten Flügel und Kästchen gleiches Potential und zwar das der Nadel, sodass auf den dann ganz umhüllten Flügel keine Kräfte ausgeübt werden. Der Flügel steht zu diesem Zwecke mit der Nadel direct in metallischer Verbindung, das Kästchen ruht auf einem in Paraffin gekochten und schellackirten Hartgummicylinder *h* und ist durch einen isolirt das Dämpfergehäuse bei *i* durchdringenden Draht aussen herum mit dem Aufhängestift *a* verbunden. Zur richtigen Orientirung des Dämpferkästchens dienen erstens drei Stellschrauben *k*, welche im Boden des vor Luftströmungen schützenden Dämpfergehäuses laufend die Bodenplatte des Hartgummicylinders *h* tragen. Sie besorgen die erforderlichen Neigungen gegen die Verticale, bez. die Einstellung in dieselbe. Die von ihnen getragene Platte wird durch eine Feder *l* gegengepresst, damit beim Platzwechsel keine Verrückungen eintreten. Zweitens gestattet eine federnde Rohrverschiebung *m* des Dämpfergehäuses Verticalverschiebungen und Drehungen auszuführen. Das Rohr *n*, über welches sich das Gehäuse schiebt, sitzt an seinem oberen Ende an einem System von zwei Ringen *o* fest. Diese sind an der Bodenplatte des eigentlichen Electrometergehäuses horizontal verschiebbar befestigt und lassen sich auch gegeneinander so verschieben, damit das Kästchen drittens auch in der Horizontalebene geeignet eingestellt werden kann. Beide Verschiebungen werden durch Schrauben ausgeführt, ihre Richtungen stehen senkrecht aufeinander. [1])

1) Bei einigen neueren Instrumenten ist die Horizontalverschiebung am Boden des Dämpfer- statt des Electrometergehäuses angebracht.

Drei hohe, schräg stehende Füsse halten die Bodenplatte des Electrometers, wobei das Dämpfergehäuse bequem zugänglich bleibt. Sie tragen an ihren Enden Stellschrauben für den ganzen Apparat.

Damit die Orientirung der Quadranten gegen die Nadel auch nach erfolgter Einstellung der Luftdämpfung ausführbar bleibt, muss der Quadrantenkreis zu drehen, etwas auf- und abwärts zu schieben und etwas gegen die Horizontalebene zu neigen sein. Zu diesem Zwecke stehen die Quadrantenfüsse auf einem ebenen Messingring p, der sich in einem zweiten Ring q drehen lässt. Letzterer ruht auf drei in der Bodenplatte laufenden Stellschrauben r mit Haltung an dem Ring. Die centrale Oeffnung beider Ringe ist genügend gross, um die Dämpfungsvorrichtung hindurch zu lassen und die erforderlichen Horizontalverschiebungen derselben zu gestatten. Der Dämpfer ragt über die Ringe genügend weit heraus, um die freie Handhabung der Querwandregulirung zu ermöglichen.

Die Construction der übrigen Electrometertheile ist im wesentlichen wie früher[1]) geblieben.

Das Instrument wird von Hrn. Mechaniker Stieberitz, Dresden A., Josephinenstrasse 22, hergestellt.

Beobachtungsbelege.

Bei den folgenden Versuchen hatte der Aufhängedraht eine Länge von 12 cm und die kleinere Nadel kam zur Anwendung. Ein Theil der Versuche ist mit einem Dämpfungsverhältniss von 300—500 ausgeführt, ein anderer mit einem solchen von 24—33. Die Dämpfung wächst mit den Ausschlägen, der grösste angegebene Werth gilt für Ausschläge von Ende zu Ende, der andere für sehr kleine.

Für die geringere Dämpfung betrug die Schwingungsdauer 11 Secunden, für die grössere 15.

Bei Quadrantschaltung mit 140 Volt Nadelpotential und 2000 Scalentheilen Abstand liefert ein Volt 140 Scalentheile commutirten Ausschlag. Durch Einhängen eines längeren Drahtes und der grösseren Nadel kann die Empfindlichkeit etwa vervierfacht werden; zur Verringerung derselben wird ein dickerer Draht eingezogen.

1) W. Hallwachs, Wied. Ann. **29.** p. 27. 1886.

Zur Orientirung über die Genauigkeit des Instrumentes mögen folgende Beobachtungsreihen bei verschiedener Schaltungsweise desselben dienen.

1. Versuche bei Doppelschaltung. Eine Serie von Potentialdifferenzen wurde erst bei steigenden und unmittelbar anschliessend bei fallenden Werthen angelegt. Zur Definition derselben dienten gleichzeitige Messungen mittels Galvanometer und Variometer. Das Galvanometer lag in einem Stromkreis mit sehr grossen Widerständen, von deren Enden zum Electrometer abgezweigt wurde.

Bei dem früheren Electrometer hatte sich ergeben, dass bei einer entsprechend angeordneten Versuchsreihe (l. c. p. 32) die aus den Ausschlägen berechneten Potentiale bei steigender Serie etwa um 0,2 Proc. kleiner waren wie bei fallender. Nur durch etwas umständliche Correctionen für elastische Nachwirkung liessen sich die Differenzen auf $^1/_{3000}$ herabbringen. Letztere Genauigkeit liefert das jetzige Instrument für die directen Ablesungen ohne Nachwirkungscorrectionen.

Folgende beiden Versuchsreihenpaare mögen zum Beweis dienen. Beim ersten Paar wurde zwischen zwei Potentialen zur Erde abgeleitet, beim zweiten folgte Ablenkung unmittelbar auf Ablenkung. Einen systematischen Unterschied der Ausschläge führte dies, wie die Tabelle zeigt, nicht herbei, woraus hervorgeht, dass elastische Nachwirkung nicht stört. Des besseren Vergleichs wegen ist die Tabelle angeordnet wie früher (l. c. p. 32).

Electrometer-ausschläge		Daraus berechnetes Potential in Volt		Differenzen in Proc. des Potentials
Reihe I	Reihe II	Reihe I	Reihe II	
↑ 943,55	943,30	↑ 46,627	46,621	+ 0,013
852,70	852,25	44,293	44,281	+ 0,026
766,05	766,20	41,955	41,960	− 0,010
607,00	607,25	37,292	37,299	− 0,019
466,10	465,80	32,635	32,624	+ 0,034
239,35	↓ 239,30	23,32	↓ 23,32	+ 0,00
Reihe III	Reihe IV	Reihe III	Reihe IV	
943,20	↑ 943,00	46,618	↑ 46,614	+ 0,010
852,75	852,55	44,294	44,289	+ 0,012
766,20	766,15	41,960	41,958	+ 0,003
607,10	607,20	37,295	37,298	− 0,008
466,25	466,20	32,639	32,639	+ 0,002
239.05	239,05	23,30	23,30	+ 0,000
↓ 86,65	86,60	↓ 13,99	13,98	+ 0,03

Vergleicht man mit den Beobachtungen am früheren Instrument, so ergiebt sich, dass die Differenzen auf etwa den 17. Theil und auch dann, wenn man die früheren für Nachwirkung corrigirten Werthe nimmt, auf die Hälfte bis ein Drittel gesunken sind.

2. Versuche bei Nadelschaltung.

Auch bei dieser bleibt, wie die folgenden Versuche zeigen, die grosse Schärfe der Beobachtung bestehen. Da die Temperatur der angewendeten Elemente bei diesen Bestimmungen sehr constant war, und dann, wie vielfach beobachtet wurde, deren electromotorische Kraft sehr constant bleibt, konnte von einer galvanometrischen Controlle der Potentiale abgesehen werden.

Nadelpotential	Steigend		Fallend	
	Einstellungen	Doppelausschläge	Einstellungen	Doppelausschläge
Null	497,3		497,3	
−1 Clark	566,3	138,5	566,3	138,4
+ „	427,8	138,4	427,9	138,4
− „	566,2	138,5	566,3	138,45
+ „	427,7	**138,47**	427,85	**138,42**
Null	497,2		497,2	
−1 Accumulator	593,8	194,2	593,9	194,2
+ „	399,6	194,2	399,7	194,2
− „	593,8	194,1	593,9	194,2
+ „	399,7	**194,17**	399,7	**194,20**
Null	497,2		497,2	
−2 Accumulatoren	689,1	389,0	689,1	389,0
+ „	300,1	389,0	300,1	389,0
− „	689,1	389,0	689,1	389,0
+ „	300,1	**389,00**	300,1	**389,00**
Null	497,2		497,3	
−3 Accumulatoren	784,1	585,4	784,1	585,35
+ „	198,7	585,4	198,75	585,35
− „	784,1	585,4	784,1	585,35
+ „	198,7	**585,40**	198,75	**585,35**
Null	497,2		497,3	
−(3 Acc. + 1 Trockenelement)	855,1	734,1	855,15	734,08
+ „	121,0	734,1	121,1	734,0
− „	855,1	734,05	855,1	734,0
+ „	121,05	**734,08**	121,1	**734,02**
Null	497,2		497,2	

Die Quadranten erhielten ihre entgegengesetzt gleichen Potentiale von etwa $\pm$ 70 Volt durch eine Spamerbatterie. Da jedes Potential zweimal angelegt wurde, lässt sich das Functioniren des Apparates aus den mitgetheilten Einzelablesungen am besten ersehen.

Eine gleichartige Uebereinstimmnng konnte in dem nämlichen Beobachtungsraum bei galvanometrischen Bestimmungen nicht erhalten werden.

3. Versuche bei Quadrantschaltung.

Man könnte fürchten, dass bei Quadrantschaltung, wo die Nadel auf ein beträchtliches Potential geladen wird, die Dämpfungsvorrichtung vielleicht doch Störungen veranlasst. Die folgenden Beobachtungen zeigen, dass dies nicht der Fall ist. Bei denselben erhielt die Nadel durch eine Spamerbatterie eine Ladung auf etwa 140 Volt. Gleiche zu messende Potentialdifferenzen liefern dann grössere Ausschläge wie bei Nadelschaltung unter Anwendung der gleichen Hülfsbatterie.[1])

Zwischen den einzelnen Potentialen wurde nicht abgeleitet. Das Dämpfungsverhältniss besass bei diesen Versuchen einen sehr hohen Werth (400—700), während es bei den vorher mitgetheilten im Mittel gleich 30 war.

An das eine Quadrantenpaar angelegte Elemente	Fallende Reihe		Aufsteigende Reihe	
	Einstellung	Ausschlag	Einstellung	Ausschlag
− 1 Clark	623,9		423,7	
		199,9		199,7
+ „	424,0		623,4	
		199,8		199,9
− „	623,8		423,5	
		199,9		200,0
+ „	423,9		623,5	
		199,87		**199,87**
+ 1 Accumnlator	383,3		664,0	
		280,8		280,7
− „	664,1		383,3	
		280,7		280,7
+ „	383,4		664,0	
		280,7		280,7
− „	664,1		383,3	
		280,73		**280,70**
− 2 Accumulatoren	806,4		244,0	
		562,6		562,6
+ „	243,8		806,6	
		562,6		562,6
− „	806,4		244,0	
		562,5		562,8
+ „	243,9		806,8	
		562,57		**562,67**
+ 3 Accumulatoren	103,5			
		848,2		
− „	951,7			
		848,1		
+ „	103,6			
		848,1		
− „	951,7			
		848,13		

1) Gouy, Journ. de phys. (2) **7**. p. 97—109. 1888; cit nach Beibl. **12**. p. 366. 1888.

4. Alle mitgetheilten Beobachtungen ergeben, dass die elastische Nachwirkung zu gering ist, um einen deutlichen Einfluss auf die Potentialmessung zu gewinnen. Dadurch, dass in auf- und absteigender Serie beobachtet wurde, war günstige Gelegenheit für das Hervortreten der Nachwirkung. Noch günstiger in dieser Richtung sind die im Folgenden beschriebenen Versuche angeordnet, aber selbst bei ihnen bleibt jener Einfluss sehr gering. Sie gestatten ein quantitatives Urtheil über die Grösse der Nachwirkung und zeigen, welche Anordnungen bei Ansprüchen an die grösste, erreichbare Genauigkeit zu vermeiden sind, bez. welche Fehler eventuell vorkommen können, wenn man ganz ohne besondere Vorsicht in dieser Richtung verfährt. Die Fehler bleiben auch dann sehr klein.

Man bewirkte durch ein geeignet kleines Potential einen kleinen Ausschlag und zwar zuerst, wenn vorher das Electrometer längere Zeit auf Null blieb, darauf, wenn vorher längere Zeit ein Ausschlag bis ans Scalenende bestanden hatte. Die Constanz des bei Doppelschaltung angelegten Potentials wurde mit dem Galvanometer controllirt. Im ersten Fall betrug der Ausschlag 71,3 p, erhielt dann das Instrument 6,5 Minuten lang einen Ausschlag von 450 p, so lieferte das Anfangspotential 71,5 p, also nur 0,2 p mehr.

Wurde ferner während 4,5 Minuten die Nadel beim Scalentheil 927 gehalten, dann nach einem kleinen, ähnlichen Potential wie beim vorigen Versuch umgelegt, so ergab sich

in Minuten nach Umlegen	0,3	0,8	1,3	1,8	2,3	2,8	3,3	3,8	4,3
die Einstellung	70,4	70,5	70,4	70,2	70.2	70,0	70,0	70,0	70,0

Nach abermaligem Umlegen zu grösserem Potential war

in Minuten nach Umlegen	0,3	0,8	1,3	1,8	2,3	2,8	3,3	3,8	4,3
die Einstellung	926,9	926,8	926,8	927,0	927,0	927,0	927,1	927,1	927,1

Darauf wurde das Electrometer entladen und lieferte

in Minuten nach Entladen	0,3	2,0	4,0	20
die Einstellung	506,9	506,7	506,7	506,7

Aus diesen und ähnlichen Versuchen ist zu ersehen, dass in solchen Fällen, wo einige Zehntel Scalentheile Fehler zuzulassen sind, selbst mit Dauereinschaltung gearbeitet werden kann.

Wird grössere Genauigkeit erfordert, so kann das Instrument zwar auch in den Zwischenräumen mit beliebigem Ausschlag stehen bleiben, wenn aber eine Ablesung erfolgen soll, ist ausser dieser unmittelbar darauf der Nullpunkt bez. der commutirte Ausschlag zu ermitteln.

Die folgenden Versuche bei Doppelschaltung mögen zum Beleg dienen. Die angelegten Potentiale wurden galvanometrisch controllirt. In der Tabelle gibt die Spalte „Electrometer-Galvanometer" die Differenzen der mit beiden Instrumenten beobachteten Potentiale in Zehntausendsteln ihres Werthes, wenn bei beiden Instrumenten die Mittelwerthe der Ausschläge als für gleiches Potential entsprechend genommen werden.

Bemerkungen	Commutirte Ausschläge des Galvanom.	Commutirte Ausschläge des Electrom.	Electrom. minus Galvanom.
10 Minuten Electrometer + 420 p Ausschlag			
	797,25	858,7	$+ 2{,}0 \times 10^{-4}$
	797,2	858,6	+ 2,0
	797,1	858,5	+ 2,7
	797,15	858,4	+ 1,5
10 Minuten Electrometer − 440 p Ausschlag			
	796,6	857,4	$+ 3{,}1 \times 10^{-4}$
	796,4	856,8	+ 1,6
	796,4	856,7	+ 1,0
	796,5	856,65	±
10 Minuten Electrometer auf Null			
	796,0	855,5	$- 1{,}5 \times 10^{-4}$
	796,0	855,3	− 2,2
	795,95	855,2	− 1,8
	795,9	855,15	− 1,3

Der Strom, von dessen Kreis das Potential abgezweigt wurde, war bei diesen ziemlich zu Anfang angestellten Versuchen nicht sehr constant zu halten. Bei den anderen mitgetheilten Beobachtungen gelang dies besser. Wie aus der Tabelle ersichtlich ist, ergiebt sich bei der jetzigen Beob-

achtungsart auch nur ein mittlerer Fehler von 2×10^{-4}, sodass also, auch wenn grössere Genauigkeit erfordert wird, das Electrometer von beliebiger Anfangseinstellung aus in der angegebenen Weise benutzt werden kann.

Schalter für Electrometerbeobachtungen.

Bei Electrometerbeobachtungen habe ich einen Schalter bequem gefunden, der sowohl die bei jeder Schaltungsweise des Electrometers erforderlichen Commutirungen und Ableitungen vorzunehmen als auch die verschiedenen Schaltungsarten des Electrometers ohne viel Umstände nacheinander

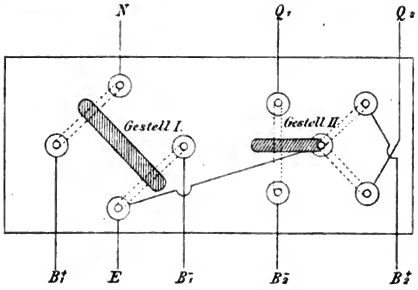


Fig. 2.

einzurichten gestattet. Es möge gestattet sein, die Vorrichtung kurz zu beschreiben.

Eine Schellackplatte, welche auf ein Brett gekittet ist, trägt neun etwas eingeschmolzene, mit Quecksilber gefüllte eiserne Näpfchen in der Anordnung der Fig. 2. In dieselben tauchen die Enden von Kupferblechstreifen, welche sich an der Napfwand federnd festklemmen. Ueber ihre äusseren Enden sind Klemmschrauben geschoben.

N, Q_1, Q_2 werden mit der Nadel und den Quadrantenpaaren des Electrometers verbunden, E mit der Erde; B_1^+, B_1^-, und B_2^+, B_2^- mit den Punkten, deren Potentialdifferenz zu bestimmen ist und den Enden der allenfalls angewendeten Hülfsbatterie. Der Napf rechts in der Mitte steht durch einen nach E führenden Draht auch mit der Erde in Verbindung.

Combinationen von Drahtbügeln, welche an geeigneten Schellackstäbcheu mit Schellackhaltern sitzen, vermitteln die Verbindnngen. Vier Drahtgestelle sind im Ganzen erforderlich.

1. Die Zeichnung veranschaulicht die Anordnung bei Quadrantschaltung (Gestell I und II). An den beiden B_1 liegen die Enden der Hülfsbatterie für die Nadelladung, an den beiden B_2 die Punkte, deren Potentialdifferenz zu bestimmen ist. Das Vorzeichen der letzteren kann in ersichtlicher Weise gewechselt werden, auch lassen sich die Quadranten vertauschen.

2. Bei Doppelschaltung bleiben die B_1 frei. Ein einfacher Bügel (III) verbindet die Näpfe N und E. Von den B_2 führen wieder Leitungen zu der zu messenden Potentialdifferenz, rechts wird dasselbe Gestell (II) wie unter 1. angewendet. Zum Ableiten der Quadranten dient nach Entfernung von (II) ein Gestell (IV) mit drei Zinken, welche in Q_1, Q_2 und den Mittelnapf eintauchen.

3. Bei Nadelschaltung kommt die zu messende Potentialdifferenz an die beiden B_1, und diesmal wird (II) links verwendet, (I) rechts. Die Enden der Hülfsbatterie liegen an B_2, ihre Mitte ist mit E verbunden.

4. Bei der Nadelorientirung[1]) verbindet (IV) rechts die beiden Quadranten mit Erde, links stellt (I) die Verbindung der Nadel mit den an den B_1 sitzenden Enden der Hülfsbatterie her. Durch Umlegen wird das Vorzeichen des Nadelpotentials vertauscht. Zum Ableiten der Nadel dient (III).

Zusammensetzen und Orientiren des Electrometers.

Das Instrument ist so eingerichtet, dass die einmal vorgenommene Orientirung auch beim Verbringen auf einen anderen Platz erhalten bleibt. Es braucht nur die Nadel arretirt und am neuen Platz ein Senkel mit Hülfe der Fussschrauben des Instruments eingestellt und die Arretirung wieder gelöst zu werden.

Die Arretirung findet statt durch Heben der Quadranten mittels ihrer drei Stellschrauben bis zum Aufliegen der Nadel, bez. noch etwas weiter bis zum Beginn des in die Höheziehens

1) Hallwachs, Wied. Ann. **29.** p. 13. 1886.

der Luftdämpferdeckel durch den Flügel. Beim Lösen der Arretirung werden die drei Schrauben wieder in ihre ursprüngliche an einer Marke ablesbare Stellung zurückgedreht. Die Einhängungen des Nadelhalters und Dämpferflügels hängen sich beim Arretiren nicht aus und kehren beim Lösen in ihre ursprüngliche Lage zurück.

Beim erstmaligen Zusammensetzen und Orientiren des Instruments wird folgendermaassen verfahren. Die Deckplatte, der bewegliche Quadrant und die ganze Luftdämpfung sind abgenommen, die Quadrantenstellschrauben bis zur Mitte eingedreht, um spätere Regulirung in jeder Richtung zu ermöglichen.

Die Nadel wird an den Nadelhalter angeschraubt, diese sammt dem daran hängenden Dämpferflügel gelangen dann von oben ins Instrument, die Nadel kommt auf die Unterfläche der Quadranten zu liegen. Nach dem Aufsetzen der Deckplatte wird der obere Drahthalter in den Aufhängestift (*a* Fig. 1) eingeschoben, der Draht in die Suspensionsröhre gebracht und bis zum Nadelhalter herabgelassen. Man hängt dann die Nadel an und zieht den Draht soweit hoch, dass die Nadel inmitten der Quadranten hängt und der Spiegel nach dem Beobachtungsfenster weist.

Mittels der Fussschrauben erhält das Instrument die am Senkel erkennbare verticale Lage.

Nachdem die Quadranten mit Hülfe ihrer Stellschrauben der Nadel angenähert parallel gestellt sind, wird die Deckplatte so gerückt, dass der Mittelpunkt der Nadel im Centrum der Quadranten hängt.

Man schiebt nun die Luftdämpfung von unten auf und gibt dem Dämpferkästchen mittels der früher erwähnten Orientirungsvorrichtungen eine solche Lage, dass der Flügel frei schwebt. Da sich von oben in das Kästchen hineinsehen lässt, können die Querwände leicht dem Flügel parallel gestellt werden. Die ersteren sind dann geeignet einander zu nähern und die Dämpferdeckel aufzusetzen.

Eine feinere Parallelstellung der Quadranten zur Nadel gelangt nun zur Ausführung und der vierte Quadrant kommt darauf an seine Stelle. Durch Drehen des Quadrantenkreises erhält der eine Quadrantenspalt zur Symmetrieaxe der Nadel parallele Lage.

Die letzte Orientirung der Quadranten bezüglich der Nadel geschieht dann mit Hülfe der früher angegebenen electrischen Verfahren.

Beim Einziehen eines neuen Aufhängedrahtes wird das gewählte Stück in die Drahtklemmen geklemmt und dann erst nach Auflegen auf einen Glasstreifen die Drahthülle von der Mitte aus bis nicht ganz an die Enden durch Betupfen mit Salpetersäure entfernt.[1])

Dresden, Weihnachtsferien 1894/5.

---

1) Zeigt der Draht eine halbe Stunde nach dem Entweichen noch Nullpunktswanderung, so ist er in einer Kerzenflamme auszuglühen.

10. *Ueber eine neue Methode zur experimentellen Bestimmung des specifischen Gewichtes von gesättigten Dämpfen;* von *Gustav Bauer.*

(Hierzu Tafel II Fig. 1—5.)

Man benützt im allgemeinen zwei Methoden zur Festsetzung des Zusammenhanges zwischen Druck und specifischem Gewicht von gesättigten Dämpfen; erstens die directe experimentelle Bestimmung, zweitens die Berechnung desselben aus der Dampfwärme mit Hülfe der sogenannten Clapeyron'schen Gleichung.

Bezeichnet man mit p den Druck in Kilogrammen pro Quadratcentimeter, mit u die Differenz der specifischen Volumina von Dampf (s) und Flüssigkeit (σ), mit r die Dampfwärme, mit t die Temperatur in Celsiusgraden, mit T die absolute Temperatur, mit A das Wärmeäquivalent, so lautet die Clapeyron'sche Gleichung:

$$\frac{r}{u} = A\,T\frac{dp}{dt}. \tag{1}$$

Da die Gleichung

$$s = u + \sigma$$

das specifische Volumen des Dampfes angiebt, wenn σ bekannt und u aus der obigen Gleichung berechnet ist, so gibt diese ein Mittel, das specifische Gewicht des Dampfes

$$\gamma = \frac{1}{\sigma}$$

zu bestimmen.

Da die mit Hülfe der beiden genannten Methoden ermittelten Werthe von γ wesentliche Abweichungen voneinander zeigen, sei es mir gestattet, zunächst auf eine Vergleichung der bisher erhaltenen Resultate für den in technischer Beziehung wichtigsten Wasserdampf einzugehen.

1. Berechnung des specifischen Gewichtes aus der Dampfwärme.

Die Dampfwärme r wurde schon von Watt, Rumford, Despretz, Brix und Sonthern für Wasser bestimmt; aber erst die experimentellen Untersuchungen Regnault's ermöglichten es, eine empirische Formel aufzustellen, welche in zuverlässiger Weise die Dampfwärme innerhalb weiter Temperaturgrenzen zu bestimmen erlaubt.

Die aus Regnault's Versuchen für Wasserdampf abgeleiteten Beziehungen lauten[1]):

Gesammtwärme:

$$\lambda = 606{,}5 + 0{,}305\, t;$$

innere latente Dampfwärme:

$$\varrho = 575{,}4 - 0{,}791\, t;$$

Flüssigkeitswärme:

$$q = t + 0{,}00002\, t^2 + 0{,}0000003\, t^3;$$

Dampfwärme:

$$r = \lambda - q = 606{,}5 - 0{,}695\, t - 0{,}00002\, t^2 - 0{,}0000003\, t^3;$$

äussere latente Wärme:

$$A p u = \lambda - q - \varrho = 31{,}1 + 0{,}096\, t - 0{,}00002\, t^2 - 0{,}0000003\, t^3.$$

Diese empirischen Formeln wurden aus der experimentell bestimmten Dampfwärme r mittels der Clapeyron'schen Formel abgeleitet.

Die Grösse u ergiebt sich aus der Beziehung

$$\frac{A p u}{A p} = u = s - \sigma,$$

woraus dann

$$s = u + \sigma$$

und

$$\gamma = \frac{1}{u + \sigma}$$

gefunden werden kann.

Zeuner hat die Regnault'schen Angaben zur Bestimmung der Werthe von γ benutzt und gibt diese in seiner „Technischen Thermodynamik" an. Diesen Berechnungen wurde ein Wärme-

1) Vgl. Zeuner, Technische Thermodynamik. 2. Tab. 11*.

äquivalent $A = 1/424$ zu Grunde gelegt; die den Temperaturen entsprechenden Sättigungsdrucke wurden ebenfalls nach Regnault's Untersuchungen bestimmt.

Die verschiedenen Werthe von γ fasst Zeuner zusammen in die Formel:

(1) $$\gamma = 0{,}6061\, p^{0{,}9393}.$$

Hierbei bedeutet γ das specifische Gewicht in Kilogrammen pro Cubikmeter und p Atmosphären von 760 mm Quecksilbersäule.

Rechnet man diese Formel um, sodass γ Gramme pro Cubikmeter und p Millimeter Quecksilbersäule bedeuten, so findet man:

(2) $$\gamma = 1{,}1929\, p^{0{,}9393}.$$

Die von Zeuner gefundenen Werthe hat Fliegener[1]) umgerechnet für Atmosphären zu 10 000 kg pro Quadratmeter oder 735,51 mm Quecksilbersäule. Doch hat er das Wärmeäpuivalent

$$A = \frac{1}{436}$$

angenommen, indem er diese wie die anderen zur Berechnung seiner Tabelle benutzten Constanten, den Untersuchungen Regnault's[2]) folgend, einführte.

Fliegener erhält also:

$$u' = \frac{A\,p\,u}{A\,p \cdot \frac{424}{436}} = u \cdot \frac{436}{424},$$

wenn u und $A\,p\,u$ die von Zeuner angegebenen Werthe besitzen.

Hieraus folgt:

$$\gamma' = \frac{1}{u' + \sigma} = \frac{1}{u\,\frac{436}{424} + \sigma}.$$

Da nun σ im Verhältniss zu u sehr klein ist (σ beträgt für nicht zu hohe Pressungen kaum $1/1000$ von u), so kann man angenähert setzen

$$\gamma' = \frac{424}{436}\,\gamma = 0{,}973\,\gamma,$$

1) Fliegener, Civilingenieur 20. p. 442.

2) Regnault, Memoires de l'academie des sciences XXXII.

sodass die Zeuner'sche Formel, berechnet mit $A = (1/436)$, für p in Millimeter Quecksilber und in γ in Gramm pro Cubikmeter, übergehen würde in:

(3) $$\gamma = 1{,}1608\, p^{0{,}9393}.$$

Es wird im Folgenden gezeigt werden, dass sämmtliche directe Messungen Werthe für γ ergaben, welche weit besser mit den Formeln (1) und (2) übereinstimmen als mit (3). Hieraus lässt sich mit ziemlicher Sicherheit schliessen, dass die Annahme des Wärmeäquivalents zu $1/436$ statt zu $1/424$ nicht gerechtfertigt ist.

In der neuesten Zeit wurden von A. Frank[1]) weitere Versuche zur Bestimmung der Dampfwärme des Wassers unternommen, welche bei höheren als atmosphärischen Pressungen Werthe liefern, die stark von den Regnault'schen abweichen. Die Versuchsresultate von Frank lassen sich wiedergeben durch die Formel:

$$\varrho' = 530{,}1 - 0{,}338\, t.$$

Für $t = 100^0$ C. gibt hier ϱ dieselbe Zahl wie die Formel Regnault's für die innere latente Wärme

$$\varrho = 575{,}4 - 0{,}791\, t.$$

Weichen aber die Temperaturen von 100^0 ab, so zeigen sich bald bedeutende Differenzen zwischen beiden Formeln. Diese haben natürlich Einfluss auf die Berechnung von γ.

Nach Frank wird:

$$(A\,p\,u)' = \varrho' \frac{p}{T\frac{dp}{dt} - p},$$

$$u' = \frac{(A\,p\,u)'}{A\,p}.$$

Hierbei ist

$$(A\,p\,u)' = A\,p\,u\,\frac{\varrho'}{\varrho}$$

und also, wenn $\sigma = 0$ gesetzt wird, angenähert

(4) $$\gamma' = \gamma\frac{\varrho}{\varrho'} = \gamma\,\frac{575{,}4 - 0{,}791\,t}{530{,}4 - 0{,}338\,t}.$$

Die in Nr. 7 angeführten Vergleichstabellen geben eine Uebersicht über die Resultate der Formeln (2), (3) und (4).

1) A. Frank, Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure. **35.** p. 979.

Es ist hier noch zu bemerken, dass nach den neuen Untersuchungen, welche H. F. Wiebe[1]) im Auftrage der physikalisch-technischen Reichsanstalt ausgeführt hat, die Zunahme des Druckes mit der Temperatur nicht genau das von Regnault abgeleitete Gesetz befolgt. Wiebe's Versuche sind mit fünfmal so grosser Genauigkeit[2]) ausgeführt als die Regnault's und zeigen gegen die letzteren Abweichungen von ungefähr $^1/_4$ Proc. bei Temperaturen von 70°—80° C.

Es ist z. B. die Spannung des Wasserdampfes bei 76,25°

nach Regnault 304,0 mm

„ Wiebe 304,74 „

Diese Abweichung spielt allerdings bei der rechnerischen Bestimmung des specifischen Gewichtes aus der Dampfwärme keine grosse Rolle; sie weist nur darauf hin, dass die berechneten specifischen Gewichte des Wasserdampfes nicht nur wegen der unsicheren Bestimmung des Wärmeäquivalentes und der Dampfwärme, sondern auch des Zusammenhanges zwischen Druck und Temperatur nur wenig genaue Werthe liefern. Es ist deshalb ungerechtfertigt, diese genauer als auf höchstens 1/1000 des absoluten Werthes anzugeben.

2. Directe experimentelle Bestimmung des Zusammenhanges zwischen Druck und Volumen gesättigter Dämpfe.

Die oben angeführte Beziehung zwischen Druck und Volumen, die Clapeyron'sche Gleichung, erfuhr zuerst für Wasserdampf eine experimentelle Bestätigung durch Untersuchungen von Fairbairn und Tate.[3])

Diese ermittelten aus ihren Versuchen die empirischen Formeln:

$$v = 25{,}62 + \frac{49513}{\frac{p}{25{,}4} + 0{,}72} \tag{1a}$$

und

$$p = 25{,}4 \left\{ \frac{49513}{v - 25{,}62} - 0{,}72 \right\}. \tag{1b}$$

1) H. F. Wiebe, Tafeln über die Spannkraft des Wasserdampfes zwischen 76° und 101,5°.

2) l. c. p. V.

3) Fairbairn u. Tate, Proceedings of the Royal Society. 1860; Philosophical Magazine (4) **21**; Civilingineur, Literatur und Notizblatt 1860.

Dabei ist der Druck in Millimetern Quecksilber und v in Litern pro Cubikmeter gemessen.

Die Gleichung (1a) lässt sich in folgender Weise umgestalten. Sei $\gamma = 1000/v$ das specifische Gewicht des Dampfes in Gramm pro Cubikmeter und p der Druck in Millimetern Quecksilber, so erhält man:

$$(1c) \quad \gamma = 14{,}5 + 0{,}79455\,p - 0{,}0000161\,p^2 + 0{,}000000033\,p^3.$$

Dabei ist zu bemerken, dass für $p < 760$ mm das Glied mit p^3 vollständig vernachlässigt werden kann.

Die procentuelle Abweichung, welche bei den Beobachtungen von Fairbairn und Tate im Vergleich mit den Formeln (1) gemacht wurde, betrug bei Temperaturen unter 100° bis zu 2 Proc., bei Temperaturen über 100° bis zu 3 Proc. Die empirischen Formeln (1) stimmen mit den von Zeuner angegebenen aus r gerechneten Werthen sehr gut überein, wie aus der Vergleichstabelle in Nr. 7 ersichtlich ist.

Später hat Herwig[1]) mittels eines von Wüllner angegebenen Apparates für verschiedene Flüssigkeiten das specifische Gewicht des Dampfes bestimmt. Er fand, dass die Abweichungen der gesättigten Dämpfe vom Mariotte'schen Gesetz für alle Dämpfe bei derselben Temperatur gleich seien.

Wüllner[2]) gibt folgendes, auf Herwig's Versuchen basirendes Gesetz an, welches für die gesättigten Dämpfe aller Flüssigkeiten gültig sein sollte:

$$(2a) \qquad \Delta = \delta \,.\, 0{,}0595 \sqrt{a + t}.$$

Hierbei bedeutet Δ die Dichte des gesättigten Dampfes, $a + t = 273 + t$ seine absolute Temperatur und δ die Dichte des Dampfes unter der Voraussetzung, dass er sich verhält wie ein permanentes Gas.

Bezeichnen wir mit γ das specifische Gewicht des gesättigten Dampfes, mit γ_l das specifische Gewicht der Luft von derselben Temperatur und gleichem Druck, so wird:

$$\frac{\gamma}{\gamma_l} = \delta \,.\, 0{,}0595 \sqrt{a + t}$$

1) Herwig, Pogg. Ann. **137.**
2) Wüllner, Lehrb. der Experimentalphysik **3.** p. 758. 1885.

oder

$$\gamma = \frac{\delta \,.\, 1{,}293 \,.\, p}{760\,\frac{a+t}{a}} \cdot 0{,}0595\,\sqrt{a+t},$$

wobei p der dem Sättigungszustand bei t entsprechende Druck ist.

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\gamma = \frac{1{,}293 \,.\, 273 \,.\, 0{,}0595 \,.\, \delta}{760} \cdot \frac{p}{\sqrt{a+t}}.$$

Man sieht, dass der Factor von $p/\sqrt{a+t}$ für jede bestimmte Flüssigkeit constant ist, da für jede solche δ constant sein muss. Also wird

$$\gamma = C\,\frac{p}{\sqrt{a+t}}.$$

Für Wasser ist $\delta = 0{,}623$, also:

$$\gamma = C\,\frac{p}{\sqrt{a+t}} = 0{,}01722\,\frac{p}{\sqrt{a+t}}. \tag{2b}$$

Nach dieser Formel sind die in der Vergleichstabelle in Nr. 7 angeführten Resultate von Herwig's Formel berechnet. Diese Tabelle zeigt, dass die aus obiger Relation erhaltenen Werthe bedeutend von sämmtlichen auf anderem Wege gewonnenen abweichen, und zwar, dass sie das specifische Gewicht γ zu gross angeben.

Wüllner[1]) hat daraufhin die Herwig'sche Methode modificirt und mit dem abgeänderten Apparat, welcher dem von Fairbairn und Tate benutzten nicht unähnlich ist, folgende Formel experimentell festgestellt:

$$\Delta = 0{,}0536\,\delta\,\sqrt{a+t}, \tag{3a}$$

eine Beziehung, die sich nur durch die Constante von der Herwig'schen (2a) unterscheidet. Diese Gleichung lässt sich, wie die Herwig'sche, auf die Form bringen:

$$\gamma = C\,\frac{p}{\sqrt{a+t}} = 0{,}01551\,\frac{p}{\sqrt{a+t}}. \tag{3b}$$

Die aus dieser Formel erhaltenen Werthe von γ für Pressungen von 500—760 mm Quecksilber finden sich ebenfalls in der Vergleichstabelle in Nr. 7. Man sieht aus der-

1) Wüllner u. Grotrian, Wied. Ann. **11.** p. 545. 1880.

selben, dass die von Wüllner erhaltenen Werthe von γ für Wasserdampf gut mit den von Zeuner berechneten, und den übrigen experimentell gefundenen — mit Ausnahme der von Herwig erhaltenen — übereinstimmen.

3. Ueber die experimentelle Bestimmung des Zusammenhanges zwischen Druck und Volumen gesättigter Dämpfe mittels der „aerostatischen Waage".

In Rücksicht auf die in Nr. 1 und Nr. 2 gezeigten, theilweise bedeutenden Abweichungen der berechneten und direct experimentell bestimmten Werthe von γ zeigte es sich wünschenswerth, eine weitere, von den genannten vollständig verschiedene Methode zur directen Bestimmung von γ zu verwenden.

Hr. Prof. Lommel[1]) hat darauf hingewiesen, dass in derselben Weise wie das specifische Gewicht von Flüssigkeiten mit der *hydrostatischen*, das von gasförmigen Körpern mit der *aerostatischen Waage* bestimmt werden könnte.

Auf diese Thatsache stützt sich auch eine von M. Meslans[2]) zur Bestimmung der Dichte von Gasen angegebene Methode.

Hr. Prof. Lommel gab mir nun den Rath, diese Methode zur Bestimmung des specifischen Gewichtes von gesättigten Dämpfen anzuwenden. Um dies zu ermöglichen, habe ich den im Folgenden beschriebenen Apparat construirt.

Der Apparat.

Dieser bestand im wesentlichen aus einer Waage, deren eine Schale an einem herabhängenden Drahte einen metallenen Ballon trug, und deren andere Schale zum Auflegen von Gewichten bestimmt war. Der Ballon tauchte in ein mit verschiedenen Dämpfen gefülltes Gefäss, und erlitt dadurch einen Gewichtsverlust oder -Zuwachs, durch dessen Messung das specifische Gewicht der Dämpfe sich ergab. Die gesammte Anordnung des Apparates zeigt Fig. 1.

A. Die Waage.

Zur Messung wurde eine kurzarmige Waage benutzt, deren Balkenlänge 25 cm, und deren Tragkraft 400 g betrug. Sie

1) Lommel, Wied. Ann. **27.** p. 144. 1886.
2) M. Meslans, Compt. rend. p. 389. 1893.

stand auf einer kräftigen, an der Wand befestigten Unterlage, welche ebenso wie der Boden des Waagekastens unter der einen Schale durchbohrt war, um den Aufhängedraht des Ballons durchzulassen. Als solcher wurde Neusilber-, Kupfer- und Eisendraht verwendet; es stellte sich heraus, dass letzterer allen Anforderungen am besten entsprach.

B) Der Dampfbehälter (Fig. 2).

Der Dampfkessel, in welchem der zum Versuche nöthige Dampf erzeugt wurde, war aus gedrücktem Kupferblech angefertigt und fasste ungefähr 3 l; das Dampfabflussrohr war durch Conus- und Ueberwurfmutter mit demselben verbunden.

Der eigentliche Dampfbehälter, in welchen bei der Wägung der Ballon eintauchte, bestand aus einem doppelten Cylinder aus 1 mm starkem Messingblech; der innere der beiden Cylinder hatte einen Durchmesser von 12 cm und eine Höhe von 36 cm; der äussere Cylinder war 30 cm hoch und hatte im Durchmesser 22 cm. In der Mitte des Mantels trat der Dampf in den äusseren Cylinder ein (bei *a*); von hier — aus dem ringförmigen Raum zwischen beiden Cylinderflächen — konnte er durch zwei Leitungen, entweder (*b b'*) oben, oder (*c c'*) unten in den inneren Cylinder gelangen. Diese beiden Wege konnten beliebig abgesperrt werden. Aus dem inneren Cylinder konnte der Dampf oben durch *f* und unten durch *e* entweichen, welche Oeffnungen ebenfalls abgeschlossen werden konnten.

Vor den Eintrittsöffnungen *c'* und *b'* waren Schutzbleche angebracht, welche den Dampf nur indirect eintreten liessen, und auf diese Weise sowohl seine Strömungsenergie beeinträchtigten, als auch die mitgerissene Flüssigkeit von ihm trennten.

In den äusseren Cylinder waren ausserdem noch oben und unten Messingrohrstücke eingesetzt. Das eine davon *d d'* diente zum Abzug der in dem ringförmigen Raum condensirten Flüssigkeit und etwa überschüssigen Dampfes, das letztere *k* zur Aufnahme eines Thermometers.

Der Abschluss des inneren Cylinders geschah durch einen Deckel (Fig 3) aus starkem Kupferblech mit Messingrahmen, welch letzterer auf einen breiten Flantsch am inneren Cylinder

luftdicht passte. In der Mitte war der Deckel 2—3 mm weit durchbohrt, um den Aufhängedraht des Ballons durchzulassen. Der Dampf konnte natürlich auch durch diese Oeffnung austreten. Dieser Umstand würde die Wägung beeinträchtigt haben und wurde, wie später angegeben, in verschiedener Weise unschädlich gemacht; jedenfalls aber macht das unvermeidliche Ausströmen des Dampfes an dieser Stelle die Messung bei anderen als atmosphärischen Pressungen mit der hier beschriebenen Modification des Apparates unmöglich. Es soll am Ende des nächsten Abschnittes gezeigt werden, in welcher Weise die aerostatische Waage zur Untersuchung von Dämpfen bei sehr verschiedenen Pressungen benutzt werden kann.

Bei den Versuchen mit Wasserdampf wurde das Rohr *m m'* mit einem Gasschlauch in Verbindung gesetzt, und die bei *m'* austretende kleine Gasflamme erwärmte die Luft über der Oeffnung in der Mitte des Deckels und den Draht, sodass sich kein Wasser auf letzterem niederschlagen konnte. Zugleich hielt die Flamme den Deckel fortwährend warm, und konnte daher keine grössere Ansammlung von Wasser auf demselben stattfinden. Es wird später nachgewiesen werden, dass eine Ueberhitzung des Dampfes dadurch nicht stattfand.

Bei den Untersuchungen für Dämpfe mit niedrigerem Siedepunkt als Wasser war eine Erwärmung des Deckels und Aufhängedrahtes nicht nöthig. Dagegen musste der bei *o* austretende Dampf bei Aether, Chloroform etc. theils wegen seiner Entzündlichkeit, theils wegen des unangenehmen Geruches entfernt werden. Zu diesem Zwecke war an dem Deckel (Fig. 3) ein Rohransatz in der Mitte angebracht, welcher nach der Seite abgebogen war. Der Draht durchdrang das gebogene Rohr und dieses war mit einem Saugapparat in Verbindung gesetzt. Durch diesen konnte ein, wenn auch fast unmessbarer Ueberdruck von aussen gegen das Innere des Rohransatzes hervorgebracht werden, sodass der aus dem inneren Cylinder in den Ansatz tretende Dampf mit Luft gemischt in das Saugrohr gelangte. Dadurch war erreicht, dass ein Austreten des Dampfes ins Freie bei *o* unmöglich war. Durch eine, in die Saugleitung eingeschaltete Woolf'sche Flasche mit gekühlter Oberfläche konnte der entweichende Dampf

wieder condensirt werden, sodass ein Verlust der zu untersuchenden Flüssigkeit bei vorsichtigem Arbeiten nicht entstehen konnte. Auf diese Weise war es möglich mit Chloroform und Aetherdämpfen und selbst mit schwefliger Säure zu arbeiten, ohne durch den Geruch dieser Stoffe im mindesten gestört zu werden. Als Saugapparat fungirte eine Wasserstrahlpumpe, deren Wirkung leicht regulirt werden konnte.

Sowohl der innere als auch der äussere Dampfraum waren mit Oeffnungen zur Anfnahme von Thermometern versehen; ebenso konnten beide Räume mit einem Quecksillbermanometer in Verbindung gesetzt werden. Es zeigte sich, dass niemals mit diesem Instrumente messbare Druckdifferenzen gegen die Atmosphäre vorhanden waren, sodass zur Angabe der Pressungen jedes beliebige, vom Apparat unabhängige, Barometer benutzt werden konnte.

C. Der Ballon.

Ballons aus Glas konnten zur Wägung in Dampf nicht verwendet werden, weil die Gefahr des Zerspringens bei der Erwärmung oder des Zerbrechens beim Einbringen in den Apparat zu bedeutend war.

Es zeigte sich, dass Ballons aus gepresstem Kupferblech allen Anforderungen genügten, und es wurden solche von verschiedenen Formen und Dimensionen benutzt. Die Kugelform erwies sich als unvortheilhaft, da sie zu grosse Cylinderdurchmesser verlangte, und bei gleicher Widerstandsfähigkeit gegen Eindrücken dem aufsteigenden oder herabströmenden Dampf eine grössere Fläche darbot als andere Formen. Am zweckmässigsten zeigten sich mehr oder minder spindelförmige Körper, welche bei grossem Volumen in einem Cylinder von geringem Durchmesser Platz fanden (Fig. 4). Zur Aufhängung trug jeder Ballon oben einen Haken; ausserdem war eine durch konische Schrauben verschliessbare Oeffnung an jedem angebracht, um bei der, zur Volumenbestimmung nothwendigen Wägung in Wasser den Ballon mit Schrot beschweren zu können.

Bei den Versuchen mit Wasserdampf genügte die natürliche Oberfläche des Kupferkörpers; bei den Messungen anderer

Dämpfe zeigte es sich nothwendig, die Oberfläche zu versilbern, da durch chemische Einflüsse das Gewicht derselben während der Messung unter Umständen eine Veränderung erfahren konnte.

4. Die Ausführung des Versuches.

Zunächst wurde die in dem Kessel enthaltene Flüssigkeit zum Sieden gebracht, sodass der Dampf in den äusseren Cylinder überströmen und diesen vorwärmen konnte. Hierbei condensirte sich natürlich ein Theil des Dampfes, der aber durch die Oeffnung *d'* abgezogen werden konnte. Wenn der Cylinder genügend erwärmt war, wurde der Deckel und der Ballon an einer Gasflamme mässig, der Temperatur des Dampfes entsprechend, erhitzt, der Ballon in den Dampfraum gebracht, und der Deckel aufgesetzt.

Während dessen war der innere Cylinder, der den Ballon aufnahm, noch von dem äusseren Dampfraum abgesperrt und der Dampf strömte unterdessen von letzterem aus in einen Condensator, aus welchem er als Flüssigkeit wieder gewonnen wurde. Nach dem Einbringen des Ballons wurde der innere Cylinder mit dem äusseren in Verbindung gesetzt und zwar abwechselnd oben und unten. Nach einiger Zeit war die Luft aus dem Apparat ausgetrieben und das Gewicht des Ballons wurde constant. Zugleich strömte der Dampf abwechselnd oben und unten aus dem inneren Cylinder aus.

Durch die Variation der Strömungsrichtung des Dampfes konnte der Einfluss der Bewegung desselben ermittelt werden; dieser war übrigens nicht erkennbar, ausser wenn die Dampfentwickelung sehr lebhaft war. Am zweckmässigsten erwies es sich bei Dämpfen, deren Dichtigkeit grösser als 1 war, den Dampf zuerst, zur Vertreibung der Luft, rasch durch den Apparat strömen zu lassen, dann aber denselben oben allein ab und oben allein zuströmen zu lassen. Bei dieser Anordnung hing dann der Ballon in einem Raum ruhig stehenden Dampfes und war von der Bewegung der durchströmenden Masse unabhängig.

Wie gesagt, brannte bei den Versuchen mit Wasserdampf während der Wägung aus der Oeffnung *m'* eine kleine Gasflamme, welche die Aufgabe hatte, die Luft über dem Deckel

und diesen selbst zu erwärmen. Dadurch wurde das Herabtropfen von condensirtem Wasser auf den Ballon verhindert. Bei den Untersuchungen anderer Dämpfe genügt es, den Deckel vorzuwärmen.

Eine Ueberhitzung des Dampfes konnte dadurch nicht verursacht werden, denn beim Aufsetzen des Deckels theilte sich die Wärme sofort dem ganzen, gut leitenden Apparate und so der immer in demselben enthaltenen Flüssigkeit mit. Ebenso konnte das Vorwärmen des Ballons eine Ueberhitzung des Dampfes — während der Wägung — nicht zur Folge haben, da der am Anfang des Versuches den Ballon rasch umströmende Dampf bald alle überschüssige Wärme aufgenommen hatte und so die nachfolgenden Dampfmengen gesättigt blieben. Manchmal hängte sich sogar während des Versuches ein Flüssigkeitstropfen an den Ballon an, was sich durch plötzliche Gewichtszunahme desselben erkenntlich machte und natürlich die Messung vereitelte.

Bei einigen Messungen wurde das Vorwärmen des Ballons auch dadurch bewerkstelligt, dass der Druck im Cylinder über den atmosphärischen Druck für kurze Zeit gesteigert wurde. Es nahm dann der Ballon die Temperatur dieses Dampfes von höherer Spannung an, während sich Flüssigkeit auf ihm niederschlug. Wurde dann plötzlich der Druck auf den der Atmosphäre herabgesetzt, so verdampfte die Flüssigkeit auf dem Ballon, und die Wägung konnte vor sich gehen. Da diese umständliche Methode dieselben Resultate lieferte, wie die vorher beschriebene, wurde sie nicht im allgemeinen verwendet; sie gibt nur einen weiteren Beweis, dass das Vorwärmen des Ballons mit der Flamme den Dampf nicht überhitzte.

Der angegebene Apparat konnte auch ohne weiteres dazu benutzt werden, das specifische Gewicht des gesättigten Dampfes von schwefliger Säure zu bestimmen. Zu diesem Zweck wurde der Raum zwischen beiden Cylindern mit einer Kältemischung aus Schnee und Kochsalz gefüllt, wodurch die Temperatur in dem gesammten Apparat erheblich unter die Sättigungstemperatur (ungefähr -12°) der schwefligen Säure bei den betreffenden Drucken sank. Diese strömte aus einer Glasflasche, in welcher sie unter Druck in flüssigem Zustand er-

halten war, zunächst in eine mit Schwefelsäure gefüllte Woolf'sche Flasche, wodurch sie getrocknet wurde und von dort, natürlich überhitzt, in den gekühlten Cylinder. Dort verflüssigte sich der grössere Theil, während der übrige in gesättigtem Zustande den Apparat ausfüllte und nach und nach oben abgesaugt wurde.

Es erübrigt nun noch mitzutheilen, in welcher Weise die beschriebene Methode zur Messung bei sehr verschiedenen (von den Pressungen der Atmosphäre abweichenden) Drucken modificirt werden kann.

Man verwendet dann am besten zur Wägung eine kleine Mohr'sche Waage, bei welcher ein Arm durch ein Gegengewicht an kurzem Hebelarm ersetzt ist, während der andere Arm zur Aufnahme von Reitern (statt der Gewichte) und Tragen des Ballons bestimmt ist. Dieser hängt direct am Ende des Wagebalkens. Das Ganze wird in einen starkwandigen Glaskasten gesetzt, welcher luftdicht verschlossen ist; der Dampf strömt von aussen her in den Kasten ein und durch ein Regulirventil ins Freie. Das Aufsetzen der Reiter geschieht von aussen durch eine mittels Stopfbüchse gedichtete Stange. Das Niederschlagen von Dampf als Flüssigkeit auf der Waage und dem Ballon kann durch vorübergehende Drucksteigerung und nachfolgende Expansion unschädlich gemacht werden. Für die Ausführung von Messungen bei niedrigeren als atmosphärischen Drucken muss der Apparat mit einer Luftpumpe in Verbindung gesetzt werden. Druck und Temperatur können durch Anbringung eines Manometers und von Thermometern leicht controllirt werden. Ich behalte mir vor, diesen Apparat später zu weiteren Versuchen zu benutzen.

Um zunächst die oben beschriebene Methode zu erproben, entschloss ich mich das specifische Gewicht des Wasserdampfes bei verschiedenen atmosphärischen Pressungen zu bestimmen; und ich ermöglichte dies durch Untersuchungen, welche ausser in *München* auch auf höher gelegenen Orten ausgeführt wurden. Als solche wählte ich die meteorologische Station auf dem *Sonnblick* (3105 m) und diejenige am *Wendelstein* (1750 m). Es ist mir eine angenehme Pflicht, an dieser Stelle der *österreichischen meteorologischen Gesellschaft* und besonders Hrn. Prof. Hann für die Liebenswürdigkeit, mit welcher

sie mir durch Ueberlassung der „Gelehrtenstube“ auf dem Sonnblickgipfel meine dortigen Arbeiten ermöglichten, den besten Dank auszusprechen.

5. Die Volumenbestimmung des Ballons.

Die Volumenbestimmung der Ballons geschah durch Messung des Gewichtsverlustes, welchen dieselben bei einer Wägung in Wasser gegenüber einer solchen in Luft erlitten. Bei der Wägung in Wasser wurden die Ballons mit Schrot beschwert.

Die Berechnung des Volumens aus dem Gewichtsverlust wurde mittels der im Folgenden abgeleiteten Formeln ausgeführt.

Sei G das Gewicht des Körpers im luftleeren Raum, V sein Volumen, G_1 sein Gewicht in irgend einer Flüssigkeit vom specifischen Gewicht γ_1, δ das specifische Gewicht der Gewichtsstücke, so ist:

$$G = G_1 - G_1 \frac{\gamma_1}{\delta} + V\gamma_1. \tag{1}$$

In einer zweiten Flüssigkeit, vom specifischen Gewicht γ_2 herrscht Gleichgewicht, wenn:

$$G = G_2 - G_2 \frac{\gamma_1}{\delta} + V\gamma_2, \tag{2}$$

wobei vorausgesetzt ist, dass G_2 wieder das scheinbare Gewicht darstellt, und der Körper *allein* in die Flüssigkeit vom specifischen Gewicht γ_2 eintaucht, während die Gewichtstücke in demselben Raum bleiben wie bei der ersten Wägung.

Durch Subtraction von (1) und (2) ergiebt sich:

$$G_1 - G_2 - (G_1 - G_2)\frac{\gamma_1}{\delta} = V\gamma_1 - V\gamma_2$$

oder, wenn D_1 der gemessene Gewichtsverlust ist:

$$D_1\left(1 - \frac{\gamma_1}{\delta}\right) = V\gamma_1 - V\gamma_2. \tag{3}$$

Sind die Gewichtsstücke mit Luft umgeben, so wird angenähert:

$$\gamma_1 = 0{,}0012,$$

und für Messinggewichte:

$$\delta = 8{,}4,$$

sodass

$$D_1\left(1 - \frac{\gamma_l}{\delta}\right) = D_1\left(1 - \frac{0{,}0012}{8{,}4}\right) = D_1\,(1 - 0{,}00014).$$

Im Folgenden soll $D_1\,(1 - 0{,}00014) = D$ gesetzt werden, wodurch also die Wägungen auf den luftleeren Raum reducirt sind.

Wir haben nun noch die Verschiedenheit des Volumens unseres Körpers infolge der Temperaturdifferenzen zwischen Wasser und Luft in Rechnung zu bringen.

Sei α_1 der cubische Ausdehnungscoefficient des Ballons, t_l die Temperatur, γ_l das specifische Gewicht der Luft, t_ω und γ_ω dieselben Grössen für das Wasser, in welches der Ballon tauchte, so ist:

$$(4) \qquad D = V\{\gamma_\omega(1 + \alpha_1 t_\omega) - \gamma_l(1 + \alpha_1 t_l)\},$$

wobei jetzt unter V das Volumen bei 0^0 gemeint ist.

Diese Gleichung ist nur dann richtig, wenn alle in derselben vorkommenden Gewichte auf dieselbe geographische Breite φ^0 und Meereshöhe z^m reducirt sind. Dies ist der Fall bei γ_ω und γ_l, welche aus Tabellen entnommen seien, in denen diese Grössen auf $\varphi = 45^0$ und $z = 0$ reducirt gegeben sind, nicht aber bei D. Um diese Grösse auf $\varphi = 45^0$ und $z = 0$ zu beziehen, ist sie mit dem Factor [1])

$$(1 - 0{,}0026 \cos 2\varphi)(1 - \beta z)$$

zu multipliciren, wobei die Grösse von β von der Lage des Wägungsortes abhängt.

Somit ist:

$$(5) \quad V(\gamma_\omega(1+\alpha_1 t_\omega) - \gamma_l(1+\alpha_1 t_l)) = D\,(1-0{,}0026\cos 2\varphi)(1-\beta z).$$

Wir haben nun noch das spezifische Gewicht der Luft γ^l genauer zu bestimmen.

Sei p der Barometerstand in Millimeter Quecksilbersäule, reducirt auf 0^0, $\varphi = 45^0$ und $z = 0$ m, so ist [2]):

$$p = p'\,(1 - 0{,}0026 \cos 2\varphi)(1 - \beta z),$$

wenn p' den abgelesenen und dann auf 0^0 reducirten Barometerstand darstellt.

---

1) Sprung, Lehrb. d. Meteorologie. p. 61. 1885.
2) Sprung, Lehrb. d. Meteorologie. p. 47. 1885.

Sei ferner γ das specifische Gewicht der Luft bei 0°, $p_0 = 760$ mm, $\varphi = 45^0$ und $z = 0$, weiter e die Spannung des gesättigten Wasserdampfes bei der Temperatur t_l, k die Luftfeuchtigkeit in Procenten der Sättigung, so ist[1]):

$$\gamma_l = \gamma \frac{\left(p - \frac{0{,}378 \cdot e\,k}{100}\right)}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + \alpha_2 t_l}, \tag{6a}$$

wobei α_2 der Ausdehnungscoefficient der Luft $= {}^1/_{273}$ ist.

Wir erhalten somit folgende Formel für das Volumen des Ballons bei 0°:

$$V = \frac{D(1 - 0{,}0026\cos 2\varphi)(1 - \beta z)}{\gamma_\omega(1 + \alpha_1 t_\omega) - \gamma(1 + \alpha_1 t_l) \cdot \frac{p'(1 - 0{,}0026\cos 2\varphi)(1 - \beta z) - 0{,}378\frac{e \cdot k}{100}}{p_0(1 + \alpha_2 t_l)}} \tag{6}$$

Für mittlere Luftfeuchtigkeiten kann auch die von Kohlrausch[1]) angegebene Formel für das specifische Gewicht der Luft verwendet werden:

$$\gamma_l = \gamma' \frac{p}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + \alpha_3 t_l}, \tag{6b}$$

wobei $\alpha_3 = 0{,}004$ und $\gamma' = 0{,}001295$ zu setzen ist. Für $k = 75$ Proc. stimmt diese Formel vorzüglich mit (6a) überein.

Unter Anwendung von (6b) erhält man für das Volumen des Ballons bei 0° folgende Formel:

$$V = \frac{D(1 - 0{,}0026\cos 2\varphi)(1 - \beta z)}{\gamma_\omega(1 + \alpha_1 t_\omega) - \gamma'(1 + \alpha_1 t_l) \frac{p'(1 - 0{,}0026\cos 2\varphi)(1 - \beta z)}{p_0(1 + \alpha_3 t_l)}} \tag{7}$$

Für *München* war:

$$z = 525 \text{ m}, \quad \beta = 0{,}00000022, \quad \varphi = 48^0\,8'.$$

Also $(1 - 0{,}0026\cos 2\varphi)(1 - \beta z) = 1 + 0{,}000163$.

Dieser Factor erhöht die in *München* abgelesenen Barometerstände durchschnittlich um ${}^1/_{10}$ mm.

Für das *Wendelsteinhaus*:

$$z = 1750 \text{ m}, \quad \beta = 0{,}00000022, \quad \varphi = 47^0\,40'.$$

Also obiger Factor $= 1 - 0{,}00014$.

Dieser erniedrigt die Barometerstände auf dem *Wendelsteinhaus* um ${}^1/_{10}$ mm.

1) F. Kohlrausch, Leitfaden d. prakt. Phys. p. 45. 1887.

Für den *Sonnblickgipfel* war:

$$z = 3105 \text{ m}, \quad \beta = 0{,}00000022, \quad \varphi = 47^\circ 3'.$$

Also $(1 - 0{,}0026 \cos 2\varphi)(1 - \beta z) = 1 - 0{,}0005$.

Dieser Factor erniedrigt die Barometerstände auf dem Sonnblick um ungefähr $^1/_4$ mm.

Als Ausdehnungscoefficient des Kupfers wurde, dem harten Material entsprechend,

$$\alpha = 0{,}000017$$

angenommen. Hieraus ergab sich der cubische Ausdehnungscoefficient der Ballons:

$$\alpha_1 = 3 \,.\, 0{,}000017 = 0{,}000051.$$

Die Luftfeuchtigkeit konnte bei allen Volumenbestimmungen zu $k = 75$ Proc. angenommen werden. Die Abweichungen von dieser Annahme nach oben und unten hatten auf das specifische Gewicht der Luft keinen merklichen Einfluss.

Die folgenden Zahlen geben die Daten zu einer Reihe der gemachten Volumenbestimmungen; diese sind sämmtlich in München ($\varphi = 48^\circ 9'$, $z = 530$ m) ausgeführt.

Volumenbestimmungen.

1. Ballon A [1]) versilbert	2. Ballon A unversilbert	3. Ballon B versilbert	4. Ballon B unversilbert
$D_1 = 677{,}3$ g	676,7	958,0	957,9
$D = 677{,}2$ „	676,6	957,9	957,8
$p = 714{,}4$ mm	714,0	714,4	708,7
$k = 75$ %	75	75	75
$\gamma_l = 0{,}001142$	0,001137	0,001142	0,001120
$t_l = +16{,}0^\circ$	17,0°	16,0°	19,2°
$t_\omega = +12{,}5^\circ$	17,0°	11,5°	12,0°
$\gamma_\omega = 0{,}9995$	0,9988	0,9996	0,9996
$\alpha_1 = 0{,}000051$	0,000051	0,000051	0,000051
$\alpha_3 = 0{,}004$	0,004	0,004	0,004
$V = 678{,}0$ cbcm	677,6	959,0	958,9

1) Mit A und B wurden die beiden zu den Messungen benutzten einander ähnlicher Ballons bezeichnet. Ballon A ist in Fig. 4 dargestellt.

Zur Controlle wurden ausser diesen Volumenbestimmungen noch mehrere weitere ausgeführt, doch stimmten ihre Resultate mit den hier angeführten überein und brauchen deswegen nicht erwähnt zu werden. Es genügte vollkommen, die Volumina auf 10tel cbcm genau zu bestimmen, da bei der Wägung des Ballons in einem Gas von der Dichte 1 durch einen Fehler in der Volumenangabe von $^1/_{10}$ cbcm nur ein Wägungsfehler von $^1/_{10}$ mg verursacht werden konnte.

Da es nur möglich war, den Ballon in den verschiedenen Dämpfen auf 0,5 mg genau zu wägen, waren die Volumenbestimmungen hinreichend genau.

6. Berechnung des specifischen Gewichtes der Dämpfe aus den Versuchsresultaten.

Das specifische Gewicht ergab sich aus der Gewichtsänderung, welche der Ballon bei einer Wägung in Dampf gegenüber einer Wägung in Luft erfuhr.

Sei t_d die Temperatur des gesättigten Dampfes, γ_d sein specifisches Gewicht reducirt auf $\varphi = 45^0$ und $z = 0$ m, so ist mit Beibehaltung der oben eingeführten Bezeichnungen:

Volumen des Ballons in Dampf:

$$V_d = V(1 + \alpha_1 t_d);$$

dasselbe in Luft:

$$V_l = V(1 + \alpha_1 t_l).$$

Also wird, nach Gleichung (5):

$$V\{\gamma_d(1+\alpha_1 t_d) - \gamma_l(1+\alpha_1 t_l)\} = D(1-0{,}0026\cos 2\varphi)(1-\beta z).$$

Da der Dampf leichter oder schwererer sein kann als Luft, so ist zu schreiben:

$$\gamma_d = \frac{V_l \gamma_l \pm D(1 - 0{,}0026\cos 2\varphi)(1 - \beta z)}{V_d}.$$

Da die Luft feucht ist, kann wieder gesetzt werden:

(6a) $$\gamma_l = \gamma \frac{\left(p - \frac{0{,}378\, e k}{100}\right)}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + \alpha_2 t_l},$$

oder

(6b) $$\gamma_l = \gamma' \frac{p}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + \alpha_3 t_l}.$$

Durch Einsetzen dieses Werthes von γ_l sowie der Werthe von p, V_l und V_d ergiebt sich die Formel:

$$(8)\quad \gamma_d = \frac{\gamma'.V(1+\alpha_1 t_l)\frac{p'(1-0{,}0026\cos 2\varphi)(1-\beta z)}{p_0(1+\alpha_3 t_l)} \pm D(1-0{,}0026\cos 2\varphi)(1-\beta z)}{V(1+\alpha_1 t_d)}.$$

Nach dieser Formel wurden die Werthe von γ_d berechnet. Die aus den Wägungen erhaltene Gewichtsdifferenz D_1 konnte bei allen Versuchen $= D$ gesetzt werden, da (Gleichung (3) Nr. 5) der Factor $1 - 0{,}00014$ keinen Einfluss auf die kleinen Gewichtsdifferenzen ausübte.

Auch der Factor von D konnte bei diesen Wägungen $= 1$ gesetzt werden, da selbst bei den schwersten Dämpfen diese Ungenauigkeiten höchstens Fehler von 0,5 mg verursachten.

Wasserdampf.

Beobachtungen in München.

Apparat I.[1]) Ballon *B*. Gültig Volumenbestimmung 4. $\varphi = 48°,9$, $z = 530$ m.

Datum	Barometerstand p red. auf 0° $\varphi = 45°$, $z = 0$	Gewichtsdifferenz D	Temperatur der Luft t_l° C.	Spec. Gew. der Luft γ_l	Volumen des Ballons in Luft	Volumen des Ballons im Dampf	Spec. Gew. des Dampfes $\varphi = 45°$, $z = 0$	Bemerkungen
1894	mm	mg		kg/cbm	cbcm	cbcm	kg/cbcm	
8./5.	719,1	550	16,0°	1,149	959,7	963,7	0,573	Niederschlag auf dem Ballon
10./5.	716,1	535	17,0	1,140	959,7	963,7	0,580	
12./5.	715,4	537	16,2	1,142	959,7	963,7	0,580	
17./5.	716,1	522	19,5	1,129	959,9	963,7	0,583	
17./5.	716,1	520	20,0	1,127	959,9	963,7	0,583	
21./5.	706,3	518	19,6	1,114	959,9	963,7	0,572	
21./5.	706,3	516	20,0	1,112	959,9	963,7	0,572	
22./5.	711,3	527	19,0	1,124	959,8	953,7	0,573	
23./5.	711,6	525	19,0	1,124	959,8	963,7	0,575	
23./5.	718,5	528	19,0	1,135	959,8	963,7	0,583	
25./5.	707,4	518	19,6	1,115	959,9	963,7	0,573	
26./5.	704,0	521	18,5	1,114	959,8	963,7	0,569	

1) Mit „Apparat II" wurde der auf der Tafel dargestellte Apparat bezeichnet. Apparat I war diesem sehr ähnlich, nur hatte er etwas grössere Dimensionen.

Wasserdampf.
Beobachtungen in München.
Apparat II. Ballon B: Volumenbest. 4, gültig am 30. Mai
Ballon A: Volumenbest. 2, gültig vom 31. Mai bis 20. Juni excl.
Ballon B: Volumenbest. 3, gültig vom 20. bis 30. Juni incl.

Datum	Barometerstand 0° $\varphi = 45°$, $z = 0$	Gewichtsdifferenz D	Temperatur der Luft t_l C.	Spec. Gew. der Luft γ_l	Volumen des Ballons in Luft	Volumen des Ballons in Dampf	Spec. Gew. des Dampfes $\gamma_d \cdot \varphi = 45°$ $z = 0$	Bemerkungen
1894	mm	mg		kg/cbm	cbcm	cbcm	kg/cbm	
30./5.	714,8	526	19,0°	1,129	959,8	963,7	0,579	
30./5.	714,3	524	18,5	1,131	959,8	963,7	0,583	Dampfzuströmung oben und unten, Abströmung oben und unten
30./5.	714,3	523	20,0	1,125	959,9	963,7	0,577	
31./5.	715,0	366,5	20,0	1,126	678,3	681,0	0,583	
31./5.	715,0	369	19,5	1,128	678,3	681,0	0,582	
1./6.	718,6	374	18,5	1,137	678,3	681,0	0,583	
1./6.	718,7	373	18,5	1,137	678,3	681,0	0,585	
20./6.	721,9	523	19,8	1,136	960,0	963,8	0,589	
20./6.	721,9	521	19,8	1,136	960,0	963,8	0,591	Dampfzuströmung oben, Abströmung oben
29./6.	722,4	519	21,0	1,133	960,1	963,8	0,590	
29./6.	722,5	519,5	21,5	1,131	960,1	963,8	0,587	
30./6.	725,1	524,5	21,5	1,135	960,1	963,8	0,586	
30./6.	724,8	523	21,5	1,135	960,1	963,8	0,587	

Wasserdampf.
Beobachtungen auf dem Sonnblick.
Apparat II. Ballon A: gültig Volumenbest. 1. Ballon B: gültig Volumenbest. 3. $\varphi = 47° 3'$, $z = 3100$ m. Bei allen diesen Versuchen Dampfzuströmung oben, Abströmung oben.

Datum	Barometerstand 0° $\varphi = 45°$, $z = 0$	Gewichtsdifferenz D	Temperatur der Luft t_l C.	Spec. Gew. der Luft	Volumen des Ballons in Luft	Volumen des Ballons in Dampf	Spec. Gew. des Dampfes	Bemerkungen
1894	mm	mg		kg/cbm	cbcm	cbcm	kg/cbm	
20./8.	522,8	288	12,0°	0,848	678,4	681.1	0,422	Ballon *A*.
20./8.	523,4	392	14,0	0,843	959,7	963,4	zu gross!	Ballon *B*, zu schwache Dampfentwickl.
20./8.	523,4	282	14,0	0,843	678,5	681,1	0,426	Ballon *A*.
21./8.	519,6	401	13,5	0,838	959,7	963,4	0,419	„ *B*.
21./8.	519,6	282	13,5	0,838	678,5	681,1	0,421	„ *A*.
21./8.	519,9	396	14,6	0,835	959,7	963,4	0,421	„ *B*.
21./8.	519,9	282	14,5	0,835	678,5	681,1	0,418	„ *A*.
21./8	521,5	397	14,5	0,838	959,7	963,4	0,423	„ *B*.
21./8.	521,5	279	14,5	0,838	678,5	681,1	0,425	„ *A*.
22./8.	523,7	283	13,0	0,846	678,5	681,1	0,427	„ *A*.

Wasserdampf.

Beobachtungen auf dem Wendelstein.

Apparat II. Ballon *A*: gültig Volumenbest. 1. Ballon *B*: gültig Volumenbest. 3. $\varphi = 47^{\circ}\,40'$, $z = 1750$ m.

Datum	Barometerstand p $\varphi = 45^{\circ}$, $z = 0{,}0^{\circ}$	Gewichtsdifferenz D	Temperatur der Luft t_l ° C.	Spec. Gew. der Luft γ_l	Volumen des Ballons in Luft	Volumen des Ballons in Dampf	Spec. Gew. des Dampfes	Bemerkungen
1894	mm	mg		kg/cbm	cbcm	cbcm	kg/cbm	
26./9.	620,0	468,5	13,5°	1,000	959,7	963,6	0,510	Bei allen Versuchen Dampfeinströmung oben, Dampfabströmung oben
27./9.	621,1	479	14,0	1,000	959,7	963,6	0,499	
27./9.	621,1	338	13,7	1,001	678,5	681,3	0,501	
27./9.	620,5	470	13,8	1,000	959,7	963,6	0,508	
27./9.	620,5	341	13,5	1,001	678,5	681,3	0,496	
28./9.	621,5	487	12,5	1,006	959,6	963,6	0,496	
28./9.	621,5	344	12,5	1,006	678,4	681,3	0,497	
28./9.	621,5	488	12,2	1,007	959,6	963,6	0,497	
28./9.	621,5	345	12,2	1,007	678,4	681,3	0,496	
28./9.	620,3	489	11,8	1,007	959,6	963,6	0,495	
28./9.	620,3	351	9,5	1,016	678,3	681,3	0,496	

Tetrachlorkohlenstoff, CCl_4.

Beobachtungen in München.

Apparat II. Ballon *A*: gültig Volumenbest. 1. Ballon *B*: gültig Volumenbest. 3.

Datum	Barometerstand 0° $\varphi = 45^{\circ}$, $z = 0$	Gewichtsdifferenz D	Temperatur der Luft t_l C.	Spec. Gew. der Luft γ_l	Volumen des Ballons in Luft	Volumen des Ballons in Dampf	Spec. Gew. des Dampfes	Bemerkungen
1894	mm	g		kg/cbm	cbcm	cbcm	kg/cbm	
2./6.	708,1	3,94	19,0°	1,128	960,0	962,7	5,22	Ballon *B*.
25./10.	712,1	2,74	15,0	1,136	678,5	680,6	5,16	Ballon *A*. Apparat im Abzug [1])
26./10.	714,1	2,77	14,0	1,146	678,5	680,6	5,21	Ballon *A*. Apparat im Abzug

Aether. $C_2H_5 - O - C_2H_5$.

14./11.	713,5	1,157	10,0	1,166	678,4	679,1	2,869	Ballon *A*. Dampfeinströmung und Abstömung oben
14./11.	713,5	1,157	10,0	1,166	678,4	679,1	2,869	
14./11.	713,5	1,153	10,0	1,166	678,4	679,1	2,861	
15./11.	711,3	1,156	10,7	1,163	678,4	679,1	2,863	

1) Bei diesen Versuchen wurde die oben besprochene Saugvorrichtung nicht angewendet, sondern der Versuch unter dem Abzug durchgeführt.

Datum	Barometerstand $0°$ $\varphi = 45°$, $z = 0$	Gewichtsdifferenz D	Temperatur der Luft $t°$ C.	Spec. Gew. der Luft γ_l	Volumen des Ballons in Luft	Volumen des Ballons in Dampf	Spec. Gew. des Dampfes	Bemerkungen
				Alkohol. C_2H_5-OH.				
13./11.	716,1	0,228	12,8°	1,160	678,4	680,7	1,495	Ballon *A*. Dampfzuströmung unten,
13./11.	716,9	0,224	12,5	1,161	678,4	680,7	1,490	Abströmung oben
13./11.	717,6	0,219	12,3	1,163	678,4	680,7	1,485	Ballon *A*. Dampfzuströmung oben
14./11.	717,1	0,212	9,0	1,177	678,3	680,7	1,488	Abströmung oben
				Schweflige Säure. SO_2.				
25./11.	724,0	1,132	4,2	1,210	678,2	677,6	2,882	Mittel aus neun Wägungen
26./11.	716,0	1,120	5,0	1,193	678,2	677,6	2,847	Mittel aus vier Wägungen
				Chloroform. $CHCl_3$.				
19./11.	726,0	2,074	7,3	1,198	678,3	680,1	4,244	Mittel aus mehreren
20./11.	725,1	2,076	6,2	1,203	678,3	680,1	4,252	Wägungen

7. Verwerthung der Versuchsresultate für Wasserdampf.

Fasst man durch Bildung des arithmetischen Mittels alle Werthe von γ_d zusammen, welche auf das Intervall eines Millimeter Quecksilbersäule treffen, so erhält man folgende Reihe von beobachteten Zahlen.

Barometerstand in mm p	Zugehöriger Werth von γ_d in g pro cbm	Barometerstand in mm p	Zugehöriger Werth von γ_d in g pro cbm
520	420	711	573
522	424	712	575
523	424	714	580
524	427	715	581
620	500	716	582
622	501	719	584
622	497	722	590
704	569	723	587
706	572	725	587
707	573		

Wenn man nun annimmt, dass für den Druck $p = 0$ auch das specifische Gewicht des gesättigten Dampfes $\gamma_d = 0$ ist, so lassen sich die hier gegebenen Resultate am besten durch eine Gerade zusammenfassen, welche durch den Punkt $p = 0$ und $\gamma_d = 0$ geht.

Die Gleichung dieser Geraden hat also die Form

$$\gamma_d = a \,.\, p.$$

Der wahrscheinlichste Werth der Constanten a, der sich aus der Gleichung

$$a = \frac{\Sigma p \,.\, \gamma_d}{\Sigma p^2}$$

ergiebt, berechnet sich zu

$$a = 0{,}810061 \sim 0{,}8101.$$

Mit welcher Genauigkeit die Gleichung

(9) $$\gamma_d = 0{,}8101 \,.\, p$$

die zwischen 520 mm und 730 mm beobachteten Werthe von γ_d gibt, zeigt folgende Zusammenstellung.

p	γ_d		Fehler Δ	p	γ_d		Fehler Δ
	ber. aus Gl. (9)	beob.			ber. aus Gl. (9)	beob.	
520	421	420	− 1	711	576	573	− 3
522	423	424	+ 1	712	577	575	− 2
523	424	424	0	714	578	580	+ 2
524	425	427	+ 2	715	579	581	+ 2
620	502	500	− 2	716	580	582	+ 2
621	503	501	− 2	719	583	584	+ 1
622	504	497	− 7	722	585	590	+ 5
704	570	569	− 1	723	586	587	+ 1
706	572	572	0	725	587	587	0
707	573	573	0				

Die Summe der Fehlerquadrate beträgt 118. Bedeutet n die Anzahl der Beobachtungen, m die der zu bestimmenden Constanten, so ist der mittlere Fehler

$$f_m = \pm \sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2}{n-m}} = \pm \sqrt{\frac{118}{19-1}} = \pm 2{,}56.$$

Der procentuelle mittlere Fehler schwankt also zwischen 0,61 und 0,44 Proc., er ist also im Mittel ungefähr $^1/_2$ Proc. Der wahrscheinliche Fehler ist $^1/_3$ Proc.

Die folgende Tabelle ermöglicht eine Vergleichung der mittels der verschiedenen directen Methoden gefundenen und der auf Grund der verschiedenen Rechnungsweisen aus der Dampfwärme ermittelten Werthe für das specifische Gewicht von gesättigtem Wasserdampf bei atmosphärischen Pressungen.

Vergleichstabelle für Wasserdampf.

Druck p mm	γ_d g/cbm berechnet aus der Dampfwärme			γ_d direct experimentell bestimmt			
	Zeuner [1]	Fliegner [2]	Frank [3]	Fairbairn [4]	Herwig [5]	Wüllner [6]	n. meinen Versuchen [7]
500	409,1	398,1	413,4	407,8	452,7	407,9	(405,1)
520	424,4	413,0		423,4			421,2
540	439,7	427,9	443,5	438,9	487,5	439,2	437,4
560	455,0	442,8		454,5			453,6
580	470,2	457,6	473,5	469,9	522,3	470,6	469,8
600	485,6	472,5		485,4			486,0
620	500,7	487,3	503,3	501,0	556,9	501,8	502,3
640	515,9	502,0		516,4			518,4
660	530,9	516,7	532,7	531,9	591,5	532,9	534,7
680	546,0	531,4		547,4			550.9
700	561,1	546,0	562,3	562,9	626,0	564,0	567,0
720	576,1	560,6		578,3			583,3
740	591,1	575,3	591,7	593,7	660,3	594,9	(599,5)
760	606,2	589,9	606,2	609,1	677,6	610,5	(615.7)

Die in vorstehender Tabelle mit Klammern versehenen Zahlen sind über die beobachteten Barometerstände hinaus extrapolirt.

Aus der obigen Tabelle geht hervor, dass sämmtliche direct experimentell bestimmte Werthe von γ_d für Wasserdampf von 600 mm an grösser sind, als die von Zeuner aus den Regnault'schen Angaben über die Dampfwärme berechneten.

Dieser Umstand tritt noch klarer hervor durch die folgende Zusammenstellung bei höheren Pressungen.

Tabelle für Wasserdampf.
Werthe von γ_d.

$t°$ C.	p kg/qm	p mm	γ_d nach			
			Zeuner	Wüllner	Fairbairn	Frank
100°	10033	760	606,2	610,5	609,1	606,2
110	14622	1075,4	840,0	852,3	850,7	832,3
120	20278	1491,3	1142,5	1161,7	1164,5	1121,4
130	27607	2030,3	1527,0	1568,6	1563,6	1484,2

1) Nr. 1 Formel (2). 2) Nr. 1 Formel (3). 3) Nr. 1 Formel (4). 4) Nr. 2 Formel (1). 5) Nr. 2 Formel (2). 6) Nr. 2 Formel (3). 7) Nr. 7 Formel (9).

Die Werthe von γ_d, welche man aus den Frank'schen Versuchsresultaten erhält, weichen noch mehr als die von Zeuner berechneten von den übrigen experimentell bestimmten Zahlen ab; es erscheint daher ihre Richtigkeit zweifelhaft, zumal da die Methode, welche Frank zur Bestimmung der Dampfwärme benutzte, leicht Beobachtungsfehler zulässt.

Die Messungen des specifischen Gewichtes von Wasserdampf mit der aerostatischen Waage bestätigen somit bei Pressungen unter 600 mm die Versuche Regnault's über die Dampfwärme, und die Verwendbarkeit der Clapeyron'schen Gleichung zur Berechnung des specifischen Gewichtes aus denselben; *bei höheren Drucken weisen sie — wie die übrigen directen experimentellen Untersuchungen — darauf hin, dass die von Regnault gefundenen Werthe der Dampfwärme zu kleine specifische Gewichte des Dampfes liefern.*

Berechnet man aus den auf p. 208 unter 1) und 7) angegebenen Werthen für γ_d das specifische Gewicht δ des Dampfes, bezogen auf Luft von gleicher Temperatur und gleicher Spannung, so erhält man folgende Reihe von Zahlen.

Specifisches Gewicht des gesättigten Wasserdampfes (δ) bezogen auf Luft von gleicher Spannung und Temperatur.

Druck in mm Quecksilber	I. δ nach Zeuner	II. δ nach meinen Versuchen
500	0,636	0,630
520	—	0,631
540	0,637	0,633
560	—	0,635
580	0,638	0,637
600	—	0,638
620	0,638	0,640
640	—	0,642
660	0,638	0,643
680	—	0,644
700	0,639	0,646
720	—	0,648
740	0,639	0,649
760	0,640	0,650

Würde der gesättigte Dampf dem Gesetze von Mariotte-Gay-Lussac folgen, so wäre $\delta = \text{const.} = 0{,}623$. Man sieht also aus obiger Zusammenstellung, dass der gesättigte Wasser-

dampf im Sinne grösserer Compressibilität vom Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetz abweicht, eine Thatsache, welche durch eine grosse Reihe von Versuchen bereits bestätigt wurde.[1])

Das raschere Zunehmen der Werthe für δ in der Columne II erklärt sich durch das schnellere Anwachsen von γ_d nach der von mir aufgestellten Beziehung (9)

$$\gamma_d = 0{,}8101\, p,$$

gegenüber der von Zeuner ermittelten Gleichung:

$$\gamma_d = 1{,}1929\, p^{0{,}9303}.$$

8. Resultate der Versuche für einige andere Dämpfe.

Die auf p. 205 und 206 mitgetheilten Versuche mit Chlorkohlenstoff, Aether, Alkohol, schwefliger Säure und Choroform wurden ausgeführt, um die Anwendbarkeit der Methode auf verschiedene Dämpfe nachzuweisen. Die Ergebnisse derselben sind in Fig. 5 graphisch dargestellt. Man erkennt, dass die mit der aerostatischen Waage gefundenen Werthe mit den von Zeuner aus den Regnault'schen Versuchen berechneten[2]) ziemlich gut übereinstimmen. Für schweflige Säure[3]) habe ich aus den von Zeuner angegebenen Zahlen (bis 0° gültige) die Beziehung abgeleitet[4]):

$$\gamma_d = 0{,}646\, .\, p^{0{,}928}, \tag{10}$$

wobei γ_d das specifische Gewicht des Dampfes in Gramm pro Cubikmeter und p den Druck in Millimeter Quecksilbersäule darstellt.

---

1) Vgl. Wüllner, Lehrb. der Experimentalphysik **3.** § 86. 1885.

2) Vgl. Zeuner, Techn. Thermodynamik **2.** 1890, Tabellen des Anhanges.

3) l. c., Tab. 10 des Anhanges. Es sei mir gestattet, hier auf zwei Rechnungsfehler in dieser Tabelle aufmerksam zu machen.

Für $t = -40°$ muss es heissen:

$$u = 1{,}3041, \quad v = 1{,}3048, \quad \gamma = 0{,}7664.$$

Für $t = 0°$ muss es heissen:

$$u = 0{,}2203, \quad v = 2{,}2210, \quad \gamma = 4{;}525.$$

4) *Anmerkung.* Die Berechnung der Constanten m und n einer empirischen Formel von der Form $y = m\, x^n$ aus der graphisch gegebenen

Es ergiebt sich also für schweflige Säure

p in mm Quecksilber	γ_d in g pro cbm: berechnet nach Gl. (10)	γ_d in g pro cbm: experimentell mit der ärostatischen Waage. p. 206
716	2881	2,847
724	2910	2,882

Aus dieser Zusammenstellung geht eine ziemlich gute Uebereinstimmung der nach Regnault's Versuchen über die Dampfwärme mittels der Clapeyronschen Formel berechneten und der mit der *aerostatischen Waage* experimentell bestimmten specifischen Gewichte des gesättigten Dampfes von schwefliger Säure hervor.

Wenn man die Resultate für die übrigen Dämpfe (p. 205 bis 206) in der Weise zusammenfasst, dass man das Mittel der beobachteten Barometerstände mit dem Mittel der beobachteten specifischen Gewichte als zusammengehörig betrachtet, so ergiebt sich:

Chlorkohlenstoff:

$$p = 712\,\text{mm}; \qquad \gamma_d = 5{,}20\ \text{kg pro cbm};$$

Curve geschieht sehr einfach wie folgt. Sei $A\,B$ die gegebene Curve, so ist:

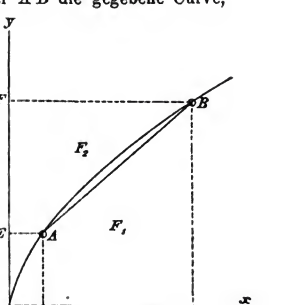
$$F_1 = A\,B\,C\,D = \int_{x_1}^{x_2} m\,x^n\,dx = \left(\frac{m\,x^{n+1}}{n+1}\right)_{x=x_1}^{x=x_2}$$

Ebenso wird:

$$F_2 = A\,B\,E\,F = \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{y}{m}\right)^{\frac{1}{n}} dy = \left(\frac{n\,.\,m\,x^{n+1}}{n+1}\right)_{x=x_1}^{x=x_2}$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{A\,B\,E\,F}{A\,B\,C\,D} = n.$$



Kennt man also — was durch Planimetriren des Flächenstückes zwischen Sehne und Curve von A bis B geschehen kann — die Grösse von F_2 und F_1, so ist n gegeben. m ergiebt sich aus irgend einem Punkte der Curve.

Chloroform:

$p = 725{,}5$ mm; $\gamma_d = 4{,}248$ kg pro cbm;

Aether:

$p = 713$ mm; $\gamma_d = 2{,}865$ kg pro cbm:

Alkohol:

$p = 717$ mm; $\gamma_d = 1{,}490$ kg pro cbm.

Fig. 5 zeigt, dass die Uebereinstimmung dieser Zahlen mit den von Zeuner berechneten eine theilweise sehr gute ist.

Phys. Inst. der Univ. München, December 1894.

11. *Formel für Diffusionsvorgänge in einem Cylinder von endlicher Länge bei Einwirkung der Schwere; von Th. Des Coudres.*

Aehnlich wie auf die Vertheilung der Dichte in einer Gasmasse wirkt die Gravitation auch auf die Concentrationsvertheilung in Lösungen.[1]) Das zu erwartende verticale Concentrationsgefälle ist zwar gering, würde aber immerhin gross genug sein, um bei Anwendung von günstigen Electrolyten galvanometrisch nachweisbar zu bleiben.[2])

Die Frage ist nur: wie rasch sich einigermaassen erhebliche Bruchtheile der asymptotisch angestrebten Concentrationsdifferenzen ausbilden werden.

Wir betrachten mit Nernst als treibende Kraft bei der Hydrodiffusion den — durch seine Wirkung auf halb durchlässige Wände definirten — osmotischen Druck. Es macht dann keine Schwierigkeit anzugeben, mit Geschwindigkeiten von welcher Grössenordnung Concentrationsunterschiede in einer Lösung durch die Schwere zu Stande kommen.

Die Lösung befinde sich in einem aufrecht stehenden cylindrischen Gefässe; die horizontale Bodenfläche von der Grösse q habe die Coordinate $x=0$; für die obere Begrenzungsfläche der Flüssigkeit sei $x=h$, sodass die Schwere in Richtung der abnehmenden x wirkt. Die zur Zeit $t=0$ durch die ganze Masse gleiche Concentration mag u_0 Gramm gelöster Körper — sagen wir kurz: Salz — im Cubikcentimeter Lösung betragen. Gesucht wird ein analytischer Ausdruck für den Concentrationsunterschied zwischen beiden Enden der Flüssigkeitssäule als

1) Gibbs, Thermodynam. Stud. Ostwald's Uebers. p. 171. 1892; Gouy u. Chaperon, Ann. de Chem. et Phys. (6) **12**. p. 384. 1887; Nernst, Zeitschr. f. phys. Chem. **2**. p. 637. 1888; Duhem, Journ. d. Phys. (2) p. 391. 1888; v. Türin, Beibl. **17**. p. 16. 1893.

2) Des Coudres, Wied. Ann. **49**. p. 292. 1893.

Function der Zeit, die Concentrationsdifferenz im Gleichgewichtszustande zur Einheit genommen, ein analytischer Ausdruck für

$$\frac{u_{\binom{x=0}{t=t}} - u_{\binom{x=h}{t=t}}}{u_{\binom{x=0}{t=\infty}} - u_{\binom{x=h}{t=\infty}}} = \frac{\Delta_t}{\Delta_\infty}.$$

Mit Rücksicht auf die Kleinheit der selbst für $t = \infty$ eintretenden Concentrationsunterschiede können osmotischer Druck und Concentration einander streng proportional gesetzt werden. Auf die in der Schicht $q\,dx$ enthaltene Salzmenge $u\,q\,dx$ vom osmotischen Drucke $p = p_1 u$ wirkt einerseits die osmotische Kraft

$$-p_1 \frac{du}{dx} q\,dx,$$

andererseits die Schwerkraft

$$-u \cdot \mathfrak{g} \cdot q\,dx.$$

$\mathfrak{g}$, das wegen des hydrostatischen Auftriebes corrigirte scheinbare Gewicht eines Grammes Salz in der Lösung ist jedenfalls kleiner als g, die auf das Vacuum bezogene Gravitationsconstante, und positiv, sofern die Dichte der Lösung mit der Concentration zunimmt. Es zeigt sich das auch bei wirklicher Ausführung der Rechnung. Man erhält

$$\mathfrak{g} = g\left(1 - \frac{u}{\varrho}\right)\frac{d\varrho}{du} \Big/ \left(1 - \frac{u}{\varrho}\frac{d\varrho}{du}\right),$$

wenn ϱ die Dichte der Lösung bedeutet. Nennt man V die Beweglichkeit des gelösten Körpers, d. h. die Geschwindigkeit, welche er in der Lösung erlangt, wenn auf ihn pro Masseneinheit die Kraft Eins wirkt, so wird das in unserer Elementarschicht enthaltene Salz mit der Geschwindigkeit

$$V\left(\frac{p_1}{u}\frac{du}{dx} + \mathfrak{g}\right)$$

fallen. Der Werth der Concentration u im Innern des Flüssigkeitscylinders als Function der Höhe x über dem Boden und der Zeit t wird daher eindeutig durch die Gleichungen bebestimmt:

(1) für $0 < x < h$ $\quad \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x}$

(2) für $t = 0$ $\quad u = u_0$

(3) für $x = 0$ und $x = h$ $\quad \frac{\partial u}{\partial x} + 2 A u = 0,$

wo zur Abkürzung

$$V p_1 = a \qquad V \mathfrak{g} = b \qquad \frac{\mathfrak{g}}{p_1} = 2 A$$

gesetzt ist.

Die Gesammtheit aller particulären Lösungen der Hauptdifferentialgleichung lässt sich durch das Symbol

(4) $$u = \sum \gamma e^{\alpha x + \beta t} = \sum \gamma_1 e^{\alpha_1 x + \beta t} + \sum \gamma_2 e^{\alpha_2 x + \beta t}$$

ausdrücken, wenn zwischen α und β die Beziehung

$$\beta = a \alpha^2 + b \alpha$$

besteht, oder wenn bei willkürlichem β und γ

(5) $$\begin{cases} \alpha_1 = -A + \sqrt{A^2 + \frac{\beta}{a}} \\ \alpha_2 = -A - \sqrt{A^2 + \frac{\beta}{a}} \end{cases}$$

ist. Den Ausdruck (4) nach Ausführung der Substitution (5) in die Grenzbedingungen (3) eingesetzt, erhält man: entweder

$$\beta = 0 \qquad \gamma_1 = 0 \qquad \alpha_2 = -2A$$

oder

$$\beta = -a A^2 - a \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2$$

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\frac{n\pi}{h} i - A}{\frac{n\pi}{h} i + A}$$

$$\alpha = -A \pm \frac{n\pi}{h} i,$$

wo n eine beliebige ganze Zahl > 0 bedeutet.

Die Exponentialgrössen mit imaginären Argumenten fassen wir zu trigonometrischen Functionen zusammen und bezeichnen die jetzt noch willkürlich bleibenden Coefficienten mit k. Gleichung (4) nimmt dann die Gestalt an

(6) $$u = k_0 e^{-2Ax} + \sum k_n \left[\cos\left(\frac{n\pi}{h} x\right) - \frac{Ah}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{h} x\right)\right] e^{-Ax} e^{-a\left[A^2 + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2\right] t}$$

Ueber die k muss gemäss der Nebenbedingung (2) verfügt werden. Zunächst ergiebt sich k_0 auf Grund folgender Ueberlegung. Die Gleichungen (3) besagen physikalisch, dass kein Salz durch die Flächen $x = 0$ und $x = h$ tritt; für jede diesen Gleichungen genügende particuläre Lösung ist darum

$$\int_0^h u \, dx$$

eine von der Zeit unabhängige Constante. Die in (6) unter dem Summenzeichen zusammengefassten Lösungen ergeben für $t = \infty$ die Concentration u allenthalben gleich Null, also muss bei ihnen schon von vornherein

$$\int_0^h u \, dx \equiv 0$$

sein. In Gleichung (6) $t = 0$ und demgemäss $u = u_0$ gesetzt und zwischen den Grenzen 0 und h nach x integrirt erhält man somit

$$u_0 h = \int_0^h k_0 e^{-2Ax} \, dx$$

$$k_0 = \frac{2Ah}{1 - e^{-2Ah}} u_0. \tag{7}$$

Zur Bestimmung der übrigen Constanten haben wir dann die Beziehung

$$\sum_1^\infty n \, k_n \left\{ \cos\left(\frac{n\pi}{h} x\right) - \frac{Ah}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{h} x\right) \right\} = u_0 e^{Ax} - k_0 e^{-Ax}. \tag{8}$$

Der Versuch, die k_n streng zu berechnen, etwa in der Weise, wie man bei Ermittelung der Coefficienten einfacher Sinus- oder Cosinusentwickelungen verfahren ist[1]), würde, wenn überhaupt durchführbar, ein höchst umständliches Gesehäft sein. Nun ist aber $A.h$ unter allen experimentell realisirbaren Umständen ein so kleiner Bruch, dass Concentrationsdifferenzen von der Grössenordnung $u_0 (A.h)^2$ weit hinter der Grenze des Beobachtbaren liegen. Dies erwogen, setzen wir die k_n mit

1) v. Hunyady, Nouv. Ann. de Math. (2) **11**. p. 39. 1872.

geradem Index gleich Null, die mit ungeradem Index

$$k_{(2m+1)} = -\frac{8 u_0 A h}{\pi^2} \frac{1}{(2m+1)^2}. \tag{9}$$

Da

$$\frac{8 u_0}{\pi^2} (A h)^2 \sum_0^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{h} \pi x\right)}{(2m+1)^3} \text{ höchstens } = \frac{u_0}{4} (A h)^2$$

werden kann, so weicht die der Näherungsformel (9) entsprechende Concentrationsvertheilung für $t = 0$ nur um völlig vernachlässigbare Grössen ab von der geforderten Concentrationsgleichförmigkeit $u_{(t=0)} = u_0$.

Formel (6) schreibt sich jetzt für die beiden Endflächen des Diffusionscylinders

$$u_{x=0} = u_0 (1 + A h) - \frac{8 u_0 A h}{\pi^2} \sum_0^{\infty} \frac{\left(e^{-a\left(\frac{\pi}{h}\right)^2 t}\right)^{(2m+1)^2}}{(2m+1)^2}$$

und

$$u_{x=h} = u_0 (1 - A h) + \frac{8 u_0 A h}{\pi^2} \sum_0^{\infty} \frac{\left(e^{-a\left(\frac{\pi}{h}\right)^2 t}\right)^{(2m+1)^2}}{(2m+1)^2}.$$

Wir erhalten

$$\frac{A_t}{A_x} = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_0^{\infty} \frac{(e^{-z})^{(2m+1)^2}}{(2m+1)^2}, \tag{10}$$

wo z eine Abkürzung für

$$a\left(\frac{\pi}{h}\right)^2 t = z. \tag{11}$$

Solange e^{-z} erheblich kleiner als Eins ist, convergirt die Reihe vorzüglich. Schon für $e^{-z} = 0{,}99$ dagegen muss eine recht erhebliche Anzahl von Gliedern berücksichtigt werden, wenn man auf 1 Promille genaue Zahlen erhalten will. Rückt dagegen e^{-z} sehr nahe an Eins heran, so wird die Reihe völlig unbrauchbar. Aber gerade das Gebiet der sehr kleinen z ist von physikalischem Interesse.

Auf die folgende Umformung des Ausdruckes (10) mit Hülfe der Fundamentalgleichung in der Theorie der Thetafunctionen war Hr. Prof. Scheibner so freundlich, mich hinzuweisen. Es ist

$$\frac{\Delta_t}{\Delta_\infty} = \frac{8}{\pi^2}\sum_0^\infty \frac{1-(e^{-z})^{(2m+1)^2}}{(2m+1)^2} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^z \vartheta_2(0, e^{-4z})\,dz$$

und wegen

$$\vartheta_2(0,q) = \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\cdot\vartheta(0,q'), \text{ wenn } \log q \log q' = \pi^2$$

$$\frac{4}{\pi^2}\int_0^z 2\sum_0^\infty e^{-(2m+1)^2 z}\,dz = \frac{4}{\pi^2}\int_0^z \sqrt{\frac{\pi}{4z}}\left(1+2\sum_0^\infty (-1)^m e^{-\frac{\pi^2}{4z}m^2}\right)dz$$

$$\frac{8}{\pi^2}\sum_0^\infty \frac{1-(e^{-z})^{(2m+1)^2}}{(2m+1)^2} = \frac{4}{\sqrt{\pi^3}}\sqrt{z} + \frac{4}{\sqrt{\pi^3}}\sum_0^\infty (-1)^m \int_0^z \frac{e^{-\frac{\pi^2}{4z}m^2}}{\sqrt{z}}\,dz.$$

Dass bei einigermaassen kleinem z alle Glieder neben dem ersten zu vernachlässigen sind, ersieht man aus der Entwickelung

$$\int_0^z e^{-\frac{\pi^2}{4z}m^2}\cdot z^{-\frac{1}{2}}\cdot dz = e^{-\frac{\pi^2}{4z}m^2}\cdot\frac{4}{2m^2}\cdot z^{\frac{3}{2}}\left\{1-\frac{3}{2}\left(\frac{4}{\pi^2 m^2}z\right)\right.$$
$$\left. + \frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\left(\frac{4}{\pi^2 m^2}z\right)^2 - \frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\,\frac{7}{2}\left(\frac{4}{\pi^2 m^2}z\right)^3 \pm \ldots\right\},$$

wie wir sie durch successive Integration per Partes erhalten. Für kleine Werthe von z geht also die Gleichung (10) über in

$$\frac{\Delta_t}{\Delta_\infty} = \frac{4}{\sqrt{\pi^3}}\sqrt{z} \tag{12}$$

und kann direct nach t aufgelöst werden

$$t = \left(\frac{\Delta_t}{\Delta_\infty}\right)^2 \frac{\pi h^2}{16\,a},$$

während bei grösserem z zusammengehörige Werthe von t und Δ_t/Δ_∞ mittels (10) und (11) zu berechnen sind.

Wir erhalten so

$\frac{\Delta_t}{\Delta_\infty}$	$t\cdot\frac{a}{h^2}$	$\frac{\Delta_t}{\Delta_\infty}$	$t\cdot\frac{a}{h^2}$
0,5004	0,0492	0,0316	$0{,}0_8 1963$
0,2331	0,01068	0,0100	$0{,}0_4 1963$
0,0720	$0{,}0_2 1018$	0,00316	$0{,}0_5 1963$

a ist der auf Centimeter-Secunden als Einheiten bezogene sogenannte Diffusionscoefficient. Als Beispiel eines besonders rasch diffundirenden Stoffes diene Salzsäure mit $a =$ etwa 3.10^{-5}. Nehmen wir h zu einem Meter an, so ist aus der kleinen Zahlentabelle abzulesen: Ein Hundertelprocent der angestrebten Concentrationsdifferenz kommt in Bruchtheilen einer Secunde zu Stande. Ein Zehntelprocent braucht zu seiner Ausbildung schon eine Minute. Erst nach fast zwei Stunden wird ein Procent erreicht. Um sieben Procent beobachten zu können, würden wir viermal 24 Stunden warten müssen. Dieser Ueberschlag ermuthigt wenig zu experimenteller Inangriffnahme des Problemens, zumal wenn man berücksichtigt, dass die für galvanischen Nachweis von Concentrationsdifferenzen besonders geeigneten Electrolyte sehr viel langsamer als Salzsäure diffundiren.

Leipzig, Februar 1895.

12. *Ueber den Beweis des Maxwell'schen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes unter Gasmolecülen; von Max Planck.*

(Aus den Sitzungsberichten der math.-phys. Klasse der k. bayer. Akad. der Wissensch. 1894. Bd. 24. Heft 4; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Unter obigem Titel hat Hr. L. Boltzmann in den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Klasse der k. bayer. Akademie der Wissenschaften vom 5. Mai 1894 gegen den Beweis des Maxwell'schen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes, wie er sich in den von mir herausgegebenen Kirchhoff'schen Vorlesungen über die Theorie der Wärme (p. 142 ff.) findet, einen Einwand geltend gemacht. Da sich die Spitze des Angriffs zum grossen Theil gegen den Herausgeber jener Vorlesungen richtet, indem von Ungenauigkeiten der Darstellung gesprochen und sogar die eigene Stellung des Herausgebers zur kinetischen Gastheorie damit in Verbindung gebracht wird, so liegt mir daran, mich gegen diesen Vorwurf zu vertheidigen. Es könnte nämlich durch ihn leicht die Meinung erweckt werden, als ob in die Darstellung des genannten Beweises sich irgend ein Mangel in der Form eingeschlichen habe, der durch Anwendung grösserer Sorgfalt und Genauigkeit von Seiten des Herausgebers hätte vermieden werden können.

Eine solche Meinung wäre aber durchaus irrig. Bei keiner anderen Stelle des Kirchhoff'schen Buches bietet das vom Verfasser hinterlassene Manuscript mehr Garantien dafür, dass die Vorlesung thatsächlich genau so gehalten wurde, wie sie gedruckt vorliegt, und in der That handelt es sich bei dem Boltzmann'schen Einwand keineswegs um ein mögliches Missverständniss oder um eine Unklarheit in der Ausdrucksweise, sondern der Einwand trifft gerade den Kern des ganzen Beweises; es ist nicht denkbar, demselben Rechnung zu tragen, ohne dass der Ideengang vollständig abgeschnitten wird. Von einem Mangel in der Darstellung kann also gar nicht die Rede sein, und damit halte ich die Aufgabe des Herausgebers

für erledigt, wie das auch in meinem Vorwort ausdrücklich hervorgehoben ist. Eine Kritik des vorgetragenen Gedankenganges und an Stelle eines unvollkommenen Beweises womöglich einen besseren verlangen heisst doch nicht weniger, als vom Herausgeber ein neues Buch fordern. Wer würde dann wohl die Verantwortung übernehmen können, ein nachgelassenes Werk herauszugeben?

Nach der formellen Rechtfertigung sei mir auch noch ein Wort zum Inhalt verstattet. Den Boltzmann'schen Einwand habe ich mir seinerzeit ebenfalls gemacht, wenn auch in etwas anderer, doch in so wenig abweichender Form, dass ich hier nicht mehr darauf zurückkomme und mich einfach auf die Anerkennung seiner sachlichen Berechtigung beschränke. Ich habe aber daran noch eine weitere Ueberlegung geknüpft, die ich bei dieser Gelegenheit hier anfügen möchte, obwohl ich nicht sicher weiss, ob sie nicht schon einmal angestellt worden ist. In dem Maxwell-Kirchhoff'schen Beweise wird die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Molecüle nach Beendigung eines Zusammenstosses in bestimmter Weise auseinanderfliegen, aus dem Satze von der Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens mehrerer unabhängiger Ereignisse auf zwei verschiedene Weisen berechnet: einmal direct durch Betrachtung des Zustandes nach dem Stoss, das andere Mal durch Betrachtung des Zustandes vor dem Stoss. Aus der Gleichsetzung beider Ausdrücke resultirt dann das Maxwell'sche Geschwindigkeitsvertheilungsgesetz. Die erste Berechnungsart ist aber im allgemeinen nicht zulässig, da die Zustände der Molecüle nach dem Stoss nicht mehr unabhängige Ereignisse sind im Sinne jenes benutzten Satzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Nur bei Gültigkeit des Maxwell'schen Gesetzes wird also jene Berechnung richtig, oder mit anderen Worten: wenn das Maxwell'sche Geschwindigkeitsvertheilungsgesetz gilt, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Molecüle mit bestimmten Geschwindigkeiten auseinanderfliegen, ebenso gross wie die, dass zwei Molecüle mit denselben Geschwindigkeiten zusammentreffen. Bei allen anderen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzen gilt dieser Satz nicht.

Wenn man nun in einem in vollständigem Gleichgewicht befindlichen Gas die Geschwindigkeiten sämmtlicher Molecüle

plötzlich gerade umgekehrt denkt, so verwandelt sich je ein Paar gerade vor einem Zusammenstoss befindlicher Molecüle in ein Paar gerade auseinanderfliegender Molecüle und umgekehrt; dann vertauschen sich also auch die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten. Gilt nun das Maxwell'sche Vertheilungsgesetz, bei welchem diese Wahrscheinlichkeiten einander gleich sind, so befindet sich auch nach dem Verwandlungsact das Gas in einem Zustand dynamischen Gleichgewichts; gilt aber ein anderes Vertheilungsgesetz, so kann dies offenbar nicht mehr zutreffen.

Nun besagt aber ein allgemeiner, aus dem Hamilton'schen Princip abzuleitender Satz der Mechanik, dass in einem Punktsystem mit conservativen Kräften, welches sich im dynamischen Gleichgewicht befindet, eine plötzliche Umkehrung aller Geschwindigkeiten abermals einen dynamischen Gleichgewichtszustand bedingt. Demzufolge muss man schliessen: „Das Maxwell'sche Gesetz ist das einzige Geschwindigkeitsvertheilungsgesetz, welches im Einklang steht mit dem Satze der Mechanik, dass der dynamische Gleichgewichtszustand eines Punktsystems durch ein plötzliches Umkehren aller Geschwindigkeiten nicht gestört wird." Durch diese Ueberlegung wird, so viel ich sehe, der Boltzmann'sche Einwand ganz vermieden und das Maxwell'sche Gesetz auf einen festeren Boden gestellt. Hervorheben möchte ich noch besonders, dass die Frage, ob eine solche plötzliche Umkehrung aller Geschwindigkeiten physikalisch ausführbar ist, hierbei ganz ausser Betracht bleibt.

13. *Nochmals das Maxwell'sche Vertheilungsgesetz der Geschwindigkeiten;* von L. Boltzmann.

Wenn ich in meiner kurzen Notiz über den Beweis des Maxwell'schen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes [1]) von einer Ungenauigkeit in der Darstellung in Kirchhoff's Vorlesungen über Wärmetheorie sprach, so meinte ich damit nicht die Redaction derselben durch Hrn. Planck, sondern den Inhalt des Buches selbst, welches ja wie alle Vorlesungen vornehmlich den Zweck hat, von anderen gefundene Sätze in neuer Form darzustellen.

Die Spitze meiner Notiz war überhaupt nicht gegen eine Person, sondern lediglich gegen einen Beweis gerichtet, den ich nicht für beweisend halte. Hr. Planck gab demselben nun durch Beiziehung eines oft verwendeten Princips eine vielversprechende Abänderung.[2]) Dieses Princip[3]) wurde in neuester Zeit[4]) verwendet, um die Voraussetzungen zu prüfen, an welche der Beweis gebunden ist, dass eine von mir in die Gastheorie eingeführte der Entropie verwandte Grösse nur abnehmen kann. Zu diesem Beweise ist die Annahme erforderlich, dass der Zustand des Gases molecular ungeordnet ist und bleibt, d. h. dass nicht die Molecüle von bestimmter Beschaffenheit immer oder doch vorwiegend in bestimmter Weise zusammenstossen, sondern dass die Häufigkeit jeder Gattung von Zusammenstössen nach den Wahrscheinlichkeitsgesetzen gefunden werden kann.

1) Boltzmann, Sitzungsber. d. k. bayer. Akad. d. Wiss. **24.** Heft 2; Wied. Ann. **53.** p. 955, 1894.

2) Planck, Sitzungsber. d. k. bayer. Akad. d. Wiss. **24.** Heft 4, November 1894.

3) Boltzmann, Bemerkungen über einige Probleme der mechanischen Wärmetheorie II. Wiener Sitzungsber. **75.** Jan. 1877.

4) Zahlreiche Briefe in Nature vom 25. Oct. 1894 bis 18. April 1895, besonders Burbury 22. Nov. 1894, Boltzmann 28. Febr. 1895. Vgl. übrigens schon Boltzmann, Weitere Bemerkungen über Wärmetheorie, Wiener Sitzungsber. **78.** Juni 1878, drittletzte und vorletzte Seite.

Nimmt man nun an, dass eine Zustandsvertheilung im allgemeinen niemals beliebig lange molecular geordnet bleibt, ferner dass für eine stationäre Zustandsvertheilung jede Geschwindigkeit gleich wahrscheinlich, wie die gleichgrosse genau entgegengesetzt gerichtete ist, so folgt, dass durch eine nach unendlich langer Zeit erfolgende Umkehrung aller Geschwindigkeiten jede stationäre Zustandsvertheilung in sich selbst übergeht. Nach der Umkehrung werden aber genau so viele Zusammenstösse in verkehrter als vorher in directer Weise geschehen, und da beide Zustandsvertheilungen identisch sind, so muss für jede die Wahrscheinlichkeit der verkehrten und directen Stösse gleich sein, woraus sofort das Maxwell'sche Geschwindigkeitsvertheilungsgesetz folgt.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Auf der Naturforscherversammlung zu Nürnberg wurde in der physikalischen Abtheilung angeregt, dass alljährlich ein Bericht über einen im Vordergrund des Interesses stehenden Gegenstand erstattet würde, an den sich eine Diskussion schliessen sollte. In Wien hat einer der Unterzeichneten (E. Wiedemann) eine Darstellung der neueren Forschungen auf dem Gebiete der Strahlung gegeben, die gelegentlich noch im Druck erscheinen soll; eine eingehende Diskussion konnte sich nicht entwickeln, da die in dem Vortrage erörterten Fragen nicht vorher im einzelnen mitgetheilt waren.

Da experimentelle Resultate naturgemäss mehr feststehen, so dürften gerade Theorieen am ersten Anlass zu anregendem Meinungsaustausch bieten. Deshalb wurde für die diesjährige Versammlung in Lübeck einmal ein mehr theoretischer Gegenstand, nämlich „ein Ueberblick über den derzeitigen Zustand der Energetik“ für den Bericht ins Auge gefasst, den Herr Professor Dr. Helm in Dresden auf das Liebenswürdigste übernommen hat. Um eine Erörterung der verschiedenen dabei zu besprechenden Probleme zu erleichtern, erscheint auf den folgenden Seiten eine kurze Uebersicht des Vortrages.

Die neue Einrichtung wird hoffentlich für recht viele Fachgenossen eine Veranlassung werden, sich zu dem in Lübeck am Dienstag, den 17. September, stattfindenden Vortrage einzufinden und sich an der sich daran anschliessenden Besprechung zu betheiligen.

L. Boltzmann.
V. v. Lang.
G. Quincke.
E. Wiedemann.

Ueberblick über den derzeitigen Zustand der Energetik; von Georg Helm.

(Auszug aus dem Berichte über die Entwickelung der Energetik, welcher der 67. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Lübeck erstattet werden wird.*))

Die Energetik ist bestrebt, die Naturerscheinungen nach einer im Gesetze von der Erhaltung der Energie wurzelnden gemeinsamen Methode quantitativ zu beschreiben. In dem Suchen nach dazu geeigneten Methoden, in dem Erfinden dazu geeigneter Schemata, lassen sich zwei Hauptrichtungen unterscheiden.

Die *erste Hauptrichtung* geht von der *Mechanik*, als der überlieferten Grundlage quantitativer Naturerkenntniss aus und sucht die wohlgesicherten Gesetze der Bewegungsvorgänge auf die anderen Naturerscheinungen zu übertragen.

Die *zweite Hauptrichtung* hat sich gleichzeitig mit der *Thermodynamik* entwickelt und findet in den quantitativen Gesetzen der Wärmeerscheinungen ihre sicherste Stütze.

Jede dieser durch den Ausgangspunkt scharf getrennten Richtungen zeigt bei aller Mannigfaltigkeit doch ein gewisses eigenartiges Gepräge.

Der mechanischen Richtung, die mit Helmholtz' Arbeit von 1847 anhebt, erscheinen die verschiedenen Energieformen als wesensgleich, der thermodynamischen, die auf R. Mayer zurückgeht, als äquivalent, aber dem Wesen nach verschieden, und nur insoweit mit gleichen (mathematisch oder physikalisch definirten) Eigenschaften behaftet, dass sie sich dem Begriffe Energieform unterordnen.

Als Ziel schwebt der *mechanischen* Richtung der Aufbau einer verborgenen, einer erdichteten Welt vor, die sich hinter der

---

*) Ich bitte, Berichtigungen und Ergänzungen mir thunlichst vor der Naturforscherversammlung einzusenden, — auch abweichende Auffassungen, gleichgültig, ob sie bei der Diskussion in Lübeck zur Geltung gebracht werden sollen, oder nicht. Prof. Dr. Helm, Dresden, K. Techn. Hochschule.

wirklichen Welt abspielt, ein Bild der Welt, das mehr oder weniger sinnlich vorstellbar erscheint, das sich sogar zu einem System von Gleichungen verflüchtigt hat, die dann aber etwas Sinnenfälliges, nämlich Bewegungen, darzustellen vermögen.

Dagegen hat die *thermodynamische* Richtung vorwiegend die Tendenz, sich möglichst unmittelbar der Erfahrung anzuschliessen, in den Gleichungen nichts zu sehen als den reinsten Ausdruck der quantitativen Beziehungen, indem sie nicht nur die Energieformen selbst, sondern auch gewisse Bestimmungsstücke derselben als gleichberechtigte Elemente unserer Erfahrung auftreten lässt.

Vor der Besprechung beider Richtungen sei noch des mit der umfassenden Bedeutung des Energiegesetzes begründeten Vorschlags von Ostwald (Lpz. Ber. 1891, Ztschr. f. phys. Chem. 9. 1892) gedacht, das Energiemaass als fundamentale Maasseinheit neben der des Raumes und der Zeit einzuführen.

Die mechanische Richtung der Energetik.

Das älteste Mittel, die Gesetze der Mechanik auf alle Naturerscheinungen zu übertragen, die mechanische Weltansicht, die alles Geschehen als Bewegung auffasst, soll hier keine Berücksichtigung finden. Denn, wenn auch selbstverständlich die neueren zahlreichen Versuche, durch Atom- oder durch Aetherhypothesen die Gravitation, die electrischen und magnetischen Vorgänge zu erklären, auf das Energiegesetz Rücksicht nehmen, so wurzelt doch ihre Erklärung nicht in diesem, sondern in kinematischen Vorstellungen. Sie sind also der Energetik nicht zuzurechnen.

Dagegen haben die anderen bisher hervorgetretenen Mittel, die dynamischen Gleichungen auf alle Naturerscheinungen zu übertragen, die Ausbildung der Energiebegriffe zur wesentlichen Voraussetzung. Diese Uebertragungsmittel sind

1. Das *Perpetuum-mobile-Princip.* Helmholtz, Ueber die Erhaltung der Kraft. 1847.

Ueber Bedenken dagegen, die aus der Nicht-Umkehrbarkeit von Naturprocessen hergeleitet sind, vergl. Planck, Das Princip der Erhaltung der Energie. Lpz. 1887. p. 139 f. Helm, Die

Lehre von der Energie. Lpz. 1887. p. 92. Mach, Wien. Sitzungsber. 1892, IIa. 1611. — Gross, Ueber den Beweis des Princips von der Erhaltung der Energie. B. 1891. behandelt die logische Stellung des Perpetuum-mobile-Princips zum Gesetze von der Erhaltung der Energie.

2. Das *Analogieprinzip*. Es ist wohl nirgends in Worte gefasst worden, dürfte sich aber in folgender Weise ausdrücken lassen: Von den Coordinaten oder Parametern, die eine Naturerscheinung bestimmen (also z. B. von der Temperatur, der electrischen Ladung, den Potentialen), lassen sich, in ähnlicher Weise wie in der Mechanik von den räumlichen Coordinaten und Geschwindigkeiten, Funktionen abhängig machen, mit denen man rechnen kann, wie die Mechanik mit kinetischer Energie und potentieller Energie bez. mechanischer Arbeit rechnet, und welche zugleich diesen mechanischen Grössen physikalisch äquivalent sind.

In ausgedehnterer Weise hat wohl zuerst C. Maxwell dieses Princip angewendet, vorzüglich in Electricity and magnetism, Oxford 1873, II. 184 ff.

Die grundlegende Frage aber blieb zu beantworten: Wie muss ein mechanisches System beschaffen sein, also wie müssen kinetische und potentielle Energie bez. mechanische Arbeit von den Coordinaten abhängen, damit es Gleichungen genügt, die für eine vorgelegte nicht mechanische Energieform characteristisch sind? Diese Frage ist von v. Helmholtz, Prinzipien der Statik monocyklischer Systeme (Journ. f. Math. 97. 1884.) aufgeworfen und beantwortet worden; die Frage tritt dort in der besonderen Form auf: Wie muss ein mechanisches System beschaffen sein, um den Gleichungen der Thermodynamik zu genügen, insbesondere der Bedingung, dass die „lebendige Kraft" integrirender Nenner ist? Die bei der Bearbeitung der Frage eingeführten Begriffe der cyclischen Coordinaten (kinosthenische oder Geschwindigkeitscoordinaten nach J. J. Thomson, Phil. Trans. 1885, II.), Polycykel, Monocykel, Fesselung, Koppelung haben später eine abschliessende Systematisirung gefunden in Hertz, Principien der Mechanik, 1894.

Das Analogieprincip ist zu eingehenden Untersuchungen verwendet worden bei v. Helmholtz, Ueber das Princip der kleinsten Wirkung (Journ. f. Math. 100. 1887.), wo das er-

weiterte Hamilton'sche Princip als Quelle der mechanischen, wie der thermo- und electrodynamischen Gleichungen erscheint, und bei Boltzmann, Vorlesungen über Maxwell's Theorie, Lpz. 1891, wo die Analogie an Lagrange's Differentialgleichungen zweiter Form anknüpft. Am vielseitigsten wurde das Princip verwendet von J. J. Thomson, Anwendungen der Dynamik auf Physik und Chemie, Lpz. 1890, dessen Veröffentlichungen über diese Gegenstände bis 1886 zurückreichen.

Die soeben skizzirte wissenschaftliche Entwickelung hat zu einer Auffassung hingeführt, nach der das Energetisch-Allgemeine, das die verschiedenen Energieformen Umfassende, lediglich in der mathematischen Form der Gleichungen besteht, — eine Auffassung, die schon in Maxwell's mechanischen Analogien, schärfer noch bei Hertz an verschiedenen Stellen auftritt, und ihren klarsten Ausdruck in Boltzmann, Methoden der theoretischen Physik (Katalog mathematischer Modelle etc., München 1892) gefunden hat.

Aber neben dieser Auffassung hat sich die Ansicht, dass die Energie eine selbständige Substanz sei, das eigentliche reale Object aller Naturerkenntniss, zu der Hypothese ausgebildet, die Energie sei stets (auch in potentieller Form), raumerfüllend und stetiger Ortsänderung fähig, zu der Hypothese von der *Localisation* oder von der *Wanderung* der Energie. Diese, offenbar an die Potentialtheorie und an die Wellentheorie der strahlenden Energie anknüpfende Betrachtungsweise findet sich auch zuerst bei Maxwell zu Begriffen wie Fortpflanzung und Diffusion der Energie ausgebildet, dann in O. Heaviside's Auffassung der electrischen Energieübertragungen (Electrician 1885, Phil. Mag. 25, 1888), und hat sich besonders durch Poynting's Darstellung der electrischen Energie (Phil. Trans. 1884, 2) als ein nützliches Hülfsmittel der Electrik erwiesen. Bedenken gegen die physikalische Berechtigung dieser Auffassung äussert Hertz, Untersuchungen über die Ausbreitung der electrischen Kraft, Lpz. 1892, p. 294. Eine kurze Darstellung der Auffassungsweise giebt Föppl, Einführung in die Maxwell'sche Theorie, Lpz. 1894, p. 293 ff., eine eingehende analytische Behandlung ihrer Folgerungen für stetig ausgebreitete Massen, in denen

Druckkräfte wirken, liefert W. Wien, Wied. Ann. 45. p. 685. 1892; einen weiteren Beitrag Allen, Phil. Mag. 39. 1895. Das Hertz'sche Bedenken, dass die Energie unter Umständen sich entgegengesetzt der Richtung bewege, in der die sie übertragenden Massen fortschreiten, was physikalisch sinnlos erscheine, ist nicht beseitigt.

Die thermodynamische Richtung der Energetik.

1. *Das Energieprincip.* Mit Hülfe der Begriffe *Eigenenergie* E eines Systems und *Energieform* e stellt sich das Gesetz von der Erhaltung der Energie in der im wesentlichen auf W. Thomson 1851 zurückgehenden Gestalt dar

$$dE = \Sigma de,$$

wo die Summe Σ mindestens so viele Glieder umfasst, als Energieformen in Betracht zu ziehen sind, und unter d jede mit den Bedingungen des Systems zu vereinbarende *mögliche* Veränderung zu verstehen ist. Verwendbar ist die Formel, sobald dE und sämmtliche de als Functionen der Aenderungen aller Coordinaten oder Parameter bekannt sind, von denen die betrachtete Naturerscheinung abhängt. Diese Functionen sind von alters her bekannt bei den rein mechanischen Vorgängen in Punktsystemen und starren Körpern. Wie bei diesen das Energieprinzip, im wesentlichen in derselben Weise wie das d'Alembert'sche Princip, zu den Differentialgleichungen der Bewegung führt, ist ausgeführt worden von Helm, Ztschr. f. Math. u. Phys. 35. p. 307. 1890. Es tritt dabei der Unterschied zwischen Energieprincip und Energieintegral und überhaupt die Bedeutung der oben angeführten Bestimmung hervor, dass d jede mögliche Veränderung anzeigt. Auf dieses Princip der *virtuellen energetischen Veränderung* hatte schon derselbe Verfasser (Lehre von der Energie, 1887) hingewiesen.

Zu denselben Zwecken lässt sich auch das aus dem Princip der *Superposition*, das Planck, Energie, 1887. p. 127. u. 146., aufstellte, von ihm gefolgerte und vielfach benutzte Zerlegungsverfahren anwenden; nur versagt dieses oder führt zu Schwierigkeiten in den Fällen, wo sich bei der Superposition Energieformen getilgt haben.

Wie auf dem engeren Gebiete der Mechanik, so kann auch in der Energetik die *Variationsrechnung* an Stelle des Princips der virtuellen Aenderungen treten. Ostwald hat (Allg. Chem. II. p. 37. 1893) ein *Maximumprincip* aufgestellt und C. Neumann hat (Lpz. Ber. 1892) bewiesen, dass wenigstens für materielle Systeme, die anfangs in Ruhe sind und nur Potentialkräften unterliegen, der Satz gilt: Unter allen mit dem „Princip der lebendigen Kraft" verträglichen virtuellen Bewegungen ist *eine*, deren lebendige Kraft am Ende eines unendlich kleinen Zeitraums die grösste ist; diese tritt ein. —

Von einem weiteren (Lpz. Ber. 1893) von Ostwald aufgestellten Variationsprincip, dem Princip des ausgezeichneten Falles, hat Lie (Lpz. Ber. 1894) verkündigt, dass es in der vorliegenden Gestalt noch mathematisch unzureichend ist.

Eine weitere mathematische Methode zum Ersatz des Prinzips der virtuellen Aenderungen, die des *Potentials*, soll unter 4. behandelt werden.

Ein Vorgang, der unter vorgelegten Bedingungen bei jeder möglichen Aenderung eintritt, gestattet die uns sehr geläufig gewordene Auffassung, dass ein *Bestreben* vorhanden sei, ihn herbeizuführen. So lässt sich denn endlich auch das Prinzip der virtuellen Aenderungen durch die Annahme ausdrücken, dass jeder Energieform ein Bestreben zur Aenderung innewohne. Es wird als Intensität der Energieform bezeichnet und soll unter 3. besprochen werden. Der mathematische Ausdruck des „Bestrebens" bleibt freilich immer das Princip der virtuellen Veränderungen.

2. *Die Entropie und die Umkehrbarkeit.* Von den Bekämpfungen und Beanstandungen der Clausius'schen *Entropiegesetze* soll hier ebensowenig gehandelt werden, wie von den zahlreichen Arbeiten, diese Gesetze verständlich zu machen und mit gewohnten Anschauungen in Uebereinstimmung zu bringen. Mittels der Entropiegesetze nimmt die unter 1. angegebene Gleichung die Gestalt an

$$dE \leqq \Theta dS + \Sigma de,$$

wo nun die Summe Σ über alle Energieformen mit Ausschluss der Wärme zu erstrecken ist, Θ die absolute Temperatur der

als Wärme aufgenommenen Energiemenge, S die Entropie des aufnehmenden Körpers, also ΘdS das Wärmedifferential bezeichnet und das Zeichen $<$ bei Nicht-Umkehrbarkeit, das Zeichen $=$ bei Umkehrbarkeit des Vorganges anzuwenden ist. Die Ungleichung ist in Form der Gleichgewichtsbedingung, d. h. der Bedingung für den Ausschluss jeder Veränderung, $dE \geqq \Theta dS + \Sigma' de$ wohl zuerst von Gibbs benutzt und für chemische Vorgänge besonders von Planck als Princip der *Vermehrung der Entropie* verwertet worden (Wied. Ann. 30. 31. 32. 44.). Planck betont besonders (Wied. Ann. 44.), dass die Ungleichung für jede *mögliche* Veränderung gilt.

Aus obiger Gleichung folgt durch Integration, dass, wenn ein System einen Kreisprocess durchlaufen, also E seinen Ausgangswerth wieder angenommen hat, und dabei von den Energieformen e ebensoviel ein- wie ausgetreten ist, doch eine Zunahme der Wärme, also der Entropie S des Systems stattgefunden haben kann. Dieser Satz oder auch die nach dem Carnot-Clausius'schen Beweise ihm zu Grunde liegende Thatsache, dass die Wärme das Bestreben hat, von höherer zu niederer Temperatur überzugehen, oder dass umkehrbare Processe nicht streng zu verwirklichen sind, hat zu einer ganzen Reihe von Begriffsbildungen geführt. Ausser den älteren von W. Thomson (s. Papers) herrührenden Begriffen *Dissipation*, *Vergeudung*, *Degradation*, *Entwerthung*, *Triebenergie* (motivity) gehören hierher die von Wald (Ztschr. f. phys. Chem. 1. u. 2.; Die Energie und ihre Entwerthung, Lpz. 1889) den conservativen Zustandsänderungen entgegengestellten *finitiven* und Planck's (Wied. Ann. 30) Gegenüberstellung der *neutralen* (umkehrbaren) und *natürlichen* (nicht-umkehrbaren) Processe, wobei durch die Entropie die *Vorliebe* der Natur für den Endzustand gemessen wird, wenn dieser gleiche Energie wie der Anfangszustand besitzt. Ferner gehören hierher die Unterscheidung der Energieformen in zwei *Geschlechter*, die Ostwald (Die Energie und ihre Wandlungen. Lpz. 1888) betont, dann die Unterscheidung eines *Perpetuum mobile zweiter Art*, das ohne Energieaufwand die Temperatur hebt, von dem alten Perpetuum mobile erster Art, das ohne Energieaufwand Energie erzeugt (Ostwald, Allg. Chem. II.).

v. Helmholtz hat (J. f. Math. 100. p. 142. 1887) die An-

sicht ausgesprochen, die *Nichtumkehrbarkeit* beruhe nicht im Wesen der Sache, sondern auf der Beschränktheit unserer Hülfsmittel, die es uns unmöglich machen, ungeordnete Bewegungen wieder zu ordnen, die Bewegungen aller Atome rückwärts zu lenken. In der That, in den gewöhnlichen Fällen von Nichtumkehrbarkeit stellen wir uns den Vorgang von Parametern abhängig dar, deren Aenderung während des Vorganges nicht völlig genau angebbar ist, von *verborgenen Coordinaten* (Hertz) neben den sichtbaren, also von verborgenen Bewegungen bei mechanischer Auffassung des Vorgangs. Die zugeführte Energie wird also ausser zur Steigerung der in den Aenderungen der sichtbaren Coordinaten zu Tage tretenden Eigenenergie E auch zur Steigerung verborgener Energie verwendet, daher ist dE kleiner als es bei Ausschluss verborgener Coordinaten wäre. Es scheint daher die Hypothese zulässig, dass die Nichtumkehrbarkeit immer in der Nichtberücksichtigung von Coordinaten liege, eine Hypothese, die jedenfalls zum Verständniss des Ungleichheitszeichens in obiger Formel sehr nützlich ist und sogar in einzelnen Fällen die Sache besser kennzeichnet als das Wort umkehrbar. Die Bewegung der Erde um die Sonne z. B. ist gewiss, von Nebendingen abgesehen, ein „umkehrbarer" Process, während wir sie doch nicht umkehren können. Von einer anderen, nur in *singulären* Zuständen möglichen Quelle der Nichtumkehrbarkeit wird unter 3. die Rede sein.

Die unter 1. und 2. dargelegten Grundzüge der Thermodynamik und damit der Energetik haben sehr sorgfältig nachprüfende Darstellungen gefunden von C. Neumann (Lpz. Ber. 1891 und 1894).

3. *Die Analogen der Entropie und die Intensitäten.* Am unmittelbarsten werden die im Carnot-Clausius'schen Beweisgange aufgefundenen Eigenschaften der Umwandlungen von Wärme in Arbeit auf andere Energieumwandlungen übertragen durch die Methode, für diese neue umkehrbare *Kreisprocesse* zu ersinnen, eine viel benutzte Methode, auf deren Bedeutung neuerdings noch Planck (Ztschr. f. phys. Chem. 8. 1891) hingewiesen hat.

Bei den Anwendungen dieser Methode hat sich gezeigt,

dass die unter 2. behandelten Eigenschaften des Wärmedifferentials bei den Differentialen der anderen Energieformen ihre Analogieen finden. Jedes lässt sich in die Form $J.dM$ bringen, wobei M eine Function der Parameter ist, die bei umkehrbaren Aenderungen sich nicht ändert, bei nicht-umkehrbaren steigt, und J eine positive Function der Parameter darstellt, welche eine universelle physikalische Bedeutung hat. Ist sie in zwei Körpern verschieden, so ist das Bestreben wirksam, Energie der zugehörigen Form vom höheren zum niederen Werthe übergehen zu lassen, und ist sie in zwei Körpern so gross wie in einem dritten, so findet zwischen diesen kein Uebergang der zugehörigen Energieform statt.

Bestimmen lassen sich die Functionen J und M nur aus den besonderen Erfahrungen über die betreffende Energieform. Ob die kanonische Darstellung JdM des Differentials einer Energieform stets herstellbar ist, ob nur auf eine Weise, ob sich Energieformen vereinigen und zerlegen lassen, — ist noch nicht untersucht worden.

Das Energieprincip nimmt nach Einführung dieser Functionen die Gestalt an

$$dE \leqq \Sigma J.dM.$$

Die Eigenschaften der Functionen J und M als Analogien zu Θ und S sind, wenigstens theilweise, schon hervorgehoben worden von Zeuner (Mechanische Wärmetheorie, 1866), Mach (Lotos, 1871; Erhaltung der Arbeit, Prag 1872), Popper (Electrische Kraftübertragung, Wien 1884), v. Oettingen (Mém. acad. Petersb. (7) 32. 1885), und liegen allen den Kreisprocessen zu Grunde, die nach Analogie des von Sadi Carnot ersonnenen Wärme-Arbeits-Processes für andere Energieumwandlungen erfunden worden sind. Für chemische Zwecke ist obige Formel in Gestalt der Gleichgewichtsbedingung $dE \geqq \Sigma JdM$ mathematisch ausgenützt worden von Gibbs (Trans. Connecticut acad. 3. 1875/78; auch Thermodynamische Studien, deutsch von Ostwald, Lpz. 1892), der auch die singulären Zustände behandelt, in denen eine der Funktionen M (nämlich die Masse einer noch nicht vorhandenen Phase, deren Entstehung möglich ist) nur steigen kann, also Nichtumkehrbarkeit bedingt. Die

Allgemeingültigkeit obiger Beziehungen ist zuerst ausdrücklich behauptet worden von Helm (Energie, 1887).[1])

Jede der Functionen J wird nach Helm als *Intensität* der zugehörigen Energieform bezeichnet (Le Chatelier gebraucht dafür Spannung, Meyerhoffer Potential). Jede der Functionen M heisst nach Ostwald *Capacität* des Systems für die betreffende Energieform (Helm hatte Quantitätsfunction der Energieform vorgeschlagen, ein Ausdruck, der leicht zu Missverständnissen führen kann, Meyerhoffer gebraucht den Namen Inhalt).

Zumeist wird nach Ostwald's, auch Popper's, Vorgang die Energieform selbst in Factoren zerlegt $e = J \,.\, M$, während im Allgemeinen nur die Darstellung des Differentials als Product zulässig ist:

$$de = J \,.\, dM.$$

Dieses Differential ist im allgemeinen kein vollständiges, nur die in der Gleichung

$$dE \leqq \Sigma J \,.\, dM$$

auftretenden Differentiale sind sämmtlich vollständige.

Ueberhaupt ist es nicht ganz ohne Bedenken, wenn man einem Körper, wie es ja allerdings ganz allgemein geschieht, Energieformen als Besitz zuschreibt. Was er besitzt, sind streng genommen seine Eigenenergie und die verschiedenen J und M oder die Coordinaten, von denen diese J und M abhängen. Eine Energieform aber hat physikalische Realität nur in dem Augenblicke des Ueberganges von einem Körper zum anderen. Die Energieform als Besitz eines Körpers hat nur einen mathematischen Sinn.

Die oben angeführten Eigenschaften der Functionen J und M sind nicht unabhängig von einander. Es lässt sich vielmehr folgender Satz beweisen: Kann in einem isolirten System die Summe aller einer Energieform zugehörigen Capacitäten nie abnehmen, so besteht nur dann Gleichgewicht in

1) Aber Le Chatelier und Meyerhoffer streiten sich noch 1893 in den Compt. rend., wem von ihnen beiden die oben angegebene Bemerkung über die Functionen M zu verdanken ist.

diesem System, wenn an keiner Stelle, wo die Capacität abnimmt, die Intensität grösser ist, als an einer Stelle, wo die Capacität zunimmt. Umgekehrt also: Die Bedingung für Störung des Gleichgewichts ist, dass dort, wo sich die Energieform (also ihre Capacität vermindert, die Intensität den höheren Werth hat. Zum Beweise genügt es, die verschiedenen Energieformen voneinander unabhängig anzunehmen, sodass man nach dem Princip der virtuellen Aenderungen alle bis auf eine constant setzen kann; denn wären zwei nicht unabhängig, so könnte man sie zu einer zusammenziehen. Weiter genügt es, den Beweis für zwei Körper zu führen, die ein isolirtes System bilden und zwischen denen nur eine Energieform übergeht; die Behandlung des allgemeineren Falles bringt keine principiellen Schwierigkeiten. Sei also für jeden der beiden Körper $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$

$$dE \leqq J dM, \quad dE' \leqq J' dM',$$

demnach ist für das System die Bedingung für den Eintritt einer Aenderung diese:

$$dE + dE' \leqq J dM + J' dM'.$$

Ist Gleichgewicht, so ist $dE + dE' \geqq 0$; nach der Voraussetzung, das System sei isolirt, ist ferner

$$dM + dM' = 0,$$

daher

$$0 \leqq (J - J')\ dM.$$

Ist nun dM positiv, d. h. kann die Energie nur von $\mathfrak{K}$ nach $\mathfrak{K}'$ gehen, so ist jede Aenderung ausgeschlossen bei $J \leqq J'$, ist dM positiv oder negativ, so ist die Gleichgewichtsbedingung $J = J'$ w. z. b. w. Der Gedankengang des Beweises stammt von Gibbs, der ihn für den Austausch beliebig vieler chemischer Bestandtheile zwischen beliebig vielen Phasen durchgeführt hat.

Das Intensitätsgesetz ist vor allen von Ostwald (Lpz. Ber. 1891, 1892; Ztschr. f. phys. Chem. 9 u. 10; Allg. Chem. II) in dem unter 1. am Ende angegebenen Sinne weiter ausgebaut worden. In dem Falle, dass zwischen zwei Capacitäten

M eine Gleichung besteht, also die freie Veränderlichkeit der Coordinaten durch eine Bedingung beschränkt ist:

$$dM_1 = k \,.\, dM_2 ,$$

die Ostwald *Maschinengleichung* nennt, — in dem Falle kann man die entsprechenden zwei Glieder der Energiegleichung zu einem vereinigen $(J_1 + kJ_2)\, dM_1$. Den Ausdruck kJ_2 nennt Ostwald *reducirte Intensität*. So ergiebt sich der von ihm als das *verallgemeinerte Intensitätsgesetz* bezeichnete Satz: Zwischen zwei Energieen findet Gleichgewicht statt, wenn die Intensität der einen der reducirten Intensität der anderen entgegengesetzt gleich ist.

Lässt ein zweiter Körper dieselben Energieformen zu $(J_1' + kJ_2')\, dM_1'$ zusammenziehen, so sind beide Körper im Gleichgewicht, wenn

$$(J_1 + kJ_2)\, dM_1 + (J_1' + k'J_2')\, dM_1' = 0$$

und falls $dM_1 + dM_1' = 0$ ist (siehe oben), folgt

$$J_1 - J_1' = -(kJ_2 - k'J_2').$$

Die hier auftretenden Intensitätsdifferenzen nennt Ostwald *compensirt* und findet den *„Satz des Geschehens"*: Damit etwas geschieht, ist es nothwendig und hinreichend, dass nicht-compensirte Intensitätsunterschiede vorhanden sind.

Zu den Gesetzen der Intensität und der Capacität bringen weitere Ausführungen: Wronsky, Das Intensitätsgesetz. Frankf. a. O. 1888. — Januschke, Ztschr. f. d. Realschulwesen 15. p. 524. — Meyerhoffer, Ztschr. f. phys. Chem. 7. 1891. — Dressel, Natur u. Offenbarung, 39. 1893. (Um Irrthümern vorzubeugen sei bemerkt, dass Dressel M Quantitätsfunction, $M:J$ aber, abweichend von Ostwald, Capacität nennt.) — Ferner gehört hierher Peddie, Notiz über das Gesetz der Umwandlung der Energie und seine Anwendungen (Ztschr. f. phys. Chem. 13. 1894).

4. *Die freien Energieen.* Sind einzelne der M unveränderlich, so fallen die zugehörigen Energieformen aus der unter 3. (p. XI) gegebenen Gleichung aus. Um den Fall, dass

einzelne J unveränderlich sind, zu behandeln, empfiehlt es sich, die Gleichung in die Form zu bringen

$$dE \leqq \Sigma J dM = \Sigma_1 J dM + \Sigma_2 J dM,$$

wo die Energieformen zunächst willkürlich in zwei Gruppen getrennt sind. Wegen

$$d(E - \Sigma_1 JM) \leqq - \Sigma_1 M dJ + \Sigma_2 J dM$$

fallen rechts die constantem J entsprechenden Glieder fort, wenn man sie in die erste Gruppe gebracht hat. Die partiellen Ableitungen der Function $E - \Sigma_1 JM$ nach einem J der ersten Gruppe geben das zugehörige $- M$, die partiellen Ableitungen derselben Function nach einem M der zweiten Gruppe das zugehörige J, falls der betrachtete Vorgang umkehrbar ist. Die Functionen $E - \Sigma_1 JM$ heissen *energetische Potentiale* bei constanten J (der ersten Gruppe) und sind von Gibbs (a. a. O.) und von Massieu (Compt. rend. 69. 1869; J. de phys. 6. p. 216. 1877) zuerst angewendet worden. Den besonderen Fall $E - \Theta S$ hat Helmholtz (Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge, Berl. Sitzungsber. 1882) hervorgehoben und diese Function

$$F = E - \Theta S$$

als *freie Energie*, ΘS aber als *gebundene Energie* des betrachteten Systems bezeichnet. Eine gute Uebersicht der Ergebnisse dieser Theorie giebt R. v. Helmholtz (Wied. Ann. 30. p. 401. 1887). Diese freie Energie stimmt mit der unter 2. erwähnten Triebenergie überein, falls kinetische Energie ausgeschlossen ist und ausser der Wärme keine beschränkt verwandelbaren Energieformen vorkommen.

Die energetischen Potentiale sind seitdem zu analytischen Untersuchungen verwerthet worden in den zahlreichen Arbeiten von Duhem (Le potentiel thermodynamique, Paris 1886; Bull. des sciences math. (2.) 11. 1887; Ann. Fac. de Toulouse 4; Ann. de l' école normale (3.) 10. 1893; dass. (3.) 8. 1891; Journal de math. (4.) 8. 9. u. 10. 1892 bis 1894).

Ferner hat Nernst (Theoret. Chem. Stuttg. 1893) die freie Energie zur Grundlage vieler mathematischer Begründungen gemacht, theilweise wohl in einer mehr auf mathematische Einfachheit als auf Strenge gerichteten Weise.

Weiter machte Nernst (Wied. Ann. 53. 1894) auf die characteristischen Unterschiede der Vorgänge aufmerksam, bei denen sich eine der Functionen F, E und $E - F$ nicht oder nur wenig ändert.

Endlich hat Le Chatelier (J. de phys. (3.) 3. 1894, auch früher Compt. rend. 116. u. 117.) den Versuch unternommen, die Energetik von Grund aus auf dem Begriffe der *Triebenergie*, puissance motrice (Sadi Carnot[1]), aufzubauen, der nach seiner Ansicht mit Thomson's motivity und v. Helmholtz' freier Energie völlig identisch ist. Sein erstes Gesetz kommt auf das von der Erhaltung der Capacität M hinaus, das zweite behauptet die Unmöglichkeit, Triebenergie zu schaffen, das dritte die Unmöglichkeit, sie ohne Wärmeerzeugung zu zerstören. Der Berichterstatter vermisst in diesen Darlegungen sowohl die einleuchtende Begründung, wie die mathematische Präcision der auf Energie- und Entropiegesetz ruhenden allgemeinen Energetik.

5. *Die Anwendungen der Energetik.*

a) *Chemische Anwendungen.* Die älteste Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf chemische Vorgänge gab Kirchhoff (Pogg. Ann. 103. u. 104. 1858), das Entropiegesetz wurde für diese Erscheinungen ausgenutzt von Horstmann (Berl. Ber. d. chem. Ges. 2. 1869; 4. 1871; Lieb. Ann., Sppl. 8. 1870) und Moutier (Compt. rend. 72. 1871). Intensitätsfunctionen für chemische Vorgänge führte Gibbs ein, ebenso die energetischen Potentialfunctionen. Helmholtz gelang es 1882, mit Hülfe der freien Energie die Theorie der galvanischen Zelle zu entwickeln, die ebenfalls bereits Gibbs 1878 beschäftigt hatte und die Gibbs aufs Neue 1889 (Ztschr. f.

1) In dem Bestreben, Sadi Carnot's Wendungen zur unmittelbaren Grundlage einer Energetik auszugestalten — gelegentlich auf Kosten der deutschen und englischen Begründer der Energiegedanken — begegnet sich Le Chatelier mit Mouret (Sadi Carnot et la science de l' énergie, Revue générale des sciences 1892; und Démonstr. du principe de l' équivalence, Niort 1894). Zweifellos ist Carnot nicht nur bahnbrechend für das Clausius'sche Entropiegesetz, sondern auch der bedeutendste Vorläufer für das Energiegesetz und für das die neuere Energetik characterisirende Intensitätsgesetz.

phys. Chem. 3) nach der Methode des Kreisprocesses behandelt. Wesentlich vom energetischen Standpunkte aus hat van t' Hoff (Études de dynamique chimique, Amsterdam 1884) die Zusammenhänge zwischen den Eigenschaften der Lösungen durchschaut und Ostwald eine vollständige Uebersicht über das ganze Gebiet der chemischen Erscheinungen in seiner Allg. Chemie niedergelegt. Die Methode des thermodynamischen Potentials wird von Duhem mannigfach auf chemische Erscheinungen angewendet: Ztschr. f. phys. Chem. 8. 1891; J. de phys. (2.) 7. 1888 und (3.) 3. 1894; Mém. des fac. de Lille 1. 1891 und 3. 1893/94. Nachdem Planck in einer Reihe von Aufsätzen (Wied. Ann. 30. 31. 32. 44. 1887—1891) die chemischen Erscheinungen einer mathematisch strengen Behandlung unterworfen hatte, ferner Nernst (Theor. Chem. Stuttg. 1893) und Le Chatelier (Recherches expérimentales et théoriques sur les équilibres chimiques, Paris 1888; auch Ann. des mines 1888) vortreffliche Uebersichten über die chemischen Erscheinungen gegeben hatten, die den mathematischen Zusammenhang noch mehr hervortreten lassen, hat Helm (Math. Chemie, Lpz. 1894) die Gesammtheit der bisher quantitativ festgelegten chemischen Erscheinungen von einem einheitlichen energetischen Standpunkte mathematisch zu entwickeln unternommen.

b. *Electrische Anwendungen.* Ausser den älteren Anwendungen von W. Thomson, Maxwell, Clausius gehören hierher: Duhem, Théorie nouvelle de l' aimantation par influence, Paris 1888; Ann. de chim. et de phys. (6.) 12. 1887; Ann. de l' école norm. (3.) 5. 1888; Ann. de la fac. de Toulouse 7; American J. of math. 17. 1894.

c. *Anwendungen auf strahlende Energie.* Ostwald, Allg. Chem., und E. Wiedemann, Wied. Ann. 38. p. 485. 1889. Zum Nachweis des von der Strahlung ausgeübten Druckes benutzen einen Kreisprocess Boltzmann (Wied. Ann. 22. 1884) und Galitzine (Wied. Ann. 47).

d. *Biologische Anwendungen.* Pfeffer, Studien zur Energetik der Pflanze (Lpz. Abhdl. 18. 1892). Hueppe, Ueber die Ursachen der Gährungen und Infectionskrankheiten (B. 1893, auch Berl. klin. Wochenschr. 1893).

e. *Philosophische Anwendungen.* Lasswitz, Die moderne Energetik in ihrer Bedeutung für die Erkenntnisskritik (Philos.

Monatshefte, 29. p. 1 und p. 177. 1893). Lasswitz, Ueber psychophysische Energie und ihre Factoren (Archiv f. syst. Philos. 1. p. 46). Der Verfasser nennt diese Factoren Potential und Empathie. — Dass nur in der Natur die Erhaltung der Energie, im Geiste die Steigerung und das Wachsthum der Energie gelte, behauptet Carrière (Abh. Münch. Ak., Phil. Kl. 19. 1892). — Ostwald, Chemische Theorie der Willensfreiheit (Lpz. Ber. 1894).

f. *Volkswirthschaftliche Anwendungen.* Helm, Energie. 1887, Anhang.

1895. ANNALEN № 6.
DER
PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND 55.

1. *Farbenphotographie durch Körperfarben und mechanische Farbenanpassung in der Natur; von Otto Wiener.*

1. Gang der Untersuchung.

Bei der Untersuchung stehender Lichtwellen[1]) stiess ich zum erstenmal auf die Frage nach der grundsätzlichen Möglichkeit der Farbenphotographie. Zenker hatte die damals schon vorhandenen Verfahren durch die Wirkung stehender Lichtwellen erklärt.[2]) Gegen diese Erklärung waren aber von Schultz-Sellack[3]) Einwände erhoben worden, welche noch nicht entkräftet waren. Aus diesem Grunde und weil mir die Möglichkeit der Herstellung durchsichtiger dicker photographischer Schichten unbekannt war, glaubte ich die Lösung der Frage fernerliegend. Diese Schwierigkeit überwandt aber bald nachher Lippmann[4]) und gelangte zu einem Verfahren der Farbenphotographie durch absichtliche Hervorrufung stehender Lichtwellen, also durch Anwendung der Zenker'schen Theorie.

Ob diese Theorie aber auch die alten Verfahren erklärte, war damit noch nicht bewiesen; und so fanden meine Gedanken in dieser Richtung keinen festen Ruhepunkt. Ich entschloss mich daher, durch neue Versuche die Ursache der Farbenwiedergabe bei jenen alten Verfahren zu ermitteln.

1) Wiener, Wied. Ann. **40.** p. 205. 1890.

2) Zenker, Lehrb. der Photochromie. Berlin, Selbstverlag des Verf. 1868. Bei meiner früheren Untersuchung war mir entgangen, dass auch Lord Rayleigh gelegentlich der Untersuchung der Wellenausbreitung in einem Medium von periodischer Structur (Phil. Mag. (5) **24.** p. 158 Anm. 1887) auf die Möglichkeit jener Erklärung aufmerksam gemacht hatte. Andererseits kannte er auch nicht die 19 Jahre früher veröffentlichte Theorie von Zenker.

3) Schultz-Sellack, „Ueber die Färbung der trüben Medien und die sogenannte farbige Photographie." Pogg. Ann. **143.** p. 449. 1871.

4) Lippmann, Compt. rend. **112.** p. 274. 1891.

Sie bilden den Ausgangspunkt und einen wesentlichen Gegenstand der folgenden Mittheilung.

Jene Einwände von Schultz-Sellack sind keineswegs ohne weiteres zu verwerfen. Er bestritt das Zustandekommen regelmässiger stehender Lichtwellen in Pulvern. Pulver hatten in der That zur Farbenabbildung gedient, und zwar schon in dem ersten gefundenen Verfahren von Seebeck, dessen Beobachtungen im Jahre 1810 in Goethe's Farbenlehre[1]) veröffentlicht wurden. Seebeck benutzte feuchtes, am Licht grau gewordenes Chlorsilber, das er auf Papier strich.

Schultz-Sellack's Einwand bezieht sich in erhöhtem Maasse auf die Verfahren, bei denen Papier der Träger der lichtempfindlichen Stoffe ist, indem es dazu in verschiedenen Lösungen gebadet wird, z. B. bei Poitevin's Verfahren.

Keine Geltung hat er natürlich bei solchen, die eine gleichförmige durchsichtige Schicht eines lichtempfindlichen Stoffes mit gut spiegelnder Unterlage benutzen, wie das Verfahren von Becquerel, der blanke Silberplatten durch Electrolyse bis zu einer bestimmten Tiefe chlorirte.

Ein zweiter Einwand von Schultz-Sellack gründet sich auf die Möglichkeit der Entstehung von Farben durch eine mechanische Zertheilung der Schicht, welche durch die Belichtung hervorgerufen werden kann und deren Grad nicht durch die Farbe, sondern durch die Wirkungsstärke des auffallenden Lichtes bestimmt wird. Die Farbenwiedergabe wäre demnach nur eine zufällige. Diese Erklärung wird indess in Abschnitt 5 als irrig nachgewiesen.

Neue Zweifel an der Allgemeingültigkeit der Zenker'schen Theorie bringen aber die Ergebnisse der Untersuchungen Carey Lea's[2]) über die Silberhaloidsalze. Er wies nach, dass die durch farbige Beleuchtung auf vorbelichtetem Chlorsilber entstehenden farbigen Stoffe sich auch auf rein chemischem Wege im Dunkeln herstellen liessen.

---

1) Goethe, Farbenlehre **2.** p. 716. Den dort mitgetheilten Aufsatz von Seebeck fand ich in keiner Ausgabe der gesammelten Werke Goethe's, die ich nachschlug, abgedruckt.

2) Carey Lea, „On Red and Purple Chloride, Bromide and Jodide of Silver; on Heliochromy and on the Latent Photographic Image". Am. Journ. (Ser. III) **33.** p. 349. 1887.

Ebenso hat neuerdings H. Krone[1]) für das Poitevin'sche Verfahren eine Reihe von Reactionen angegeben, welche durch die Belichtung ausgelöst werden, wonach auf chemischem Wege verschiedene farbige Körper in dem lichtempfindlichen Stoffe entstehen können. Er äussert daher[2]): „Die Poitevin'sche Methode beruht auf rein chemischen Vorgängen" und ist „von Grund aus von der Lippmann'schen verschieden."

Aber er bedient sich auch der folgenden Worte[3]): „Dieser causale Zusammenhang" — nämlich zwischen Farbe der Beleuchtung und der erwähnten chemisch entstehungsfähigen Körper — „ist rein physikalischer Natur und nur unter Bezugnahme auf die Vorgänge und die sich aus der Beobachtung als richtig ergebenden Erfahrungen über die Wellenbewegung und die Natur des Lichtes mehr und mehr zu ergründen."

Ob nun die Zenker'sche Theorie auf jenes Verfahren keine Anwendung findet, wird nicht ausdrücklich angegeben, wofür auch die Beweise fehlten. Im Gegentheil äussert Krone[4]), „dass unsere heutige Kenntniss über das Wesen photographischer Farbenerzeugung, soweit diese bis jetzt überhaupt erschlossen ist, auf Zenker's Theorie beruht."

Er meint also doch wohl, dass sie noch nicht ganz erschlossen ist; und das geht auch hervor aus dem folgenden, dem vorher citirten sich anschliessenden Satze: „Nehmen wir in Bezug auf die von uns bis hierher besprochenen" — von mir als alte bezeichneten — „Farbenprocesse an, dass uns die Farbenresultate darin deshalb mit dem bestrahlenden farbigen Lichte identisch erscheinen, weil die Molecüle der belichteten Schicht mit denselben Wellenlängen weiterschwingen, unter denen sie von dem bestrahlenden Lichte getroffen wurden."

Die in dem letzten Satz ausgesprochene Annahme führt

---

1) In einem Vortrage, veröffentlicht in der Deutschen Photographenzeitung p. 327 ff. 1891 und in seinem Buche „Darstellung der natürlichen Farben durch Photographie", Verlag der Deutschen Photographenzeitung p. 43. 1894.

2) Zu Beginn desselben Vortrags.

3) Das citirte Buch p. 49.

4) Sein Buch p. 38.

15*

aber zu keiner Erklärung der Farbenwiedergabe; denn da die belichtete Platte nicht selbstleuchtend geworden ist, müsste das Weiterschwingen der Molecüle gerade die Absorption der früheren Beleuchtungsfarben zur Folge haben und die Platte in den jeweils zu diesen complementären Farben erscheinen lassen.

Bei der geschilderten Sachlage musste vor allem die grundsätzliche Frage aufgeworfen werden:

Sind die bei den alten Verfahren auftretenden Farben Scheinfarben oder Körperfarben, d. h. durch Interferenz oder Absorption entstanden?

Im ersten Fall, der von der Zenker'schen Theorie gefordert wird, fragt es sich weiter, wie ist es dann möglich, dass auch auf chemischem Wege dieselben Farben sich bilden können? Sollte es denkbar sein, dass durch chemische Wirkung ein Körper mit geschichtetem Bau entsteht, der Interferenzfarben zur Folge hat? In der That führt Krone[1]) diese bemerkenswerthe Möglichkeit an; und es erhellt daraus, dass man dann ein Verfahren als ein chemisches bezeichnen könnte, ohne die Zenker'sche Theorie verwerfen zu müssen.

Im zweiten Fall aber wäre die Zenker'sche Theorie nicht anwendbar, und man stände vor dem merkwürdigen und meines Wissens neuen Ergebniss der grundsätzlichen Möglichkeit, dass farbige Beleuchtung übereinstimmende Körperfarben erzeugen kann.

Doch könnte jemand vielleicht bei solcher Zuspitzung der Frage auf den Gedanken verfallen, Absorptions- und Interferenzfarbe seien nicht grundsätzlich verschieden, jene auf diese zurückführbar. Es würde das auf die von Wrede[2]) entwickelte Interferenztheorie der Absorption hinauslaufen. Eine solche Annahme vertrüge sich aber nicht mit der Thatsache, dass die Metalle schon bei etwa $^1/_{100}$ Wellenlänge Dicke die eigenthümliche Absorptionsfarbe zeigen. Grundsätzlich wird sie widerlegt, wie schon vor langem durch Stokes und Rudberg ausgeführt wurde, durch den Umstand, dass Absorption mit einem Verlust an Licht verbunden ist, dessen

1) In dem citirten Vortrag.

2) Wrede's Theorie und Widerlegung vgl. bei Wüllner, Lehrb. der Experimentalphysik 2. p. 456, 4. Aufl. 1883.

Energie in eine andere Form, z. B. der Wärme oder der chemischen Energie verwandelt wird, während bei Interferenz allein kein Licht verloren gehen kann, reflectirtes und durchgehendes zusammen das einfallende ausmachen, also complementär zu einander sein müssen bei weisser Beleuchtung.

Wie kommt es aber, dass jene Frage des Farbenursprungs bei den alten Farbenphotographien nicht schon längst leicht entschieden werden konnte? Darauf gab schon Zenker[1]) die Antwort. Der Grundbestandtheil derselben ist Chlorsilber, bez. eine niederere Chlorstufe dieses Salzes. Der Brechungsexponent des reinen Chlorsilbers ist etwa zwei, für chlorärmere Verbindungen vermuthlich noch grösser. Wenn also ein Lichtstrahl auch unter beträchtlichem Einfallswinkel auf das Chlorsilber fällt, so wird er innerhalb desselben vermöge der starken Brechung doch nahe senkrecht zur Oberfläche sich fortsetzen und der Gangunterschied der Interferenz wird gegenüber senkrechtem Einfall nur unmerklich geändert.

Der Brechungsexponent der empfindlichen Schicht bei Lippmann's Verfahren dagegen, welche in der Hauptmasse aus Collodium oder Gelatine besteht, ist nur etwa 1,5. Dort ist der Einfallswinkel von Einfluss, die Farben ändern sich mit demselben in unerwünschter Weise.

Die Interferenznatur der Farben und der geschichtete Bau bei Lippmann'schen Gelatineplatten lässt sich noch in anderer Weise erkennen. Verschiedene Beobachter[2]) hauchten auf solche Platten und sahen an die Stelle der ursprünglichen Farben solche von grösserer Wellenlänge treten; dies beweist, dass die Farben von einem veränderlichen Abstand abhängen, nämlich dem der Elementarspiegel im Innern, welcher durch die Aufquellung der Gelatine vergrössert wird.[3])

---

1) Zenker, Photochromie p. 85.

2) Meslin, Ann. de chim. et de phys. 6. Ser. 27. p. 381. 1892; Krone, „Darst. der natürl. Farben" p. 66; Valenta, „Die Photographie in natürlichen Farben", p. 68. Halle a. S., Verlag von Wilh. Knapp. 1894.

3) Mit Unrecht glaubt Dr. Neuhauss (Photogr. Rundschau p. 295. 1894) gegen das Zutreffen der Zenker'schen Theorie bei Lippmann's Verfahren aus einer bei den unentwickelten Platten beobachteten Korngrösse bis 0,0003 mm einen Einwand herleiten zu können. Nicht vollkommene Kornlosigkeit, wie er meint, sondern ausreichende Durchsichtigkeit ist erforderlich für das Zustandekommen stehender Lichtwellen.

Ich habe diesen Versuch wiederholt und vor grösserer Zuhörerschaft das Hauchen durch Anblasen mit einem Dampfstrahl ersetzt; in dem auf die Wand geworfenen Bild des photographirten Spectrums verschoben sich dann die Farben mit grosser Geschwindigkeit nach dem violetten Ende zu und kehrten ebenso wieder zurück, als die Feuchtigkeit durch eine Bunsenflamme aus der Gelatineschicht wieder vertrieben wurde.

Dieser Versuch lässt sich aber bei den alten Verfahren nicht anstellen.

Zenker[1]) versuchte den Lichtstrahlen im Chlorsilber eine grössere Neigung gegen die Oberflächennormale zu geben, indem er sie erst durch eine Flüssigkeit von hohem Brechungsexponent hindurchschickte; doch ohne Erfolg. Dieser muss ausbleiben, so lange nur eine planparallele Schicht eines solchen Körpers benutzt wird. Denn durch die Brechung in diesem wird der ursprüngliche Einfallswinkel wieder verkleinert.

Eine solche Verkleinerung kann nicht eintreten, wenn der Lichtstrahl durch eine senkrechte Grenzfläche in den aufgelegten Körper eintritt: hier hatte ein neuer Versuch einzusetzen.

Ich benutzte ein rechtwinkliges Glasprisma vom Brechungsexponent $n_D = 1{,}75$, welches mit der Hypotenusenfläche auf das Farbenbild aufgelegt wurde, indem die zwischenliegende Luftschicht durch Benzol verdrängt wurde. Für die durch eine Seitenfläche senkrecht eintretenden Lichtstrahlen ist dadurch ein Einfallswinkel von 45° in stark brechendem Mittel erzwungen und der in das Chlorsilber eintretende Strahl muss so einen beträchtlichen Winkel mit der Oberflächennormale bilden. Der Gangunterschied der interferirenden Lichtwellen wird dadurch gegenüber senkrechtem Einfall stark verändert; und je nachdem die Farben sich dabei ändern oder nicht, sind sie Interferenz- oder Körperfarben. Beschreibung und Theorie dieses Prismenversuches folgen in Abschnitt 6.

War nun das Spectrum nach dem Verfahren von Becquerel hergestellt, so hat man den überraschenden Anblick, dass ein durch das Prisma betrachteter Theil des Spectrums im Vergleich zu dem freigelassenen, unmittelbar durch Luft betrachteten, bedeutend gegen das äusserste Roth zu verschoben erscheint.

1) Zenker, Photochromie p. 85.

Gerade diese Farbenverschiebung ist zu erwarten, wenn die Zenker'sche Theorie richtig ist.

Zenker gebührt also das Verdienst, die Ursache der Farbenwiedergabe bei dem Becquerel'schen Verfahren schon im Jahre 1868 richtig in der Wirkung stehender Lichtwellen erkannt zu haben.

Der photographische Stoff ist nun bei dem Seebeck'schen Verfahren derselbe. Der einzige Unterschied liegt in der Form. Seebeck benutzte Pulver, Becquerel eine homogene Schicht von chlorürhaltigem Silberchlorid. Die Farbenverschiebung beim Prismenversuch ist also in der gleichen Stärke wie bei der Becquerel'schen Platte zu erwarten, wenn die Ursache der Farbenentstehung die gleiche ist. Die Verschiebung ist aber in Wirklichkeit nicht vorhanden, ebensowenig bei dem Poitevin'schen Verfahren:

Der Einwand von Schultz-Sellack erweist sich gerade bei den Verfahren stichhaltig, bei denen er von vornherein zulässig erscheint.

Denn in feinem Pulver und in Papier können keine regelmässigen stehenden Wellen zu Stande kommen.

Mit Recht wird man aber fragen: warum entstehen auf der Becquerel'schen Platte nicht auch Körperfarben, die doch die gleichen Stoffe enthält wie die Seebeck'sche? Es erscheint ja nicht ausgeschlossen, dass dort neben den nachgewiesenen Interferenzfarben noch Körperfarben auftreten. In der That konnte ich zeigen, dass bei dem Becquerel'schen Verfahren auch Körperfarben mitwirken. Die Beweise dafür sind in Abschnitt 11 enthalten. Die Farben der Platten von Seebeck und Poitevin dagegen sind ausschliesslich Körperfarben.

Es gibt also Verfahren der Farbenphotographie, die sich nicht durch die Zenker'sche Theorie erklären liessen:

Es gibt Stoffe, in denen farbige Beleuchtung übereinstimmende Körperfarben erzeugt, die ihre Farbe also nicht der Interferenz, sondern einer ihnen eigenthümlichen, durch die chemische Beschaffenheit bedingten Absorption verdanken.

Wie ist aber solcher Vorgang denkbar? Der Gedanke einer möglichen Antwort kam mir beim Lesen der genannten Arbeit Carey Lea's. Die erwähnten verschiedenfarbigen Ver-

bindungen von Chlor und Silber sind nach ihm Molecularverbindungen von Silberchlorid und -chlorür, jedoch nicht durch bestimmte Verhältnisszahlen ausdrückbar. Er fasst sie unter dem Namen Photochlorid zusammen. Die nämlichen farbigen Verbindungen entstehen auch unter Einwirkung des Lichtes auf einem Grunde, der aus Silberchlorid und -chlorür besteht, wie es z. B. bei Seebeck's Verfahren der Fall ist. Dass solche Verbindungen überhaupt durch Belichtung entstehen, bietet dem Verständniss keine Schwierigkeit.

Warum aber entstehen die mit der Beleuchtungsfarbe gleichfarbigen Verbindungen? Was hat z. B. bei rother Beleuchtung ein rothes Photochlorid für einen Vorzug gegenüber einem andersfarbigen?

Es hat den physikalischen Vorzug, diese Farbe besser zu reflectiren, als die andersfarbigen Verbindungen. Farbiges Licht aber, das reflectirt wird, wird nicht absorbirt und kann daher auch keine Zersetzung hervorbringen, für welche die Absorption des Lichtes Vorbedingung ist. Von allen möglichen Verbindungen, welche aus dem durch die Belichtung gestörten chemischen Gleichgewicht hervorgehen können, besitzt also die rothe Verbindung den Vorzug der Unzerstörbarkeit bei fortgesetzter Beleuchtung. Nach den Vorstellungen der kinetischen und neueren chemischen Theorien müssen wir aber annehmen, dass bei dem gestörten Gleichgewicht alle möglichen Verbindungen zeitweilig thatsächlich von einigen Molecülgruppen gebildet werden. Von diesen bleiben aber nur die rothen dauernd ungestört, während die andersfarbigen das rothe Licht absorbiren und also dadurch auch wieder zerstört werden können.

Dies ist eine Vorstellung von dem Vorgang, der sich ungezwungen aus anerkannten Thatsachen und Anschauungen ergiebt.

Ihre Richtigkeit lässt sich leicht prüfen; denn sie verlangt z. B. die Zersetzbarkeit der rothen Verbindung durch andere als die rothe Beleuchtung, die Unzersetzbarkeit durch diese selbst.

Ein solches Experiment liegt bereits unter den Versuchen Carey Lea's[1]) vor. Er entwarf auf rosafarbigem Photochlorid

1) Carey Lea, Amer. Journ. of Sc. (3.) **33**. p. 363. 1887.

ein Spectrum; alle Farben veränderten es, indem sie mehr oder weniger gut ihre eigene Farbe demselben aufprägten mit Ausnahme des Roth: „in the red it remained unchanged."

Ich selbst stellte zur Prüfung der gegebenen Erklärung Versuche an, bei denen die empfindliche Platte der Reihe nach zwei unter rechtem Winkel gekreuzten Spectren ausgesetzt wurde. Dieselben werden in Abschnitt 13 mitgetheilt und erweisen die Richtigkeit der gegebenen Erklärung.

Einen Stoff, welcher die von jener Erklärung behufs vollkommener Farbenwiedergabe geforderten Eigenschaften besitzt, nenne ich einen *farbenempfänglichen Stoff*. Diese Eigenschaften werden im Abschnitt 12 genau erörtert.

Durch jenen Zusammenhang ist eine neue Grundlage für weitere Verfahren der Farbenphotographie geschaffen. Denn der Vorgang ist nicht an bestimmte Stoffe gebunden. Es erscheint jeder Farbstoff, der unter bestimmten Umständen vom Licht zersetzt werden kann, geeignet, bei neuen Verfahren mitzuwirken.

Freilich scheint mit der Entstehungsweise dieser Farben ihre Unfähigkeit sich fixiren zu lassen, grundsätzlich verbunden zu sein. Denn ihr Vermögen der Farbenwiedergabe ist an ihre Zersetzbarkeit im Lichte geknüpft. In der That besassen die Farben bei jenen alten Verfahren nur einen geringen Grad der Fixirbarkeit. In welcher Weise diese vielleicht doch zu erreichen ist, wird im Abschnitt 14 erörtert.

Was noch das Zustandekommen der Farbenwiedergabe betrifft, so nennt man die Erwerbung der Widerstandsfähigkeit gegen äussere Einwirkungen eine Anpassung. Daher könnte man die so entstandenen Farben *Anpassungsfarben* nennen, wobei man sich bewusst bleibt, dass es sich um einen physikalisch-chemischen, im letzten Grunde mechanischen Vorgang handelt. Eine derartige Anpassung kann man als eine *mechanische Anpassung* bezeichnen.

Es liegt hier die Frage nahe, sollte nicht auch die farbenreiche Natur farbenempfängliche Stoffe hervorbringen, deren Eigenschaften also mit denen der Träger jener Farbenphotogramme übereinstimmen? Sollten nicht gewisse Anpassungsfarben in der Natur sich auch auf diesem Wege erklären?

Freilich denkt man sich die Anpassung in der Natur fast

stets nach dem Darwin'schen Grundsatz der natürlichen Züchtung durch Auslese der vortheilhaft abändernden Lebewesen entstanden. Eine solche biologische Anpassung meine ich nicht, sondern eine mechanische.

Diese Vermuthung scheint sich in der That zu bestätigen durch Beobachtungen, die ich in biologischen, durch die Freundlichkeit von Prof. Dr. Oltmanns aus Freiburg mir empfohlener Werke mitgetheilt fand.

Zunächst stiess ich auf die folgenden Bemerkungen in dem Werke von Theodor Eimer „Die Entstehung der Arten auf Grund von Vererben erworbener Eigenschaften nach den Gesetzen organischen Wachsens. Ein Beitrag zur einheitlichen Auffassung der Lebewelt".[1])

Eimer tritt einer zu weitgehenden Werthschätzung der biologischen Anpassung für die Uebereinstimmung der Färbung eines Thieres mit der Umgebung entgegen und weist auf die bei raschen Farbenänderungen mögliche chemische Wirkung des Lichtes hin. Man hat beobachtet, „dass Schmetterlingspuppen während ihrer Entwickelung von der Farbe ihrer Umgebung derart beeinflusst werden, dass sie diese Farbe annehmen", „z. B. die rothe Farbe eines sie umhüllenden Tuches." Zur Erklärung dieser merkwürdigen Beobachtung nimmt er an, dass der Stoff, aus welchem die Puppenhülle gemacht ist, „derart beschaffen ist, dass er das vom Menschen zur Zeit so sehnlich erstrebte Ziel der Farbenphotographie erfüllt."[2])

Bei der Möglichkeit solchen Zusammenhanges wird man es als berechtigt anerkennen, dass ich ihn hier zur Sprache bringe, auch ohne ihn durch eigene Versuche bestätigen zu können. Es wäre mir auch kaum möglich, in Kurzem etwas Neues hinzuzufügen zu den vortrefflichen, eingehenden und langjährigen Versuchen, welche Poulton[3]) über die Farbenanpassung der Raupen und ihrer Puppen angestellt hat.

Nach diesen ist man zweifelsohne in den von ihm untersuchten Fällen nicht berechtigt, die Raupenhaut unmittelbar mit einer photographischen Platte zu vergleichen. Es treten noch physiologische Vorgänge hinzu. Gleichwohl werde ich

1) Eimer, Jena, Verl. v. Gustav Fischer 1888.
2) l. c. p. 155.
3) Poulton, Die Citate vgl. in Abschnitt 15.

an Hand der Beobachtungen Poulton's zu zeigen versuchen, dass das Pigment der Raupenhaut während der empfindlichen Stadien in einem gewissen Maasse die Eigenschaften eines farbenempfänglichen Stoffes besitzt.

Wenn aber mechanische Anpassung in diesem Fall vorlag, kann sie dann nicht eine allgemeinere Mitwirkung bei der Gestaltung der Lebewelt haben?

Auch diese Vermuthung fand ich bestätigt, zunächst in einem Aufsatz von August Weismann „Aeussere Einflüsse als Entwicklungsreize".[1])

Er benennt den hier als mechanische Anpassung bezeichneten Vorgang, sofern er sich an Lebewesen abspielt, als „Intraselection"[2]) und beruft sich auf das 1881 erschienene Werk von Wilhelm Roux „Der Kampf der Theile im Organismus, ein Beitrag zur Vervollständigung der mechanischen Zweckmässigkeitslehre".[3]) Dieser bezeichnet den Vorgang als „functionelle Anpassung" und bespricht denselben in allgemeinster Weise als entstanden durch den „Kampf der Molecüle", „Kampf der Zellen".[4]) Unter „Molecüle" versteht er die kleinsten organischen Processeinheiten. Im vorliegenden Falle wäre „Molecüle" wörtlich zu nehmen.

In der That lässt sich die Wiedergabe der Beleuchtungsfarbe durch einen Körper treffend in bildlicher Ausdrucksweise erklären durch den Sieg der mit ihr gleichfarbigen Molecüle im Kampfe mit den andersfarbigen, errungen durch die Fähigkeit, das ankommende Licht am besten zurückzuwerfen.

Damit führt die Anwendung der Erklärung alter Verfahren der Farbenphotographie auf die Erklärung gewisser Anpassungsfarben in der Natur zu der Unterordnung dieser Erscheinung unter allgemeinere Erscheinungsgruppen, welche als Vorgänge mechanischer Anpassung anerkannt werden.

Ich gehe nun zu den experimentellen Beweisen und der genaueren Begründung und Ausführung des Gesagten über.

---

1) A. Weismann, Jena, Verl. v. Gustav Fischer 1894.

2) p. 6.

3) W. Roux, Leipzig, Verl. v. Wilhelm Engelmann.

4) Der Kampf der Gewebe und Kampf der Organe ist, wie Roux selbst bemerkt, nicht auf gleiche Linie zu setzen, weil dabei nicht gleichartige Theile in Kampf treten.

Zuvor drängt es mich aber den Hrn. Arzruni, Grotrian, Holzapfel und Wüllner, Professoren an der hiesigen technischen Hochschule meinen Dank für ihre Unterstützung auszusprechen. Da ich leider manche feinere Farbenunterschiede schwer beurtheile, gebe ich keine Farbenbeobachtungen hier wieder, ohne dass sie von einem oder mehreren der Herren angestellt oder als richtig bezeichnet worden wären.

2. Apparate und Verfahren.

Zum Photographiren des Spectrums diente ein Steinheil'scher Spectralapparat, dessen Ocular durch eine kleine photographische Kammer ersetzt war. Dieselbe konnte in ein Rohr eingeschraubt werden, das in das Fernrohr passte. Die Einstellung geschah mittels einer Mattscheibe.

Die Spaltweite betrug etwa 1 mm, wo grosse Helligkeit, etwa 0,5 mm. wo mehr Reinheit des Spectrums gewünscht war. Die Länge des Spectrums betrug von A bis H_2 19,2 mm. Seine Höhe war gewöhnlich auf 15—18 mm abgegrenzt.

Als Lichtquelle diente meist der electrische Bogen einer grossen Schuckert'schen Lampe bei einer durchschnittlichen Stromstärke von etwa 30 Amp. und einer Dicke der positiven Kohle von 23 mm. Die Kohlen hatten eine Neigung von 45° gegen die Lothlinie, sodass die grösste Lichtstärke in nahezu wagrechter Richtung ausgesandt wurde. Die Belichtungszeit betrug meist eine halbe bis eine Stunde, wenngleich unter günstigen Bedingungen schon nach wenigen Minuten Farben auftraten.

Als Seebeck'sches[1]) Verfahren bezeichne ich allgemein dasjenige mit vorbelichtetem Chlorsilberpulver.

Ich benutzte dazu reines, im Dunkeln gefälltes und dann getrocknetes Chlorsilberpulver, brachte es dann zwischen zwei Glasplatten und verkittete deren Ränder.

Die Vorbelichtung geschah Anfangs bei einigen Platten mit violettem und ultraviolettem, später rascher mit weissem Licht. Sie wird so lange fortgesetzt, bis das Pulver eine nicht zu dunkle violette Färbung angenommen hat.

1) Vgl. Citat p. 226. Die sämmtlichen Verfahren finden sich in den Büchern von Zenker (vgl. p. 225) und Krone (vgl. p. 227) beschrieben.

Becquerel[1]) hat unter verschiedenen Abänderungen gearbeitet. Ich benutzte ausschliesslich und bezeichne hier als Becquerel'sches Verfahren das ihm eigenthümliche mit galvanisch chlorirter Silberplatte, jedoch ohne nachfolgende Erwärmung.

Dazu dienten mir blank polirte galvanisch versilberte Kupfer- oder Messingplatten oder dünne Silberblechplatten selbst. Dieselben wurden in einer verdünnten Salzsäurelösung (1 : 8) als positive Electroden eines Stromes von 2—4 Amp. auf ca. 30 cm^2 Fläche einige Secunden eingetaucht. Die nach Becquerel als günstigste zu erstrebende Dicke des entstehenden Chlorsilberhäutchens wird etwa erreicht bei einer Strommenge, welche für 1 cm^2 Silberoberfläche 0,067 cm^3 Wasserstoff auszuscheiden vermöchte. Jene Dicke beträgt nach einer nicht genau ausführbaren Rechnung etwa 0,0016 mm. Die Platte wird nachher rasch zwischen Fliesspapier getrocknet und dann mit weichem Leder abgerieben.

Poitevin's[2]) Verfahren wurde von Zenker und Krone bearbeitet und vervollkommnet.[3])

Nach ihren Vorschriften badete ich Rives-Rohpapier in 10 proc. Kochsalzlösung zwei Minuten lang, dann eine Minute in 8 proc. Lösung von salpetersaurem Silber. Das rasch gewaschene Blatt wird dann in einer Zinnchlorürlösung aus 5 g Zinnchlorür auf 100 cm^3 Wasser dem diffusen Tageslicht ausgesetzt, bis es zu einem gewissen nicht zu hohen Grade dunkel geworden, darauf in einer Mischung von einem Theil concentrirter Kaliumbichromatlösung und zwei Theilen concentrirter Kupfervitriollösung gebadet und zwischen Filtrirpapier aufbewahrt. Es ist gut, das etwa getrocknete Papier vor der Belichtung ein wenig anzufeuchten.

Eine Entwicklung findet natürlich bei keinem dieser Verfahren statt, sondern die Farben entstehen während der Beleuchtung.

Eine Fixirung, die bei dem letzten Verfahren in geringem Grade möglich ist, habe ich nicht vorgenommen.

1) Edmond Becquerel, Ann. de chim. et de phys. (3) **22.** p. 451. 1848; **25.** p. 447. 1849; **42.** p. 81. 1854; vgl. auch E. Becquerel „La Lumière" **2.** p. 209. Paris, Firmin Didot Frères, Fils et Cie. 1868.

2) Poitevin, Compt. rend. **61.** p. 1111. 1865.

3) Vgl. die erwähnten Werke.

3. Chemisches Verhalten des Chlorsilbers bei Belichtung und Electrolyse.

Es ist neuerdings von Guntz[1]) endgültig nachgewiesen worden, dass bei der Belichtung des Chlorsilbers Silberchlorür entsteht.

Das reine, nicht vorbelichtete Silberchlorid erweist sich nach Becquerel[2]) unter dem Spectrum im wesentlichen nur für Violett und Ultraviolett lichtempfindlich und nimmt dabei eine violette Färbung an. Ich habe diesen Versuch mit demselben Ergebniss wiederholt.

Das so vorbelichtete aus Silberchlorid und -Chlorür bestehende Pulver ist aber für alle Spectralfarben empfindlich und gibt dieselben in gewissem Grade wieder.

Es wäre wünschenswerth gewesen zu erfahren, wie das reine Silberchlorür im Spectrum verändert wird. Hr. Dr. Hermens, Assistent am techn.-chem. Laboratorium der hiesigen Hochschule, hatte die grosse Freundlichkeit, mir solches nach den Vorschriften von Guntz[3]) herzustellen. Es scheint aber sehr schwer zu sein, dasselbe ohne jede Beimengung von Silberchlorid zu gewinnen; auch Guntz hatte kein reines Silberchlorür.

Das chemisch hergestellte Silberchlorür verhielt sich unter dem Spectrum wie vorbelichtetes Chlorsilber. Dieser Versuch bildete also nach dem Gesagten eine Bestätigung des Guntz'schen Nachweises der Bildung von Silberchlorür durch Belichtung von Silberchlorid. Jenes Gemisch von Silberchlorür und -Chlorid hatte auch das violette Aussehen des vorbelichteten Chlorsilbers.

Das nach Becquerel galvanisch hergestellte Chlorsilber enthält ebenfalls eine Beimengung von Silberchlorür. Denn es ist für alle Strahlen des Spectrums lichtempfindlich. Es kann aber auch nicht ausschliesslich aus Silberchlorür bestehen. Denn ich erhielt einmal eine Platte, welche nur violett und ultraviolett empfindlich war. Sie enthielt also nur Silberchlorid.

1) Guntz, Compt. rend. **113.** p. 72. 1891.

2) Becquerel, Ann. de chim. et de phys. (3.) **22.** p. 452. 1848; vgl. auch Zenker, Photochromie p. 18.

3) Guntz, Compt. rend. **112.** p. 861. 1891.

Ich hatte bei ihrer Herstellung nicht auf die Versuchsbedingungen geachtet. Sie war aber wahrscheinlich bei einem sehr schwachen Strom entstanden. Denn es gelang mir später mit einem Strom von 0,2 Amp. eine Platte herzustellen, welche im Ultravioletten stark, im sichtbaren Spectrum aber nur sehr wenig lichtempfindlich war.

Man muss also annehmen, dass eine solche Becquerel'sche Platte zum grössten Theil aus Silberchlorid besteht, zum geringeren aus Silberchlorür, dessen Menge bei stärkeren Strömen grösser wird. In Uebereinstimmung damit erscheint die von der Silberunterlage abgehobene Schicht in der Durchsicht hellviolett.

4. Die Genauigkeit der Farbenwiedergabe bei den alten Verfahren.[1])

Becquerel's Platten geben die Farben bei weitem am besten wieder. Sie erscheinen glänzend, ähnlich denjenigen bei Lippmann'schen Platten, und an den richtigen Stellen.

Bei den beiden anderen Verfahren sind die Farben matter und nicht so genau im Farbenton wiedergegeben.

Die Seebeck'schen Platten zeigen ausser Violett nur Blau und Roth deutlich, das Letztere aber als eine Art Rosarot, das Erstere oft als Graublau, ausserdem Grün meist sehr undeutlich, Gelb meist nicht zu erkennen; jedoch tritt hier stets eine bedeutende Aufhellung des violetten Untergrundes ein.

Das Poitevin'sche Verfahren ist dem Seebeck'schen überlegen; es erscheinen alle Farben; es herrscht aber leicht ein gelbbrauner Ton vor. Die gelben Theile des Spectrums werden durch ein mehr orangefarbenes Bild wiedergegeben, ähnlich der Farbe eines mit Kaliumbichromatlösung durchtränkten Papieres.

5. Unrichtigkeit der Erklärung der Farbenwiedergabe nach Schultz-Sellack.

Eine durchsichtige Jodsilberschicht, die durch Jodiren eines auf Glas chemisch niedergeschlagenen Silberspiegels entstanden ist, wird nach Schultz-Sellack[2]) durch Belichtung nicht

1) Vgl. auch Zenker l. c.

2) Schultz-Sellack, „Ueber die chemische und mechanische Veränderung der Silberhaloidsalze durch das Licht." Pogg. Ann. **143.** p. 439. 1871.

chemisch verändert, da ihr der Jod absorbirende Körper fehlt, dagegen mechanisch: die Oberfläche wird in ein feines Pulver zerlegt.

Ich betrachtete eine solche Schicht unter dem Mikroskop und bestimmte den Durchmesser der Pulverkörner zu etwa 1 μ (Tausendstel mm), die Zwischenräume zu 0 bis etwa 3 μ; durch sie hindurch erschien die gelbe noch unversehrte Jodsilberschicht.

Die Reihenfolge der unter Einwirkung des Sonnenlichtes entstehenden Durchlassfarben ist nach Schultz-Sellack: Gelbbraun, Dunkelbraun bei starker Trübung, Roth, Grün, Blau, Hellbläulichweiss; zuletzt wird die Schicht bei schwacher Trübung fast völlig farblos durchsichtig.

Auch ich beobachtete solche Farben; doch da mir kräftiges und anhaltendes Sonnenlicht fehlte, benutzte ich electrisches Licht, mit dem ich keine gleichmässigen Wirkungen erhielt: gleich lang belichtete Theile einer Jodsilberschicht erhielten verschiedene Farben.

Aber nur die violetten und ultravioletten Strahlen vermögen diese mechanische Zertheilung hervorzubringen, wie ich Schultz-Sellack bestätigen kann.

Es liegt also hier die Möglichkeit vor verschiedene Farben zu erzeugen allein durch verschiedene Stärke und Dauer der Belichtung. Eine Abbildung der Farben kann somit scheinbar erhalten werden „vermöge der verschiedenen Intensität des violetten Lichtes, welches durch rothes, grünes und blaues Glas hindurchgeht.“ Denn in gleicher Reihenfolge entstehen die gleichen Durchlassfarben im Jodsilber.

Diese Farben hält Schultz-Sellack für Beugungsfarben, weil sie am kräftigsten erscheinen, wenn man die Platte aus einem dunkeln Zimmer gegen eine kleine Lichtöffnung hin beobachtet. In der That sind die Farben bei allseitiger Beleuchtung nur sehr matt.

Indess fehlt ihnen die wesentliche Eigenschaft der Beugung: sie erscheinen nicht aus der ursprünglichen Richtung abgelenkt, wie bei Gittern, sondern in Richtung der jeweils durchgehenden und reflectirten Strahlen.

Freilich sind es auch keine gewöhnlichen Dickenfarben des Jodsilbers; denn die Farben ändern sich, „wenn man

die Luft in den Zwischenräumen durch Wasser oder Firniss ersetzt."

Mit dieser Beobachtung verträglich wäre aber die Annahme, dass sie durch Interferenz des durch die abgetrennten Jodsilbertheilchen und des unmittelbar daneben durch die Zwischenräume dringenden Lichtes entstehen.

Ich verzichte aber der Kürze wegen auf die nähere Begründung dieser Ansicht; denn es fragt sich hier nur: lässt sich die Farbenwiedergabe bei den alten Farbenphotographieen nach Schultz-Sellack durch Farben erklären, welche infolge mechanischer Zertheilung der Schicht auftreten könnten und die daher hier *Zertheilungsfarben* genannt werden sollen.

Eine wesentliche Schwierigkeit für eine solche Erklärung entsteht schon dadurch, dass sie sich auf die Durchlassfarben bezieht, während bei jenen Verfahren die Farben im reflectirten Licht wiedergegeben sind.

Da aber die Zertheilungsfarben aus der Durchlass-, bez. Reflexionsrichtung nicht abgelenkt erscheinen, folgt, weil sie jedenfalls durch Interferenz entstehen, dass reflectirtes und durchgelassenes Licht zu einander komplementär sein müssen, abgesehen von der geringen Absorption im Jodsilber. Thatsächlich stellte ich z. B. fest, dass an Stelle eines metallischen Gelbgrün im senkrecht reflectirten Licht, im durchgehenden bläulich Violett, an Stelle von Blau Gelb trat. Somit kann für die Farben des reflectirten Lichtes nicht die Schultz-Sellack'sche Reihenfolge gelten, wonach die brechbareren bei längerer oder stärkerer Lichtwirkung auftreten.

Auch der blosse Anblick der Farben der alten Farbenphotographieen spricht gegen Schultz-Sellack. Sie erscheinen bei allseitiger Beleuchtung z. B. am hellen Fenster sehr gut, während die Zertheilungsfarben hier erblassen. Diese erfordern beim Betrachten von vorn unmittelbar reflectirtes Licht, bei jenen stört das bei glatter Oberfläche, z. B. der Becquerel'schen Platten; das an ihr reflectirte Licht überblendet dann das aus der Tiefe kommende.

Die Zertheilungsfarben erleiden ferner nach seiner Beobachtung im reflectirten Licht eine Aenderung mit wachsendem Einfallswinkel; auch ich stellte eine solche fest z. B. von Metallgelb zu Blaugrau und wieder zu Metallgelb. Bei den alten

Verfahren hatte man bisher eine solche Aenderung überhaupt noch nicht festzustellen vermocht.

Die Erklärungsweise von Schultz-Sellack lässt sich aber einer entscheidenden Prüfung unterwerfen. Wenn den verschiedenen Beleuchtungsfarben keine verschiedenen Arten sondern nur verschiedene Stärken der Einwirkung auf die empfindliche Schicht zukommen, mithin nur durch letztere die Farben bestimmt werden, so müssen alle Beleuchtungsfarben zu Beginn der Belichtung dieselbe Farbe erzeugen und mit wachsender Dauer in gleicher Farbenfolge diejenigen Farben hervorbringen, welche durch ihre verschiedenen Wirkungsstärken bedingt sind.

Einem solchen Verhalten widerspricht die Beobachtung von Becquerel, wonach die mit den Beleuchtungsfarben übereinstimmenden Farben gerade zu Anfang am reinsten, wenn auch schwach ausgeprägt sind. Die Anfangswirkung beginnt also nicht mit untereinander gleichen, sondern verschiedenen Farben.

Zur bequemeren Prüfung setzte ich auf einer empfindlichen Schicht nebeneinander liegende Felder verschieden lange der Beleuchtung durch das Spectrum aus. Dazu wurde vor dem Spalt des Apparates eine Blende ruckweise vorgeschoben. So konnte man nach beendetem Versuch auf der Schicht die Anfangswirkung der verschiedenen Beleuchtungsfarben mit einem Blick übersehen. Es stellte sich dabei heraus, dass diese nicht untereinander gleiche, sondern verschiedene Farben erzeugten, welche den Farben der Beleuchtung jeweils gleich oder ähnlich waren.

Es sei hier eine genauere durch Hrn. Prof. Dr. Grotrian angestellte Beobachtung an einer nach Becquerel's Verfahren hergestellten Platte mitgetheilt:

1. Feld. 1 Min. Belichtungsdauer. Spur Roth. Gelb und Grün nur zu bemerken, wenn Feld 2 noch zur Beobachtung zugezogen wird. Blau fehlt.

2. Feld. 2 Min. Roth stärker. Gelb und Grün zu erkennen. Blau fehlt.

3. Feld. 4 Min. Roth, Gelb, Grün stärker. Blau noch kaum zu erkennen.

4. Feld. 8 Min. Roth, Gelb, Grün stärker. Blau zu erkennen.

5. Feld. 16 Min. Roth, Gelb, Grün stärker. Blau noch schwach.

6. Feld. 32 Min. Alle Farben stärker.

Die Wirkung im Ultraviolett erscheint erst im zweiten Feld, also nach Roth.

Roth ist also hier die zuerst deutlich auftretende Farbe und erscheint unter rother Beleuchtung. Diese müsste also nach Schultz-Sellack bei den bestehenden Stärkeverhältnissen der verschiedenen Beleuchtungsfarben von allen die wirksamste und gleichzeitig Roth die erste Stufe der Zertheilungsfarben sein. Andere Farben, also höhere Stufen derselben dürften demnach zuerst nur durch die rothe Beleuchtung entstehen, die anderen Beleuchtungsfarben dürften zuerst nur Roth erzeugen.

Die Beobachtung lehrt das Umgekehrte: die anderen Farben entstehen unter anderen Beleuchtungsfarben, während das Roth unter der rothen Beleuchtung sich noch nicht in eine andere Farbe verwandelt hat, im Gegentheil kräftiger geworden ist.

Der nämliche Versuch wurde mit Seebeck's und Poitevin's Platten angestellt mit gleichem Ergebniss: ehe die zuerst erschienene Farbe sich verändert hat, treten an anderen Stellen andere Farben auf.

Schultz-Sellack's Erklärung der Farbenentstehung bei den alten Verfahren der Farbenphotographie durch Zertheilungsfarben ist also unrichtig.

Natürlich ist damit nicht gesagt, dass die Beleuchtungsstärke ohne jeden Einfluss auf die entstehenden Farben sei. Ein solcher ist so gut vorhanden wie bei dem Lippmann'schen Verfahren[1]), das erwiesener Maassen auf anderer als der von Schultz-Sellack angenommenen Grundlage beruht, aber aus anderen Gründen. Zur Widerlegung seiner Behauptung ist aber nicht der Nachweis einer vollkommenen Unabhängigkeit der Farben von der Lichtstärke erforderlich, sondern nur des Fehlens der von ihm geforderten Beziehung zwischen beiden.

1) Vgl. z. B. Krone, Wied. Ann. **46.** p. 428. 1892.

6. Der Prismenversuch.

Das Prisma wird so auf die eine Hälfte des photographirten Spectrums gelegt, dass die Kante zwischen der Hypotenusen- und der Kathetenfläche I (Fig. 1) senkrecht die Richtung gleicher Farbenlinien durchschneidet. Das Auge des Beobachters wird in der Verlängerung derselben Kathetenfläche I so eingestellt (der Pfeil bezeichnet die Sehrichtung), dass ein in Richtung gleicher Farben, z. B. im Gelb, vor dem Versuch gezogener Strich (S) durch Prisma und Luft betrachtet in derselben Linie erscheint.

Es ist dann zu berechnen, welche Farbenänderung die Stelle beim Strich unter dem Prisma gegenüber der in Luft erleiden muss, wenn das Farbenbild durch stehende Lichtwellen hervorgerufen war.

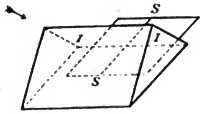


Fig. 1.

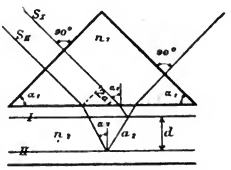


Fig. 2.

Es erscheint allgemein die Farbe, deren Wellenlänge der Gangunterschied zweier an benachbarten Elementarspiegeln reflectirten Strahlen ist.

Seien I und II in Fig. 2 zwei solche Elementarspiegel vom Abstand d in einem Mittel vom Brechungsexponenten n_2. Die Strahlen mögen im allgemeinsten Fall unter dem Winkel α_1 einfallen in einem gleichschenkeligen Prisma vom Brechungsexponenten n_1 und einem Basiswinkel α_1, so dass die Strahlen auf Hin- und Rückweg die Schenkelflächen senkrecht durchsetzen.

Die planparallele Flüssigkeitsschicht zwischen Prisma und photographischer Schicht hat keinen Einfluss auf den Gangunterschied der interferirenden Strahlen S_I und S_{II}, ebensowenig die übereinstimmenden Phasenänderungen bei Reflexion an I und II.

$2\,a_2$ sei der Wegüberschuss von S_{II} gegenüber S_I in der

Schicht, α_2 der Neigungswinkel von S_{II} innerhalb der Schicht gegen die Spiegelnormale.

$2\,a_1$ sei der Wegüberschuss von S_I über S_{II} im Prisma.

Der Wegunterschied zwischen S_{II} und S_I ist dann in Wellenlängen gemessen, wenn λ diejenige in Luft bedeutet:

$$D = 2\,a_2 \frac{n_2}{\lambda} - 2\,a_1 \frac{n_1}{\lambda}.$$

Nun ist:

$$a_2 = \frac{d}{\cos \alpha_2}; \quad a_1 = d \,.\, \mathrm{tg}\, \alpha_2 \sin \alpha_1,$$

also:

$$D = \frac{2\,d}{\lambda} \frac{n_2 - n_1 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\cos \alpha_2},$$

da nun:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2,$$

so ist auch:

$$D = \frac{2\,d\,n_2}{\lambda} \cos \alpha_2 = \frac{2\,d\,n_2}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \alpha_1}.$$

Bei der gewöhnlichen Art die photographische Schicht zu betrachten, blickt man in Luft senkrecht auf sie. Dann ist $\cos \alpha_2 = 1$ und

$$D = \frac{2\,d\,n_2}{\lambda}.$$

Der Gangunterschied der beiden Strahlen ist eine Wellenlänge, wenn $D = 1$ ist, da D in Wellenlängen gemessen war. Es erscheint also die Farbe, deren Wellenlänge ist:

$$\lambda_0 = 2\,d\,n_2,$$

also dieselbe, welche die stehenden Wellen erzeugt hatte.

Im allgemeinen Fall aber wird $D = 1$ für eine andere Wellenlänge:

$$\lambda = 2\,d\,n_2 \cos \alpha_2 = \lambda_0 \cos \alpha_2.$$

Man erhält sie also, indem man λ_0 mit einem Factor

$$f = \cos \alpha_2 = \frac{\lambda}{\lambda_0}$$

multiplicirt. Er bestimmt den Grad der Farbenänderung, d. h. das Verhältniss der Wellenlänge der geänderten und ursprünglichen Farbe.

Derselbe werde bei einem Einfall unter 45^0 in Luft mit f_l, im Prisma mit f_p bezeichnet.

Dann ist:

$$f_l = \sqrt{1 - \frac{1}{2n_2^2}}, \tag{1}$$

$$f_p = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{2n_2^2}}. \tag{2}$$

Das Verhältniss beider f_p/f_l sei mit f_{pl} bezeichnet; es bestimmt die Farbenänderung bei dem eingangs dieses Abschnittes angegebenen Versuch, wobei ein Theil des Farbenbildes durch Luft, ein anderer durch das Prisma betrachtet wird. Es ist:

$$f_{pl} = \sqrt{\frac{2n_2^2 - n_1^2}{2n_2^2 - 1}}. \tag{3}$$

Die Gleichungen 1 bis 3 lehren also, in welchem Verhältniss die Wellenlängen der gesehenen Farben sich ändern müssen, wenn die Brechungsexponenten der photographischen Schicht und des Prismas bekannt sind. Sie können umgekehrt dazu dienen aus einer bekannten Aenderung f und n_1, den Brechungsexponenten n_2 der Schicht zu berechnen; oder auch die Frage zu beantworten, wie gross bei bekanntem n_2 der Brechungsexponent des Prismas zu wählen ist, damit f ausreichend von 1 verschieden wird, um eine deutliche Farbenänderung zu bewirken. Freilich könnte man auch noch zu grösseren Einfallswinkeln als 45° übergehen; doch würde dann die Reflexion an der Oberfläche der Schicht leicht zu stark und den Versuch stören.

7. Prismenversuch mit Farbenbildern nach Becquerel. Erster Beweis für ihre Interferenznatur.

Obgleich das Ergebniss des vorigen Abschnittes einer experimentellen Bestätigung nicht bedarf, theile ich doch mit, dass ich beim Prismenversuch mit einem nach Lippmann's Interferenzverfahren photographirten Spectrum gewaltige Farbenänderungen beobachtet habe. So wurde an einer Stelle, wo im senkrecht reflectirten Licht etwa die Farbe der gelben Natriumlinie erschien, durch das Prisma die Farbe der Grenze zwischen Blau und Blaugrün, also etwa diejenige der Wasserstofflinie H_β (F) wahrgenommen. Der Einfallswinkel betrug dabei noch nicht 45° und das benutzte Prisma hatte nur den Brechungsexponent $n_D = 1{,}52$.

Bei den folgenden Beobachtungen bediente ich mich ausschliesslich des erwähnten Prismas mit $n_D = 1{,}75$ bei einem Einfallswinkel von 45°.

Wurde nun auf einer Becquerel'schen Platte entlang der Mitte von Gelb des photographirten Spectrums ein Strich gezogen, so erblickte man im Prisma an seiner Stelle Grün. Ein anderer Strich längs der Grenze von Grün und Blau gezogen, erschien unter dem Prisma inmitten des Blau liegend. Bei einer anderen Platte wurde der Strich längs der Grenze von Gelb und Grün gezogen, er bildete im Prisma betrachtet die Grenze von Grün und Blau.

Der Versuch wurde auch in der homogenen Beleuchtung einer Natriumflamme wiederholt. Man gewahrt dann beim Gelb des photographirten Spectrums einen hellen Streifen von etwa 1,5 mm Breite, dessen Mitte im Prisma um 2,1 mm nach Roth zu verschoben erscheint bei unabgelenkter Strichmarke; das ist der Mittelwerth der Messungen verschiedener Beobachter. Die Grösse dieser Verschiebung ist zufällig gerade gleich dem Abstand der *D*- und *C*-Linie im Spectrum. Es ist also

$$f_{pl} = \frac{\lambda_D}{\lambda_C} = \frac{589}{656} = 0{,}90.$$

Eine solche verhältnissmässige Aenderung der Wellenlänge des reflectirten Lichtes müsste man erwarten, wenn der photographischen Schicht ein Brechungsexponent zukäme, der sich aus Gleichung (3) mit $n_1 = 1{,}75$ berechnet zu $n_2 = 2{,}4$.

Bei einer zweiten Platte wurde nur eine Verschiebung von 1,2 mm beobachtet, woraus sich $f_{pl} = 0{,}94$ und $n_2 = 3{,}1$ ergiebt.

Dass der Brechungsexponent der Schichten verschieden ausfallen kann, wenn sie nicht genau unter denselben Bedingungen hergestellt wurden, ist einleuchtend, da er von dem Verhältniss des gebildeten Silber-Chlorürs zum -Chlorid abhängen wird. Nach Abschnitt 3 macht aber das letztere vermuthlich den Hauptbestandtheil der Schicht aus und deshalb wird sie schwerlich einen Brechungsexponenten haben, der den des Chlorids weit übersteigt. Dieser ist nach Beobachtungen von Wernicke[1]) $n_D = 2{,}06$.

1) Pogg. Ann. **142.** p. 571. 1871.

Es ist deshalb nicht wahrscheinlich, dass der Brechungsexponent der Schicht gleich 3 werden könnte. Aus Abschnitt 11 wird sich aber ergeben, dass Vorgänge mit im Spiel sind, die eine kleinere Farbenverschiebung beim Prismenversuch erwarten lassen bei wachsender Lichtwirkung. In der That hatte die zweite Platte eine grössere Lichtmenge als die erste erhalten.

Uebrigens bedingt auch ein kleiner absoluter Fehler bei der Bestimmung der Farbenverschiebung einen grossen in der Berechnung des Brechungsexponenten. Die Beobachtungen machen auch keinen Anspruch auf Genauigkeit. Sie hatten ursprünglich nicht die Berechnung von n_2 zum Zweck, sondern nur die annähernde Bestimmung der Farbenverschiebung.

Die Grösse derselben liess vermuthen, dass sie auch ohne Prisma allein bei Veränderung des Einfallswinkels in Luft festgestellt werden könnte. In der That wurde bei der zweiten Platte eine Verschiebung der Mitte des hellen Streifens beim Licht der Natriumflamme für 0 und 45° Einfall im Mittel zu 0,36 mm gemessen, woraus folgt $f_l = 0{,}98$.

Nun lässt sich aber f_l auch berechnen aus n_1 und n_2 nach Gleichung (1), wenn man für n_2 den oben gefundenen Werth 3,1 einsetzt. Dann findet man $f_l = 0{,}97$, ein Werth, dessen Abweichung vom beobachteten sich durch die Fehler der Beobachtung erklärt.

Die Möglichkeit der Feststellung einer Farbenänderung mit einem Wellenlängenverhältniss 0,98 gestattet den Bereich der sicheren Anwendbarkeit des Prismenversuchs zu bestimmen.

Es fragt sich, wie gross darf der Brechungsexponent einer Schicht sein, damit man in ihr noch Interferenzfarben mit dem Prisma erkennen kann. Will man die Farbe bei senkrechtem Einfall in Luft mit der bei 45° im Prisma vergleichen, so ergiebt sich mit $n_1 = 1{,}75$ und $f_p = 0{,}98$ aus Gleichung (2): $n_2 = 6{,}2$; beschränkt man sich auf die Vergleichung der Farben bei 45° Einfall in Luft und Prisma, so folgt mit $f_{pl} = 0{,}98$ aus Gleichung (3): $n_2 = 5{,}2$.

Soweit mir bekannt, sind grössere Brechungsexponenten für die D-Linie noch nicht beobachtet worden.

Derjenige des molekularen Silbers ist nach Wernicke[1])

1) Wernicke, Wied. Ann. 52. p. 527. 1894.

auf Grund der Rechnungen von Drude[1]) gleich 4. Würde seine Berechnung aus dem molekularen Brechungsvermögen gestattet sein, das man aus dem bekannten Refractionsäquivalent eines Haloids und einer Haloidverbindung des Silbers bestimmen kann, so gelangte man zu einem Werth kleiner als 3.

Demnach würde man mit dem Prismenversuch z. B. die kürzlich von Wernicke gemachte Annahme prüfen können, dass die von Carey Lea beobachteten Farben des Silbers nur Interferenzerscheinungen an molekularem Silber sind. Mit $n_2 = 4$ und $n_1 = 1{,}75$ ergäbe sich $f_p = 0{,}95$: ein in Luft goldgelb ($\lambda = 589$) erscheinendes Silberblättchen müsste unter dem Prisma deutlich grüngelb ($\lambda = 560$) erscheinen. Wenn eine solche Farbenänderung aber nicht einträte, so würden Körperfarben vorliegen und Carey Lea behielte Recht mit der Annahme besonderer Silbermodificationen.

Um so sicherer wird man Interferenz- und Körperfarben unterscheiden können bei einer beliebigen Chlorstufe zwischen Silberchlorid und reinem Silber. Sie ist getroffen durch die mitgetheilten Versuche beim Verfahren von Becquerel. Die Entscheidung muss also mit gleicher Sicherheit möglich sein beim Verfahren von Seebeck, dem die gleichen Chlorstufen zu Grunde liegen.

Ich möchte hier noch eine Bemerkung anschliessen über eine denkbare Vervollkommnung der Farbenphotographie nach dem Interferenzverfahren.

Lippmann's Farbenbilder haben zwar den Vorzug der Fixirbarkeit und grösseren Lichtempfindlichkeit vor denen Becquerel's voraus. Sie stehen ihnen aber nach durch die grosse Abhängigkeit der Farben vom Einfallswinkel und die Nothwendigkeit in gespiegeltem Licht betrachtet werden zu müssen. Beides fällt bei Becquerel's Bildern weg. Die Farben ändern sich hier so wenig mit dem Einfallswinkel, dass man das lange Zeit überhaupt nicht feststellen konnte und sie erscheinen auch im diffusen Licht. Dadurch erhalten sie das Gepräge von körperlichen Farben, ohne es zu sein. Sie verdanken das dem hohen Brechungsvermögen der bildtragenden Schicht.

---

1) Drude, Wied. Ann. **51**. p. 98. 1894.

Des gleichen Vortheils könnten die Lippmann'schen Bilder theilhaftig und dadurch auch zum Uebertragen auf Papier geeignet werden, wenn es gelänge, der Gelatine durch geeignete Zusätze ein höheres Brechungsvermögen zu verleihen oder ganz durch einen anderen Stoff von solchem Brechungsvermögen zu ersetzen. Freilich lässt sich nicht von vornherein sagen, ob das möglich ist, ohne andere Vorzüge des Verfahrens zu verlieren.

8. Becquerel's farbentragende Schicht von der Rückseite betrachtet. Zweiter Beweis für die Interferenznatur der Farben.

Für den Zweck des Abschnittes 11 musste ich die farbentragende Schicht der Becquerel'schen Platte von der Silberunterlage loslösen. Es geschah das mit Gelatine nach der Vorschrift von Wernicke.[1])

Dabei beobachtete ich die merkwürdige Erscheinung, dass die Farben von der Rückseite, jedoch gleichfalls im reflectirten Licht, betrachtet sehr stark verschoben waren aus der Lage, die sie ursprünglich beim Betrachten von vorn einnahmen. Zudem war der Farbenton theilweise verändert. Eine solche Farbenänderung ist bei körperlichen Farben undenkbar und nur durch Interferenz zu erklären. Diese Beobachtung liefert also einen zweiten Beweis für die Interferenznatur der Farben, mithin für die Richtigkeit der Zenker'schen Erklärung ihrer Entstehung durch stehende Lichtwellen.

Man hat solche Farbenverschiebungen auch schon an Lippmann'schen Platten beobachtet, wenn man sie von Glas- und Schichtseite betrachtete. Ich kann aber die Erklärungen, welche ich dafür angegeben fand, nicht als richtig anerkennen.

Diese Erscheinungen sind die nothwendige Folge von Thatsachen, die man bisher übersehen hat. Es würde mich indess zu weit von dem Gegenstand dieser Untersuchung abführen, wollte ich hier darauf eingehen. Ich muss das einer besonderen Mittheilung vorbehalten.

---

1) Wernicke, Wied. Ann. **30.** p. 462. 1887.

9. Prismenversuch mit Seebeck's und Poitevin's Farbenbildern. Erster Beweis für ihre Körperfarbennatur.

Dem Prismenversuch mit Seebeck's Platte standen Schwierigkeiten entgegen, welche die vorliegende Untersuchung sehr aufhielten. Das Chlorsilberpulver muss zwischen zwei Glasplatten festgehalten werden. Es genügt nun nicht, zwischen die Deckplatte und das Prisma Benzol zu giessen, um die Farben hindurch zu sehen; denn an den Luftzwischenräumen zwischen Deckplatte und Pulvertheilchen würde Totalreflexion eintreten.

Die Luft muss also vollkommen verdrängt werden durch eine Flüssigkeit von nicht zu kleinem Brechungsexponenten. Dazu wurde Benzol gewählt. Das Zwischengiessen konnte aber nicht nach der Spectralbelichtung geschehen; denn es erwies sich als kaum möglich dies zu thun ohne die Pulvertheilchen aus ihrer Lage zu bringen. Es wurde also umgekehrt zuerst zwischen die beiden Platten Benzol gegossen und dann erst das Pulver dazwischen gestopft.

Zum Tragen des Ganzen diente ein rechteckiger Metallrahmen, der auf der Vorderseite statt durch Glas durch eine etwa 0,08 mm dicke Glimmerplatte abgeschlossen war. Es wurde dadurch eine etwaige scheinbare Verschiebung der darauf zu ziehenden Strichmarke gegen das Spectralbild beim Prismenversuch vermieden.

Die Anwesenheit der Flüssigkeit stört nun das Auftreten der Farben durch die Belichtung nicht; diese kommen wie früher, nur rascher. Denn durch das Aufnehmen des dabei frei werdenden Chlors hatte die Flüssigkeit der Platte eine grössere Lichtempfindlichkeit ertheilt.

Diese bildete aber eine wesentliche Erschwerung des Prismenversuchs; er musste jetzt sehr rasch beendet sein, ehe das Tageslicht die entstandenen Farben verändern konnte.

Indess gelang der Versuch schliesslich wiederholt. Der Strich wurde im Rothen durch Diamant auf dem Glimmer gezogen und mit Russ eingeschwärzt: es war keine Verschiebung der Farben gegen ihn zu erkennen.

Gleichwohl war es wünschenswerth, grössere Sicherheit zu erlangen durch eine einfachere Anordnung.

Dazu wurde reines Chlorsilberpulver mit Collodium verrührt und die Mischung auf eine Glasplatte gegossen und getrocknet. So entstand eine feste Schicht, in der das Chlorsilber durch Collodium festgehalten war. Sie wurde dann auf eine Glasplatte angekittet.

Der Strich wurde mit Bleistift auf die Schicht selbst gezogen und der Prismenversuch gelang mit Sicherheit.

Freilich durfte man auch diese Platten unter Benzol nicht zu lange am Tageslicht lassen. Es wurde daher das Zimmer zunächst verdunkelt und dann das Licht nur durch ein Loch im Laden und eine doppelte Lage Filtrirpapier diffus zugelassen.

Das neue Verfahren hatte noch den Vortheil, dass die Farben mit grösserer Deutlichkeit erschienen. Unter dem Prisma wurden sie zwar durch die Absorption in dessen schwach gelbem Glase dunkler; es ergab aber der wiederholte Versuch *mit Sicherheit keine Verschiebung der Farben im Prisma gegen die in Luft gesehenen* bei unabgelenktem Strich.

Es war dabei gleichgültig, ob der grobkörnige Bodensatz des Chlorsilbercollodiumgemisches oder die feinkörnige obenauf schwimmende Emulsion benutzt wurde. Die Dicke der Körner wurde im letzteren Fall für die Mehrzahl zu etwa 0,001 mm mit dem Mikroskop bestimmt.

Regelmässige stehende Lichtwellen sind in solchen Körnern von selbst ausgeschlossen. Die Lichtbewegung darin muss sehr verworren sein.

In erhöhtem Maasse ist das bei den Poitevin'schen Blättchen aus Papier der Fall. Der Umstand, dass diese die Farben viel besser wiedergeben, veranlasste mich auch sie dem Prismenversuch zu unterwerfen.

Dabei erwies es sich als unzuträglich, dass das aufgegossene Benzol das ganze Papier durchtränkte, weil dadurch die in Luft betrachteten Farben undeutlicher wurden. Daher wurde das Spectrumbild, nachdem im Gelben ein Strich gezogen war, der Länge nach, also in einer zum Strich senkrechten Richtung, in zwei gleiche Theile zerschnitten. Der eine Theil wurde auf die Kathetenfläche eines Hülfsprismas II (Fig. 3 ist ein Querschnitt der Prismen und Blättchen) und dieses auf eine Glasplatte befestigt, auf dieser ebenfalls die andere Hälfte des Blättchens, und zwar so, dass die Striche

an der Schnittlinie zusammenstiessen, also in einer Ebene lagen. Zuletzt wurde das Prisma I mit dem grossen Brechungsexponenten auf die zweite Hälfte aufgesetzt, Benzol zwischen gegossen und das Auge in die Schnittlinie der Ebene der Striche und der einen Kathetenfläche des Hauptprismas eingestellt: auch hier konnte man nur beobachten, dass die Farben unter dem Prisma etwas weniger hell waren, das Grün und Blau auch ein wenig undeutlicher. Dieser Umstand war aber auf die gelbe Färbung des Flintglasprismas zurückzuführen; denn auch ein mit Blaustift auf Papier gezogener Strich erhielt unter dem Prisma einen etwas grünlichen Ton. *Eine Verschiebung der Farben beim Prismenversuch trat aber nicht ein.*

Nun ist aber der lichtempfindliche Stoff bei dem Seebeck'schen Verfahren der gleiche wie bei dem Becquerel'schen; beim Poitevin'schen kommen noch Nebenbestandtheile hinzu, die vermuthlich den Brechungsexponenten der Schicht nur herunterzusetzen vermöchten. Das Ausbleiben der Farbenverschiebung beweist also, dass die Farben der Seebeck'schen und Poitevin'schen Bilder im Gegensatz zu den Becquerel'schen *nicht Interferenzfarben* sind *sondern Körperfarben.*

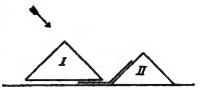


Fig. 3.

10. Seebeck's und Poitevin's Farbenbilder in durchgehendem Licht betrachtet. Zweiter Beweis für ihre Körperfarbennatur.

Die mit Chlorsilbercollodiumemulsion und nach Poitevin's Angabe hergestellten Blättchen sind so durchscheinend, dass sie, von der Rückseite betrachtet, sowohl im reflectirten wie durchgehenden Licht nach der Spectralbelichtung Farben zeigen: *Diese Farben stimmen mit den Farben der Vorderseite an gleicher Stelle überein.* Ja sie erscheinen im durchgehenden Licht zum Theil noch besser ausgeprägt.

Dies ist ein zweiter Beweis dafür, dass die Farben Körperfarben sind, d. h. durch Absorption entstanden.

Jene Beobachtung war schon früher öfter für die genannten und ähnliche Verfahren gemacht worden; ich habe aber noch nirgends den Schluss daraus gezogen gefunden auf die Natur der Farben.

Vielleicht ist dies zum Theil zurückzuführen auf einen

grundsätzlichen Fehler, den Zenker, der Begründer der Interferenztheorie der Farbenphotographie, in dieser Hinsicht gemacht hat. In seinem Lehrbuch der Photochromie sagt er p. 81 in Bezug auf die durch stehende Lichtwellen erzeugten Farbenbilder:

„Ebenso ist es natürlich, dass dieselben Farben auch im durchgehenden Lichte erscheinen, die man im reflectirten sieht. Denn da auch das durchgehende Licht sicherlich nicht die directe Fortsetzung der kommenden Strahlen ist, sondern wenigstens zum Theil auch mehrfache Reflexionen erfahren wird, so müssen in demselben auch diejenigen Farben überwiegen, die den Entfernungen der vorhandenen Punktschichten entsprechen, d. h. die identischen."

Mit den Punktschichten sind die Elementarspiegel gemeint, die in der empfindlichen Schicht durch stehende Lichtwellen entstanden.

Die Farben, welche aber durch die Gesammtwirkung der Reflexionen an den Elementarspiegeln entstehen, müssen zu den reflectirten Farben an der gleichen Stelle complementär sein, wie bei allen reinen Interferenzfarben.

Denn sie müssen zusammen das auffallende weisse Licht ausmachen. Kann doch davon nichts verloren gehen, da sie nach der Voraussetzung nur durch Interferenz und nicht durch Absorption entstehen sollen.

Fragt aber jemand, wieso bei gleichem Wegunterschied, nämlich der doppelten Entfernung zweier benachbarten Elementarspiegel verschiedene Interferenzfarben im reflectirten und durchgelassenen Licht entstehen können, so vergisst er die bei den Reflexionen entstehenden Phasenänderungen. An derselben geometrischen Ebene, an der ein Strahl des reflectirten Lichtes beim ersten Elementarspiegel durch Eindringen in optisch *dichtere*, bezüglich dünnere Theile zurückgeworfen wird, muss ein im durchgehenden zweimal zurückgeworfener Strahl in optisch *dünnere*, bezüglich dichtere Theile eindringen und erhält dadurch eine entgegengesetzte Phasenänderung. Diejenige am zweiten Spiegel ist in beiden Fällen die gleiche. Mithin verbleibt ein Phasenunterschied von einer halben Wellenlänge, welcher die complementäre Färbung des durchgehenden Lichtes bedingt. An dieser Ueberlegung wird nichts ge-

ändert durch Berücksichtigung einer grösseren Anzahl von Reflexionen.

Hier wird man einwenden, dass die Phasenänderung bei Reflexion an einem Elementarspiegel die gleiche sein muss, einerlei, von welcher Seite das Licht einfällt. Das ist auch der Fall. Man muss aber bedenken, dass der Elementarspiegel nicht als geometrische Ebene, sondern als eine Schicht endlicher Dicke aufzufassen ist. Sonst könnte er bei fehlender Absorption überhaupt kein Licht reflectiren.

Gerade dieser Einwand verhilft zur Bestimmung der Phasenänderung bei Reflexion am Elementarspiegel und nicht an einer geometrischen Ebene seiner Grenzen oder im Innern, wovon oben die Rede war. Da nämlich im durchgehenden Licht der zweimal reflectirte Strahl gegenüber dem unmittelbar durchgehenden einen Phasenunterschied von einer halben Wellenlänge erhalten muss, und da er an jedem der beiden Elementarspiegel die gleiche Phasenänderung erleiden muss, so *beträgt die Phasenänderung bei Reflexion an einem Elementarspiegel eine viertel Wellenlänge.*

Darunter ist natürlich die Phasenänderung verstanden im Vergleich zu einem an der geometrischen Mittelebene des Elementarspiegels ohne Phasenänderung reflectirten Strahl.

Dieses Ergebniss werde ich bei der p. 250 erwähnten Gelegenheit noch in anderer Weise ableiten.

Zugleich sind damit die erwähnten Schwierigkeiten, bez. Einwände beseitigt.

Alles Gesagte bezieht sich natürlich nur auf den Fall fehlender Absorption. Ein solcher liegt vor bei dem Chromgelatineverfahren von Lippmann[1]), wobei die Durchlassfarben in der That den reflectirten complementär sind.

Ist aber nebenher noch Absorption vorhanden, so wird sie leicht im durchgehenden Licht Ausschlag gebend, weil jene complementären Durchgangsfarben, wie bei den Farben dünner Blättchen, sehr viel Weiss enthalten und daher matt sein müssen.

So hat Krone[2]) bei Lippmann'schen Haloid-Silberplatten im durchgehenden Licht nur die Eigenfarbe des beim

1) Lippmann, Compt. rend. 115. p. 575. 1892.

2) Krone, „Darstellung der natürl. Farben" p. 54.

Entwickeln entstandenen Niederschlags beobachten können, und ich habe das auch beobachtet. Uebrigens theilt Lippmann selbst mit, dass er bei zwei Bromsilber-Albuminplatten die complementären Farben in der Durchsicht beobachtete.[1]) Bei diesen muss also die Absorption besonders gering gewesen sein.

Wenn also im durchgehenden Licht die gleichen Farben wie im reflectirten auftreten, so können diese nicht durch Interferenz, sondern nur durch Absorption entstanden sein.

Umgekehrt muss Absorption, wofern sie nicht ausreichend stark auswählend ist, um Oberflächenfarben zu erzeugen, die gleiche Farbe dem durchgehenden und reflectirten Licht ertheilen, denn dieses ist ja weiter nichts als doppelt durchgegangenes Licht.

Somit liegt in dieser Feststellung ein *zweiter Beweis, dass die Farben bei Seebeck's und Poitevin's Verfahren Körperfarben sind.*

11. Die Mitwirkung von Körperfarben bei Becquerel's Verfahren.

Ich habe in der Uebersicht (1.) darauf hingewiesen, dass es auffallend wäre, wenn der Stoff der Seebeck'schen Platte unter farbiger Belichtung Körperfarben erzeugte, und der chemisch damit fast übereinstimmende der Becquerel'schen Platte dies nicht vermöchte.

Es war aber zu erwarten, dass diese Körperfarben schwer zu beobachten seien, so lange die Interferenzfarben stark ausgebildet waren. Es ist nun leicht verständlich, dass diese geschwächt würden durch eine grössere Belichtungsdauer, infolge deren die photographische Wirkung bis in geringe Nähe der Schwingungsknoten der stehenden Wellen sich erstrecken müsste. Diese Folgerung wurde schon durch Krone[2]) bei Lippmann's Verfahren bestätigt. Ausreichend überbelichtete Stellen des Spectrums werden weiss. Becquerel[3]) selbst gibt

1) Lippmann, Compt. rend. **114.** p. 962. 1892.

2) Krone, Deutsche Photographen-Zeitung p. 187. 1892, citirt nach Valenta.

3) Becquerel, La lum. **2.** p. 222. 1868.

für sein Verfahren an, dass die Farbenunterschiede mit wachsender Belichtungsdauer verschwinden.

Ich habe daher eine Becquerel'sche Platte 20 Stunden, eine zweite 30 Stunden der Belichtung des Spectrums ausgesetzt.

Der Prismenversuch gab dann bei der ersten eine schwächere, bei der zweiten eine kaum merkbare Farbenverschiebung. Zugleich werden die Farben unter dem Prisma sehr undeutlich.

Ein strengerer Nachweis der Körperfarben war aber aus der Betrachtung der farbentragenden Schicht im durchgehenden Licht zu erwarten. Diese wurde also von der Silberunterlage abgehoben (vgl. p. 250). Dann erschienen in der That im durchgehenden Licht an den richtigen Stellen Roth und eine Spur Blau, das letztere jedoch im ersten Fall mehr mit graublauem, im zweiten mit blauviolettem Farbenton.

Es war aber zu erwarten, dass auch jetzt noch die Interferenzfarben störend wirkten. Es wurde daher die Seite, welche dem Silber angelegen hatte und lebhafte Interferenzfarben im reflectirten Licht zeigte, mit einem Lederlappen so stark abgerieben, bis diese Farben matter wurden. Dann trat in der Durchsicht besonders das Roth kräftiger hervor. Es war aber auch dann nicht ein Spectralroth, so wenig, wie dasjenige beim Seebeck'schen Verfahren. Uebrigens war dasselbe schon bei einer nur $^3/_4$ Stunden lang belichteten Schicht, wenn auch viel weniger ausgeprägt, in der Durchsicht zu beobachten.

Diese Versuche beweisen also, dass auch bei Becquerel'schen Platten Körperfarben entstehen und im Farbenbild um so stärker mitwirken, je länger die Belichtung dauert.

12. Die denkbare Grundlage einer Farbenphotographie mit Körperfarben.

Damit ein lichtempfindlicher Stoff durch eine Lichtart chemisch verändert werden kann, muss er sie absorbiren. Das Umgekehrte gilt nicht allgemein. Das absorbirte Licht kann z. B. ausschliesslich in Wärme umgesetzt werden. Man unterscheidet daher zwischen thermischer und chemischer Lichtabsorption.

Zur Vereinfachung des Ausdrucks setze ich fest, dass ein *absorptionsmässig lichtempfindlicher Stoff* ein solcher heissen soll, der für alle Farben lichtempfindlich ist, die er absorbirt, und zwar in einem zum Absorptionsvermögen jeweils im selben Verhältniss stehenden Maasse.

Dass es solche Stoffe gibt, wenigstens mit einem beträchtlichen Grad der Annäherung, ist bekannt. Auf ihrem Vorhandensein beruht der wichtige, von H. W. Vogel aufgestellte Grundsatz der optischen Sensibilisatoren.[1])

Es ist nun denkbar, dass der absorptionsmässig lichtempfindliche Stoff durch Lichtzersetzung farbige Stoffe erzeugt und dass diese selbst wieder absorptionsmässig lichtempfindlich sind.

Es heisse nun ein *farbenempfänglicher Stoff* ein schwarzer absorptionsmässig lichtempfindlicher Stoff, dessen Zersetzungsstoffe nur aus einfarbigen absorptionsmässig lichtempfindlichen Stoffen von mindestens drei ausreichend verschiedenen Farben bestehen sollen und ausserdem einem weissen, dem jedoch die geringste Entstehungsfähigkeit zukommen möge. Ausreichend verschieden sollen diese Farben sein, um durch ihre Mischung untereinander und mit Weiss jegliche Mischfarbe erzeugen zu können. Im Gegensatz zu diesen Mischfarben sollen die ungemischten *Grundfarben* heissen. Die einfarbigen Stoffe reflectiren nur eine Farbe gut; die anderen sollen sie um so stärker absorbiren, je weiter sie von jener abweichen. Dann lässt sich zeigen:

Ein farbenempfänglicher Stoff bildet die Farben der Beleuchtung richtig ab.

Die Beleuchtungsfarbe stimme zunächst mit einer Grundfarbe überein. Sie wird von dem schwarzen Körper absorbirt und bewirkt eine Zersetzung, da er nach der Voraussetzung absorptionsmässig lichtempfindlich ist. Bei dieser Zersetzung entstehen die verschiedenen farbigen Stoffe. Die mit der

1) Das Empfindlichkeitsmaximum ist gegen das Absorptionsmaximum bisher stets gegen das weniger brechbare Ende des Spectrums verschoben gefunden worden. Die Verschiebung der beiden jeweils an derselben Platte bestimmten Maxima ist für eine grosse Reihe von Sensibilisatoren durch J. J. Acworth (Wied. Ann. 42. p. 371. 1891) eingehend untersucht worden. Er findet neben grossen auch sehr geringe Verschiebungen. Es ist daher grundsätzlich nicht ausgeschlossen, dass es Farbstoffe gibt, bei denen die Verschiebung unmerklich ist für den betrachteten Zweck.

Beleuchtungsfarbe nicht übereinstimmenden absorbiren das auffallende Licht, da sie nach der Voraussetzung einfarbig sind, mithin alle von ihrer Farbe verschiedenen Beleuchtungsfarben absorbiren müssen. Da diese Stoffe aber auch absorptionsmässig lichtempfindlich sind, so werden sie auch zersetzt durch das Licht, das sie absorbiren. Dagegen kann der mit der Beleuchtungsfarbe gleichfarbige Stoff nicht zersetzt werden, da er das auffallende Licht nicht absorbirt. Auf die Dauer kann also nur er erhalten bleiben und ausserdem der weisse Stoff, doch dieser nach Annahme nur in geringem Maasse und also nur bei grosser Beleuchtungsstärke in merklicher Weise.

Stimmt die Beleuchtungsfarbe nicht überein mit einer Grundfarbe, sondern liegt zwischen zwei solchen, ist z. B. grün, beim Vorhandensein einer gelben und blauen Grundfarbe, so werden diejenigen farbigen Stoffe am wenigsten zersetzt, welche Grün am besten reflectiren, das ist der gelbe und blaue. Es wird also ein grünes Gemisch entstehen, ausserdem Weiss, jedoch nur in geringerem Maasse.

Bei weisser Beleuchtung werden sämmtliche Farbstoffe zerstört, und der weisse bleibt allein übrig.

Bei fehlender Beleuchtung bleibt der Stoff schwarz.

So überzeugt man sich, dass alle Farben richtig wiedergegeben werden; jedoch nur bei einer nicht zu überschreitenden Grenze der Belichtungsstärke oder -Dauer. Wird sie überschritten, so muss das Weiss vorzuherrschen beginnen und die Farben müssen allmählich verblassen.

Es ist möglich, dass ein lichtempfindlicher Stoff die Eigenschaften des farbenempfänglichen nur theilweise besitzt; er wird dann auch nur theilweise oder unvollkommen die Farben wiedergeben können.

Ist er nicht schwarz, so gibt er Schwarz nicht wieder. Ist er nicht absorptionsmässig lichtempfindlich, so bleibt er unverändert für eine Farbe, die er absorbirt, und kann diese daher nicht wiedergeben.

Sind die Grundfarben nicht einfarbig, so wird er die einfarbige Beleuchtung, die eine solche reflectirt, entweder überhaupt unrichtig, oder doch im Farbenton ungenau wiedergeben. Ein gleicher Fehler tritt ein, wenn die Zersetzungsstoffe nicht absorptionsmässig lichtempfindlich sind.

Sind endlich an verschiedenfarbigen Zersetzungsstoffen nur weniger als drei vorhanden, oder sind deren Farben nicht ausreichend verschieden, so können nicht alle Farben wiedergegeben werden. Diese Bemerkung bezieht sich auch auf den weissen Zersetzungsstoff. Wenn er fehlt, wird Weiss nicht wiedergegeben.

Trotz all solcher Abweichungen wird aber doch jeder lichtempfindliche Farbstoff, der farbige Zersetzungsstoffe liefert, in einem gewissen Maasse Farben abbilden können. Denn die Beleuchtungsfarbe wird die gleichfarbige Verbindung ungestört lassen, da das Licht von ihr zurückgeworfen wird, die andersfarbigen aber leichter zerstören, weil diese die Beleuchtungsfarbe leichter absorbiren.

Man wird die Eigenschaften des farbenempfänglichen Stoffes für sehr verwickelt und schwer erreichbar halten. Indess ist diese Verwickelung durch die Natur bekannter Verfahren gefordert. Sie ist aber nicht nöthig, wenn man sich die Aufgabe stellt, auf einfachstem Wege Farbenphotographien durch Körperfarben zu erzeugen vermöge der Auslese des zersetzend wirkenden absorbirten Lichtes. Ich komme darauf im Abschnitt 14 zurück.

13. Erklärung der Farbenwiedergabe bei Seebeck's und Poitevin's Verfahren.

Die Farbenwiedergabe wird erklärt durch den Nachweis, dass die benutzten lichtempfindlichen Stoffe mit einer gewissen Annäherung die Eigenschaften eines farbenempfänglichen besitzen — nicht vollkommen, denn die Farbenwiedergabe ist nicht vollkommen.

Die erste Abweichung besteht schon darin, dass der lichtempfindliche Stoff nicht schwarz ist, sondern bei Seebeck dunkelviolett bis grauviolett, bei Poitevin dunkelgrauviolett bis graubraun. Schwarz kann also nicht wiedergegeben werden, an seine Stelle treten die genannten dunkeln Töne. Indess theilen diese Stoffe mit dem schwarzen die Eigenschaft, alle sichtbaren Strahlen in gewissem Maasse zu absorbiren und gegen alle auch lichtempfindlich zu sein.

Die Zersetzungsstoffe sind, wie schon im Abschnitt 1 er-

wähnt, Stoffe verschiedener Farbe. Sie müssten nach den Angaben von Carey Lea und Krone auch ausreichend an Zahl oder ausreichend verschiedenfarbig sein. Aber sie sind nicht vollkommen einfarbig, und darin liegt ein Grund für die theilweise unrichtige Wiedergabe des Farbentons (vgl. Absch. 4).

Ein weisser Zersetzungsstoff ist nicht entstehungsfähig bei Seebeck's Verfahren; Weiss kann also und wird hier auch nicht wiedergegeben.

Wohl aber trifft beides für Poitevin's Verfahren zu. Auch ist die Entstehungsfähigkeit des Weiss geringer als die der anderen Zersetzungsstoffe. Denn erst bei langer Belichtung werden die Farben blasser.

Von allen Eigenschaften des farbenempfänglichen Stoffes bleibt jetzt nur noch die absorptionsmässige Lichtempfindlichkeit der farbigen Zersetzungsstoffe bei den beiden Verfahren zu untersuchen.

Auch sie darf nur in dem Maasse vorhanden sein, als es der Grad der Genauigkeit der Farbenwiedergabe erfordert.

Bei Seebeck's Verfahren ist das Roth die am besten ausgeprägte Farbe. Damit es unter rother Beleuchtung entstehen konnte, mussten alle anderen Zersetzungsfarben rothempfindlich sein, um durch die rothe Beleuchtung zerstört werden zu können. Dies trifft auch zu.

Zur Prüfung wurde das unter dem Spectrum entstandene Bild in seiner Ebene um 90° gedreht, sodass jetzt jeder einfarbige Streifen des Bildes dem ganzen beleuchtenden Spectrum ausgesetzt war.

Dabei blieb unter dem Roth der zweiten Belichtung allein das Roth des ersten Spectrumbildes erhalten; die übrigen Farben wurden zerstört, indem sie bis zum beginnenden Ultraviolett alle eine rothe Färbung annahmen.

Aehnliches gilt für die anderen Bildfarben. Doch da sie schon nach der ersten Spectralbelichtung nicht gut ausgeprägt waren, so konnten sie nach der zweiten kreuzenden nur noch schwieriger erkannt werden. So viel liess sich jedoch sagen, dass das Bildroth der ersten Belichtung durch die grüne und blaue zweite Belichtung zerstört wurde, wenn auch die mit dem Roth verbundene Aufhellung des Grundtones noch zu sehen war. Es stimmt das mit dem p. 232 erwähnten Ver-

such Carey Lea's überein. Ferner war auch das Grün des ersten Bildes ausser durch das Roth auch durch das Blau der zweiten Belichtung zerstört.

Es war also durch das Blau der zweiten Belichtung sowohl das Roth als das Grün des ersten Bildes zerstört; das Violett kann es natürlich auch verändern, da Blau ja aus dem violetten Grundstoff hervorgegangen war. Da nun Gelb bei diesem Verfahren überhaupt kaum erscheint, so ist damit die Entstehung des Blau unter der blauen Belichtung erklärt, da sie alle andersfarbigen Zersetzungsstoffe zu zerstören vermag. Blau ist aber wohl die nach Roth noch am besten wiedergegebene Farbe.

Beim Poitevin'schen Verfahren sind die Farben durchweg besser ausgeprägt. Der Versuch mit gekreuzten Spectren liess sich daher hier besser ausführen.

Bei einem Versuch hatte die erste und zweite Belichtung je eine halbe Stunde gedauert.

Die Farben des ersten Bildes blieben dann, wie zu erwarten, unter den gleichfarbigen der zweiten Belichtung ungeändert. Durch die andersfarbigen Beleuchtungsfarben änderten sie sich nach der Beobachtung von Prof. Dr. Holzapfel in folgender Weise:

Das *Roth* des ersten Bildes wird im Gelb der zweiten Belichtung gelb, unter den anderen Beleuchtungsfarben ebenfalls verändert.

Das *Gelb* des ersten Bildes bleibt im Roth der zweiten Belichtung, ein wenig auch im Grün, wird im Blau grünlich, im Violett zerstört.

Das *Grün* des ersten Bildes wird im Roth der zweiten Belichtung roth, im Gelb gelb, im Blau und Violett verändert.

Das *Blau* des ersten Bildes wird im Roth der zweiten Belichtung roth, im Gelb gelb, im Grün grün, im Violett verändert und dunkler.

Das *Schwarzviolett*, das sich unter dem Violett der ersten Belichtung gebildet, wird unter dem Roth der zweiten Belichtung Roth und nimmt unter den anderen Beleuchtungsfarben eine wenig bestimmte, jedoch zu ihnen jeweils hinneigende Färbung an.

Im allgemeinen wurde also jeder farbige Stoff nur unter

der gleichfarbigen Beleuchtung erhalten, unter einer andersfarbigen verändert oder zerstört.

Eine Ausnahme bildet davon das Gelb oder besser das Orange, da die unter gelber Beleuchtung entstehende Farbe mit einem reinen Gelb verglichen mehr orangefarben erscheint (vgl. p. 239). Diese Farbe wird durch das benachbarte Roth und Grün einer zweiten Belichtung nicht verändert und wird auch durch Blau nicht leicht zerstört, da hier die Mischfarbe Grün entsteht.

Diese Thatsache würde der gegebenen Erklärung der Farbenwiedergabe widersprechen, wenn sie nicht die Ursache zu einem Fehler derselben wäre, welcher die Erklärung rechtfertigt.

Wenn nämlich der orangefarbene Stoff nicht ausreichend lichtempfindlich ist für Roth und Grün, so kann er gleichzeitig mit dem rothen Stoff unter der rothen und mit dem grünen Stoff unter der grünen Beleuchtung entstehen, ohne wieder zerstört zu werden; wenn er aber überhaupt gegen die Belichtung widerstandsfähiger ist, so kann er schliesslich die Oberhand gewinnen; und dies wird in der That beobachtet.

Der ursprünglich schmale orangegelbe Streifen breitet sich mit wachsender Dauer der Spectralbelichtung nach beiden Seiten hin aus. Seine Breite betrug z. B. in einem 24 Minuten lang belichteten Felde etwa 1 mm, in einem daneben liegenden fünfmal so lang belichteten etwa 3 mm.

Diese Verbreitung fand bei einigen Versuchen stärker nach der rothen als nach der blauen Seite des Spectrums statt. Bei anderen Versuchen schien das nicht der Fall zu sein. Es kann dies wohl von kleinen Verschiedenheiten in der Art der Darstellung der empfindlichen Schicht herrühren.

Wo diese Verschiebung vorhanden ist, hängt sie wohl mit der folgenden Erscheinung zusammen.

Eine genauere Untersuchung ergab nämlich, dass bei kurzer Belichtungsdauer, z. B. 4 Minuten, unter gelber Beleuchtung von der Farbe der Natriumflamme nicht ein gelber, sondern ein rother Stoff entsteht, der erst allmählich jene orangegelbe Färbung annimmt. Es scheint also der gelbe Stoff erst aus der Zersetzung eines rothen hervorzugehen.

Dieser Vorgang ist chemisch zu erklären und muss für

die vorliegende Untersuchung nur insofern beachtet werden, als er eine einseitige Verschiebung des orangegelben Streifens bei wachsender Belichtungsdauer erklären kann. Denn nach dem Gesagten wird der rothe Ausgangsstoff leichter bei rother als bei grüner Beleuchtung entstehen können.

Man überzeugt sich so, dass die Abweichungen der Eigenschaften der benutzten photographischen Stoffe von denen eines farbenempfänglichen auch Abweichungen von der richtigen Farbenwiedergabe bedingen.

Für diejenige Farbe beim Poitevin'schen Verfahren aber, welche bei ausreichender Belichtung dauernd richtig wiedergegeben wird, nämlich Orangegelb, sind die Bedingungen erfüllt: alle anderen auftretenden farbigen Stoffe sind für orangegelbes Licht empfindlich und werden dadurch zersetzt.

Die Farbenwiedergabe und der Grad ihrer Genauigkeit durch die von Seebeck und Poitevin benutzten Stoffe wurde also erklärt durch den Nachweis, dass sie die Eigenschaften eines farbenempfänglichen Stoffes in dem durch jene Genauigkeit geforderten Maasse der Annäherung besitzen.

14. Die Stellung der Farbenphotographie mit Körperfarben zu dem Farbendruck- und Interferenz-Verfahren. Möglichkeit der Vervollkommnung der Körperfarbenphotographie.

Die Farbenphotographie mit Hülfe eines farbenempfänglichen Stoffes sei hier als *Körperfarbenphotographie* bezeichnet.

Sie steht dem neuerdings von H. W. Vogel[1]) ausgearbeiteten Verfahren des Farbendrucks insofern nahe, als die Farben in beiden Fällen durch Körperfarben wiedergegeben werden. Ferner bedürfen beide Verfahren des Vorhandenseins absorptionsmässig lichtempfindlicher Stoffe, auf die sich also der Vogel'sche Grundsatz der optischen Sensibilisatoren anwenden lässt. Ein Fortschritt in der Auffindung solcher Stoffe kann unter Umständen beiden Verfahren zu Gute kommen.

Auch das Verfahren mit Körperfarben eignet sich zur Vervielfältigung, da die Farben auch in der Durchsicht erscheinen. Dazu muss man sich natürlich durchsichtiger Platten

1) Verh. d. phys. Ges. z. Berlin, Wied. Ann. **46.** p. 521. 1892.

bedienen, wie sie z. B. neuerdings von Veress[1]) benutzt wurden. Natürlich ist der Farbendruck jedem anderen in der Vervielfältigungsfähigkeit überlegen. Aber es würde das Verfahren mit Körperfarben wenigstens das Interferenzverfahren in dieser Hinsicht übertreffen.

Diesem letzteren steht es aber insofern näher, als die Farben unmittelbar unter der farbigen Belichtung entstehen. Da es aber die Farben nicht als Schein-, sondern als Körperfarben wiedergiebt, so wäre es vielleicht als das eigentliche Ideal der Farbenphotographie anzusehen.

Davon ist es augenblicklich freilich noch weit entfernt. Vielleicht wird das anders, nachdem seine Grundlagen aufgedeckt sind.

Dabei erkennt man, dass das Seebeck'sche und Poitevin'sche Verfahren noch einen Umweg wählt. Die Eigenschaften des farbenempfänglichen Stoffes sind sehr verwickelt. Aber nachdem nachgewiesen ist, dass er die Farben richtig wiedergiebt, könnte man umgekehrt seine Begriffsbestimmung an die Fähigkeit der richtigen Farbenwiedergabe knüpfen und fragen: welches sind die einfachsten Eigenschaften, die er zu diesem Zwecke haben muss?

Ich glaube, dies wäre aus einem schwarzen Gemisch dreier absorptionsmässig lichtempfindlicher Farbstoffe zu ersehen, welche bei ihrer Zersetzung nur in weisse Stoffe zerfallen.

Doch sind natürlich die verschiedensten Abarten dieses Verfahrens denkbar.

Es sind auch verschiedene Wege denkbar, auf denen sich die Fixirung erreichen liesse. Es erscheint nicht ausgeschlossen, dass die entstandenen Farbstoffe durch chemische Einwirkung in gleichfarbige lichtunempfindliche übergeführt oder durch einen geeigneten Zusatz vor Zersetzung geschützt werden. Einen Fall letzterer Art erwähnt Otto N. Witt in einem bemerkenswerthen Vortrag.[2])

---

1) Vgl. Eder's Jahrbuch für Photographie. p. 46. 1891.

2) Otto N. Witt, „Ueber Farben und Färben. Eine Studie über Energieverwandlung." Vortr. geh. bei Gelegenheit des VI. deutsch. Färbertages. Prometheus p. 625 u. 641. 1894. Sehr treffend bemerkt er, dass Theorie und Praxis aufgehört haben, einander fremd gegenüber zu stehen, da jeder theoretische Fortschritt einen praktischen zur Folge haben kann.

Es lassen sich nämlich lichtunechte, d. h. lichtempfindliche Farben auf Faserstoffen dadurch lichtecht machen, dass man die Faser mit Kupfersalzen imprägnirt. Ohne die Natur der Farbstoffverbindung zu beeinflussen, nehmen diese nach Witt's Vermuthung wegen ihrer leichteren Zersetzbarkeit die Lichtenergie auf und machen sie dadurch für den Farbstoff unschädlich.

Es ist aber auch denkbar, dass die photographische Schicht erst durch Zusatz anderer Stoffe lichtempfindlich und nach deren Wegnahme von selbst wieder unempfindlich wird.

Man könnte fragen, welchen Zweck es hätte, nach neuen Verfahren zu suchen, da bereits vortreffliche vorhanden sind. Aber es zeigt die Erfahrung, dass bei verschiedenen Lösungen einer technischen Aufgabe selten eine einzige alle anderen verdrängt. Sondern jede erhält den Bereich ihrer Verwendungen, für die sie am angemessensten erscheint.

Und wenn das Körperfarben-Verfahren zur Zeit das unvollkommenste ist, so lässt sich doch den künftigen Erfindern nicht vorschreiben, innerhalb welcher Grenzen der Unvollkommenheit sie es lassen sollen, so wenig man künftigen Geschlechtern vorschreiben kann, innerhalb welcher Grenzen der Erkenntniss sie sich halten sollen, wie es von denjenigen geschieht, welche ihre Grenzen bestimmen zu können meinen.

Es trifft das gewiss bei der Entwickelung der Farbenphotographie zu und hoffentlich auch in dem vorliegenden Fall. Ich kann aber hier eine Aeusserung des Verf. nicht unwidersprochen lassen, nämlich seine Annahme, dass chemische Wirkung langwelliger Strahlen zu Stande käme dadurch, dass sie nach der Absorption erst in kurzwellige verwandelt würden. Mit gleichem Recht könnte man die Wärmewirkung kurzwelliger Strahlen durch eine Verwandlung in langwellige erklären wollen, ehe sie Erwärmung bewirken könnten. Es wird aber die Art der Lichtwirkung nicht durch die Länge der ankommenden Welle, sondern durch die Beschaffenheit des aufnehmenden Stoffes bestimmt. Meine Versuche über stehende Lichtwellen bewiesen, dass die chemische Wirkung durch die jenen innewohnenden electrischen Kräfte hervorgebracht wird, und diese sind vorhanden unabhängig von der Grösse der Wellenlänge. Sie können je nach der Beschaffenheit des betroffenen Körpers Zersetzung oder Erwärmung hervorbringen, so gut wie die electrischen Kräfte eines constanten Stroms Zersetzung bei einem Electrolyten, nur Wärme bei einem metallischen Leiter erzeugen.

15. Mechanische Farbenanpassung in der Natur.

Man schrieb früher dem Lichte einen weitgehenden Einfluss auf die Entstehung der Farben in der Natur zu,[1]) nicht nur bei den Pflanzen, deren Grün zur Entstehung im allgemeinen unstreitig des Lichtes bedarf, sondern auch bei den Thieren. Ein solcher unmittelbarer Einfluss wurde aber um so mehr geleugnet oder wenigstens nur noch in beschränktem Maasse anerkannt, je mehr man mit Darwin die Färbung der Thiere auf die Wirkung natürlicher und geschlechtlicher Zuchtwahl zurückführen lernte.

Ohne diese Wirkung zu bestreiten, hat aber neuerdings Semper[2]) betont, dass die Erklärung damit noch nicht vollständig ist, dass z. B. das erste Auftreten von Farbstoff im Gewand eines Thieres unerklärt bleibt. Diese Bemerkung kann sich natürlich nicht beziehen auf Farben, welche als die bedeutungslose Eigenschaft der vom Organismus hervorgebrachten chemischen Verbindungen aufgefasst werden können.[3]) Sie hat aber gewiss Berechtigung im Hinblick auf den häufig beobachteten Mangel von Farben bei Thieren, die im Dunkeln leben.

Allgemein führen Semper[4]) und Eimer[5]) aus, dass das Abändern der Lebewesen, welches die Grundlage von Darwin's Lehre bildet, von ihm nur als Thatsache hingenommen wurde und noch selbst der Erklärung bedürftig sei. Als eine Ursache dieses Abänderns betrachtet Eimer[6]) die physikalischen und chemischen Veränderungen, welche die Lebewesen durch die Einwirkung der äusseren Lebensbedingungen erfahren. Er schreibt daher auch der Einwirkung des Lichtes einen bedeutenden Einfluss auf die Bildung und Veränderung der Farben der Thiere zu.[7])

Mit solchen Betrachtungen hat man den Boden physika-

1) Vgl. Karl Semper, Die natürlichen Existenzbedingungen der Thiere; Leipzig, F. A. Brockhaus 1880. p. 107.

2) Semper l. c. p. 122.

3) Vgl. Darwin „Abstammung des Menschen", deutsch v. V. Carus, 5. Aufl. p. 298.

4) Semper, l. c. Vorwort.

5) Eimer, Entstehung der Arten 1. p. 1.

6) l. c. p. 24.

7) l. c. p. 93. 145. 167 u. a.

lischer Anschauung betreten. Denn diese verlangt die gesetzmässige Zurückführung eines Vorganges auf den ihm zeitlich unmittelbar vorangehenden Zustand. Gegenüber einer derartigen mechanischen Erklärung ist die Darwin'sche Art der Erklärung als eine statistische zu bezeichnen und nimmt zu ihr etwa die Stellung ein, wie die Erklärung der Gasgesetze nach der kinetischen Gastheorie gegenüber der rein mechanischen Erklärung der Bewegung eines einzelnen Molecüls. Nur der Gegenstand der uns zugänglichen Beobachtung nimmt in beiden Fällen eine verschiedene Stellung ein. Er ist bei den Gasen der Gesammtvorgang, in der Natur meist nur der Einzelvorgang. Ich bin auf diese Ueberlegung eingegangen, um zu zeigen, dass die beiden Erklärungsweisen einander nicht ausschliessen, sondern sich gegenseitig ergänzen müssen.

In dieser Hinsicht verdient die Feststellung eines unmittelbaren Einflusses des Lichtes auf die Färbung der Thiere besondere Beachtung. Ein solcher ist genau untersucht bei Raupen und Schmetterlingspuppen. Er wurde entdeckt durch T. W. Wood[1]) im Jahre 1867. Die im Verpuppen begriffenen Raupen wurden in den Sonnenschein gebracht und mit gefärbten Gegenständen umgeben; dann nahmen sie deren Farben an. Wie weit diese Empfänglichkeit bei Puppen und auch bei Raupen verbreitet ist, hat neuerdings Edward B. Poulton[2]) in ausserordentlich eingehenden und sorgfältigen Experimentaluntersuchungen gezeigt.

Als Ursache der Erscheinung wurde von dem Entdecker Wood eine photographische Empfindlichkeit der Haut angenommen. Doch gab er dafür keinen Beweis. Seine Annahme war aber durchaus nicht selbstverständlich. Denn es sind Fälle rascher Farbenanpassung bekannt, die auf anderen Um-

---

1) T. W. Wood, Proc. Ent. Soc. p. 99—101. 1867, citirt nach E. B. Poulton „The Colours of Animals", London, Kegan Paul, Trench, Trübner & Co. 1890, woselbst die Geschichte der Entdeckung p. 113 ff. mitgetheilt ist; findet sich auch bei Poulton, Phil. Trans. London. 178. p. 312. 1887.

2) Vgl. ausser den erwähnten Schriften die umfassende Abhandlung: „Further experiments upon the colour-relation between certain lepidopterous larvae, pupae, cocoons, and imagines and their sorroundings." Transactions of the entomological Society of London p. 293. 1892.

ständen beruhen, z. B. bei Fröschen und Fischen. Bei diesen Thieren wird die Farbenanpassung durch das Auge ausgelöst. Verlieren sie ihr Auge[1]), sei es durch den Eingriff des Experimentators, sei es zufällig, so verlieren sie gleichzeitig die Fähigkeit der Farbenanpassung. Diese beruht aber nicht einmal auf einer Veränderung, sondern nur einer verschiedenen Lagerung des Farbstoffes vermöge der Zusammenziehbarkeit der ihn tragenden Zellen, der sog. Chromatophoren, die auch dem Chamäleon[2]) die merkwürdige Fähigkeit des Farbenwechsels verleihen.

Aus diesem Grunde hielt es Poulton für geboten, zunächst nach einem ähnlichen Zusammenhang bei den Raupen zu suchen. Er bedeckte die Augen einer Anzahl von Raupen mit einem undurchsichtigen Schirm.[3]) Sie verloren aber dadurch nicht die Fähigkeit der Farbenanpassung.

Darauf wurde sein Verdacht auf die behaarten Dornen der untersuchten Raupen gelenkt.[4]) Sie konnten vielleicht ein lichtempfindliches Organ beherbergen. Aber auch diese Vermuthung bestätigte sich nicht. Die geschorenen Raupen behielten ihr Farbenanpassungsvermögen.

Die Haut selbst muss also dieses besitzen. Welches ist nun die physikalische Beschaffenheit ihrer Färbung? Poulton untersuchte dies[5]) bei Amphidasis betularia, dem Birkenspanner, der in hervorragendem Maasse die Farbenempfänglichkeit besitzt. Dieser verdankt die grüne Farbe einem in Oelkügelchen eingelagerten Farbstoff in der Fettschicht, die sich zwischen Epidermis und den oberflächlichen Muskeln befindet. Die Epidermis selbst kann ausserdem einen dunkeln Farbstoff beherbergen, der dann das grüne Pigment verdeckt und die Haut braun erscheinen lässt.

Die verschiedenen Färbungen entstehen hier also nicht

---

1) Versuche und Beobachtungen von Lister und Pouchet, vgl. Semper l. c. p. 117, Poulton, Colours of Animals p. 85.

2) Vgl. Ernst Brücke, Untersuchungen über den Farbenwechsel des afrikanischen Chamäleons. 1851 u. 1852; Ostwald's Klassiker 43.

3) Poulton, Phil. Trans. 178. p. 323 u. 345 ff. 1887; Colours of Animals p. 128.

4) Poulton, Phil. Trans. 178. p. 335. 1887. Colours of Animals p. 128.

5) Poulton, Trans. ent. Soc. p. 357. 1892.

durch verschiedene Lagerung der unveränderlichen Farbstoffe, sondern dadurch, dass Farbstoff neu gebildet und unter Einfluss des Lichtes verändert wird. Die wirksamsten Aenderungen erfolgen mit dem dunkeln Farbstoff in den Epidermiszellen, aber auch der darunter liegende grüne wird beeinflusst. Der Bereich der dadurch erzeugbaren Färbungen erstreckt sich vom Braun, Grün und Grau einerseits nach Schwarz, andererseits nach Weiss.[1])

Sollte nun die Farbenanpassung der Raupen mit der Farbenwiedergabe der Körperfarbenphotographie zusammenhängen, so müsste der dunkle Farbstoff von selbst im Dunkeln gebildet werden und die hellen Färbungen durch die Einwirkung des Lichtes auf ihn zu Stande kommen.

In der That hat Poulton beobachtet, dass im Dunkeln vorzugsweise dunkle Raupen und Puppen, im Lichte dagegen zwischen hellen Gegenständen helle gebildet werden.[2]) Indess ist es auffallend, dass dunkle Umgebung in kräftigem Lichte noch leichter dunkle Formen hervorbringt als vollkommene Dunkelheit.[3]) Ich komme darauf noch zurück.

Wie weit man von den Farbstoffen der Raupenhaut die oben bezeichneten Eigenschaften eines farbenempfänglichen Körpers für die Erklärung der Farbenanpassung fordern muss, hängt von dem Bereich dieser Anpassung ab.

Es hängt diese Frage mit der andern zusammen, ob die Raupen nur die in der Natur ihnen begegnenden Farben oder auch andere davon abweichende nachahmen können. Poulton[4]) hat meist nur den ersteren Fall beobachtet. Aber auch hier hat er gezeigt, dass nicht sonstige Umstände, sondern nur das Licht einen Reiz ausübte. Denn nicht bloss grüne Blätter und braune Zweige waren wirksam, sondern auch grüne und braune Papierstreifen; ebenso z. B. weisse Papierstreifen und verschiedenfarbige Glasfenster.[5])

Wenn aber von Raupen auch andere Farben als die ihrer

1) Poulton, Trans. ent. Soc. p. 359. 1892.

2) Vgl. z. B. Poulton, Phil. Trans. 178. p. 430. 1887 u. Trans. ent. Soc. p. 328 u. 353. 1892.

3) Poulton, Trans. ent. Soc. p. 329 u. 385. 1892.

4) Poulton, Trans. ent. Soc. p. 470. 1892.

5) Poulton, Trans. ent. Soc. Vgl. z. B. Tabellen p. 461 u. 466. 1892.

natürlichen Umgebung angenommen werden können, wird man sie jedenfalls nicht als Schutzfärbungen verstehen können. Eine derartige Erklärung verwirft auch Poulton[1]) in einem Fall bei Pieris brassicae und Pieris rapae, die sich in einem zu zwei Drittel mit tief orangefarbenem Papier belegten Glascylinder verpuppten. Diese Farbe zerstörte mehr als irgend eine andere mit Ausnahme von Weiss den dunkeln Farbstoff und erzeugte so hellgelbgrüne Puppen.

Eine ausgesprochene Abweichung von den Naturfarben erwähnt Beddard[2]): „Mr. Morris[3]) succeeded in producing white, red, salmon, black and blue pupae of Danais chrysippus; they are only green or pink in nature." Man muss also annehmen, dass der Farbstoff dieser Raupe in hohem Maasse die Eigenschaft eines farbenempfänglichen Stoffes besitzt in dem oben bezeichneten Sinne (p. 258).

Aus diesen Beispielen folgt, dass die biologische Erklärung der Schutzfärbung nicht genügen kann; es folgt aber keineswegs, dass natürliche Auslese nicht im Spiele war zur Hervorbringung des farbenempfänglichen Pigmentes der Raupen. Denn es ist leicht möglich, dass wenn dasselbe fähig wurde, die natürlichen Farben der Umgebung wiederzugeben, es von selbst, d. h. vermöge der nämlichen chemischen Beschaffenheit auch die Fähigkeit erlangte, andere Farben wiederzugeben.

Für die Annahme, dass diese Beschaffenheit in gewissem Maasse diejenige eines farbenempfänglichen Stoffes ist, spricht noch ein weiterer Versuch von Poulton. Da die Raupenhaut in hohem Grade sich der Farbe des Laubgrüns anpassen kann, so muss das von ihm ausgehende Licht auch besonders im Stande sein, das dunkle Pigment zu zerstören, das sich beim Fehlen des Lichtes in der Haut bildet und ansammelt. Poulton hat nun bei Pieris brassicae und Pieris rapae genau untersucht, welche Strahlen des Spectrums den dunkeln Farbstoff der Epidermis am stärksten zerstören. Das Ergebniss wird durch einen Linienzug[4]) veranschaulicht, dessen Abscissen die

1) Poulton, Phil. Trans. 178. p. 421. 1887.

2) Frank E. Beddard, „Animal Coloration", London, Swan Sonnenschein & Co. p. 137. 1895.

3) Morris, Journ. Bombay Nat. Hist. Soc. 1890 nach Beddard.

4) Poulton, Phil. Trans. 178. Fig. 6. p. 431. 1887.

Wellenlängen der Beleuchtungsfarben und dessen Ordinaten den geschätzten Betrag des dunkeln Farbstoffs in der Epidermis darstellen. Ausser dem bereits erwähnten Maximum der Farbstoffzerstörung durch orangefarbene Beleuchtung mit Wellenlängen zwischen 570 und 650 $\mu\mu$ findet sich bei Pieris rapae noch ein zweites, jedoch weniger stark ausgeprägtes für hellgrüne Beleuchtung mit Wellenlängen zwischen 510 und 584 $\mu\mu$. Es ist also besonders der gelbe Bestandtheil des von grünen Blättern ausgesandten Lichtes, welcher in hohem Maasse den dunkeln Farbstoff zu vernichten vermag. Die äussersten rothen und blauen Theile des Spectrums wirken dagegen fast ebenso wie Dunkelheit.

Die Aehnlichkeit mit dem Vorgange bei der Körperfarbenphotographie geht aber noch weiter. Poulton hat nämlich in der Epidermis grüner Raupen von Amphidasis betularia, die den dunkeln Farbstoff zu beherbergen vermag, statt dessen einen mattgelben Farbstoff gefunden, der unter dem Mikroskop ein grüngelbes Ansehen hatte: „It is therefore clear that the surroundings determine not only the presence or absence of true pigment in the epidermic cells, but also its constitution and therefore colour when present.“[1])

Auch der grüne Farbstoff in der Fettschicht kann theilweise vernichtet werden[1]), z. B. durch weisse Beleuchtung. Dann empfängt er also auch Strahlen, die von ihm absorbirt werden und deshalb auf ihn einwirken können.

Eine Prüfung der gegebenen Erklärung bildete bei den Farbenphotographien der Versuch mit den gekreuzten Spectren (p. 261). Einen diesem ähnlichen Versuch hat auch Poulton angestellt. Er versetzte Raupen aus dunkler in helle Umgebung und umgekehrt, ein Versuch, den er „Transference Experiment“[2]) nannte. Er ergab, dass eine Veränderung der ersten Färbung im Sinne der Einwirkung der zweiten Umgebung bemerklich war, so lange er innerhalb der Stadien stattfindet, in denen die Raupe die Empfindlichkeit besitzt. Gerade hier tritt aber dem Verständniss eine grosse Schwierigkeit entgegen, auf die ich sofort eingehen werde.

1) Poulton, Trans. ent. Soc. p. 359. 1892.
2) Vgl. z. B. Trans. ent. Soc. p. 352 u. 419. 1892.

Es muss zunächst hervorgehoben werden, dass in den bisher besprochenen Erscheinungen die Raupenhaut sich so verhält, als ob sie Farbstoffe beherberge, die in den Stadien der Empfindlichkeit mit verschiedener Annäherung die Eigenschaft des farbenempfänglichen Stoffes besitzen.

Damit man aber einfach sagen könnte, die Raupenhaut verhält sich wie eine farbenphotographische Platte, müsste festgestellt sein, dass zwei verschiedene Stellen der Haut, die verschiedener Beleuchtung ausgesetzt waren, auch eine verschiedene Farbe annehmen.

Eine solche Beobachtung liegt in der That vor. Doch scheint sie die einzige zu sein. Sie wurde mitgetheilt von Mrs. Barber in einer Abhandlung, welche durch Darwin der entomologischen Gesellschaft von London[1]) vorgelegt wurde. Eine Raupe von Papilio nireus setzte sich vor dem Verpuppen auf Holz fest, welches an Backstein anstiess. Nach dem Abstreifen der Haut nahm sie mit der unteren Seite die Farbe des Holzes an, an das sie befestigt war, mit der oberen aber diejenige des anliegenden Backsteins. Poulton[2]) bemerkt dagegen, dass eine Verschiedenheit der Rücken- und Bauchseite bei Puppen häufig angetroffen wird. Doch könnte dies vielleicht gerade dem Umstande zugeschrieben werden, dass diese beiden Seiten häufig einer verschiedenen Beleuchtung unterliegen.

Zu dem entgegengesetzten Ergebniss führten aber die Versuche von Poulton. Er brachte den vorderen und hinteren Theil der Raupe in verschiedene Umgebung, ein Versuch, den er als „conflicting colour experiment“[3]) bezeichnet. Es wurde keine örtliche Wirkung beobachtet, sondern eine auf dem ganzen Körper gleichförmige, mittlere Färbung, die von dem Verhältniss der Oberflächen beider Theile abhing, auch ohne vorwiegenden Einfluss des vorderen Theiles.

Gegen die einfache Natur des Vorgangs sprechen auch die Versuche Poulton's, durch die er die Stadien grösserer Empfindlichkeit feststellte. Es sind das die der Häutung oder

1) Ent. soc. trans. p. 519. 1874 nach Poulton.

2) Poulton, Phil. Trans. 178. p. 315. 1887.

3) Vgl. z. B. Phil. Trans. 178. p. 373. 1887. Colours of Animals p. 131. Trans. ent. Soc. p. 420 u. 446. 1892.

Verpuppung vorangehenden. Kurz vor dieser fand meist bei dem „Transference Experiment“ die Uebertragung in andere Umgebung statt und trotzdem erwies sich die erste Umgebung meist als von grösserem Einfluss als die zweite auf die Färbung, welche die Raupe oder Puppe *nach* der Häutung oder Verpuppung annahm. Diese zweite Haut ist natürlich unter der früheren vorgebildet, besitzt aber nach Poulton dann noch keinen Farbstoff. Die zukünftige Farbe dieser Haut wird also beeinflusst, ohne dass sie noch einen Farbstoff enthält.[1])

Man muss daher Poulton unbedingt zustimmen, wenn er bei diesen Fällen die Annahme eines einfachen photographischen Vorgangs verwirft und verwickelte physiologische Vorgänge voraussetzt.[2])

Trotzdem halte ich es nicht für ausgeschlossen, dass eine Beziehung zur Körperfarbenphotographie besteht, nämlich insofern, als die Farbstoffe der Raupen die Eigenschaft des farbenempfänglichen Stoffes in gewissem Maasse besitzen. Natürlich konnte Poulton nicht eine solche Beziehung annehmen, da die Natur jener Farbenphotographie noch nicht ergründet war. Es besteht für ihn daher auch eine Lücke im Verständniss der Farbenanpassung der Raupen, die er mit den Worten[3]) ausdrückt: „some quality in the light reflected from surrounding objects forms the cause, but the physiological chain which connects the two“ — (Farbe der Beleuchtung und der Haut) — „has yet to be discovered.“ Die gesuchte Beziehung ist aber vermuthlich die Wirkungslosigkeit des Lichtes, wenn es reflectirt, die Wirkungsfähigkeit wenn es absorbirt wird, je nachdem es an Farbe mit den belichteten Farbstoffen übereinstimmt oder nicht, soweit wenigstens die Farbenanpassung überhaupt besteht.

1) Der Freundlichkeit des hiesigen Lepidopterologen Hrn. Omar Wackerzapp verdanke ich die Mittheilung, dass die Raupe von Geometra Vernaria ihr grünes Sommerkleid im Herbst mit dem Braunwerden der Blätter in ein braunes, nach Ueberwinterung im nächsten Frühling wieder in ein grünes verwandelt. In beiden Fällen ist aber *keine Häutung* mit der Farbenänderung verbunden. Vgl. Stett. entomol. Zeit. p. 1. 1889. Es ist aber nicht festgestellt, ob hier das Licht die Ursache der Farbenänderung ist.

2) Poulton, Phil. Trans. 178. p. 317. 1887. Trans. ent. Soc. p. 391. 1892.

3) Poulton, Trans. ent. Soc. p. 359. 1892.

Um aber zu zeigen, dass die merkwürdige Beeinflussung der Beschaffenheit der künftigen Haut und der Beschaffenheit der ganzen Hautoberfläche durch Belichtung eines Theiles der Haut nicht im Widerspruch mit dieser Vorstellung ist, bin ich genöthigt darzulegen, dass Vorgänge denkbar sind, welche im Anschluss an die den Anstoss ertheilende Lichtabsorption jene Wirkung verstehen lassen.

Poulton hält die Annahme für möglich, dass die oberflächliche gefärbte Schicht sich befindet in einem Zustand von „complete physiological unity“[1]) und dass das Nervensystem die Lichtwirkung fortleitet. Es ist nicht schwer sich davon eine genauere physikalische Vorstellung zu bilden.

Ich erinnere an Erscheinungen, die Ostwald[2]) unter dem Namen der chemischen Fernewirkung zusammengefasst hat. Man kann amalgamirtes Zink auflösen durch Zufügung verdünnter Säuren, aber nicht zum Zink, sondern zu einem mit ihm metallisch verbundenen Platindraht, wenn Zink und Platin durch eine Thonwand voneinander getrennt ursprünglich in eine neutrale Lösung eingetaucht waren. Natürlich wird die Wirkung durch den electrischen Strom vermittelt.

In ähnlicher Weise könnte der bei der Belichtung des Farbstoffes einer Zelle entstandene Stoff in Nervenleitungen einen electrischen Strom erzeugen, der die gleiche Zersetzung in anderen Zellen der Raupenhaut hervorbringt, natürlich unter Verminderung der Zersetzung in der betroffenen Zelle selbst. Es entstände dadurch eine gleichmässige Wirkung in der ganzen Haut. Eine solche Uebertragung der Wirkung müsste man vergleichen mit einer Fernsehvorrichtung oder einer Vorrichtung electrisch in die Ferne zu photographiren.

Da aber nach Poulton anscheinend nicht die beleuchtete Haut, sondern die darunter liegende farblose Haut beeinflusst wird, so müsste man annehmen, dass in irgend einer Weise eine Zersetzung auf diese übertragen würde, wobei die in der äusseren Haut rückgängig gemacht wird. Diese Zersetzung müsste die spätere Bildung von Farbstoff verhindern. Solche besonderen Vorstellungen sind freilich noch verfrüht und nur

1) Poulton, Trans. ent. soc. p. 392. 1892.
2) Ostwald, Zeitschr. f. phys. Chem. 9. p. 540. 1892.

angeführt, um die Beziehung zur Farbenphotographie nicht ausgeschlossen erscheinen zu lassen; sie sind auch verwickelt; aber dies ist ja der Vorgang selbst. Da indess die Natur vom Einfachen zum Verwickelten aufsteigt, wäre es merkwürdig, wenn nicht auch noch Fälle bekannt werden sollten, in denen der Vorgang auf einer frühen einfacheren Entwickelungsstufe stehen blieb und eine unmittelbarere Beziehung zur Farbenphotographie aufwiese.

Poulton[1]) führt auf ähnliche Vorgänge die Fähigkeit der Halias prasinana zurück, einen der Umgebung angepassten Cocon zu spinnen.

Jene Fernleitung in der Raupenhaut erklärt auch die Wirkungsfähigkeit dunkler Umgebung im Lichte. Denn die den dunkeln Gegenständen anliegenden Theile der Haut sind dann ein Entwickelungsheerd für dunkles Pigment, das der ganzen Haut zu Gute kommt.

Dass diese Entwickelung aber noch stärker ist als in vollkommener Dunkelheit und auch stärker bei Raupen, die erst dem Lichte und dann der Dunkelheit, als bei solchen, die nur der Dunkelheit ausgesetzt waren[2]), hängt vielleicht mit der Wirkung der äussersten violetten und ultravioletten Strahlen des Tageslichtes zusammen. Ich werde später eine ähnliche Erscheinung bei Farbenphotographieen besprechen.

Weitere Fälle von Farbenanpassung wurden schon oben erwähnt. Es sind solche, bei denen das Auge den auslösenden Reiz empfängt. Nach Eimer[3]) lassen sie sich zurückführen auf den bei den Raupen, indem zwischen der Stelle des Reizempfanges und der Reizwirkung eine längere Nervenbahn eingeschaltet und die Fähigkeit des Reizempfanges auf das Auge beschränkt wird. Semper[4]) erklärt hier die Farbenanpassung durch die mit den Farben und der Helligkeit der Umgebung wechselnde Stärke des Reizes auf die Netzhaut. Sie erzeugen nach Beobachtungen von Dewar[5]) verschieden starke electrische Ströme; man muss ihnen daher auch verschiedene Fähigkeit

1) Poulton, Trans. ent. Soc. p. 392. 1892; Colours of Animals. p. 145.
2) Trans. ent. Soc. p. 419. 1892.
3) Eimer, Entstehung der Arten. p. 156.
4) Semper, l. c. p. 119.
5) Dewar, Nature. **15**. p. 433 u. 453. 1877.

der Zusammenziehung der Chromatophoren zuschreiben. Mit wachsender Stärke der Zusammenziehung erscheint aber die Haut heller. Man sieht, dass diese Erklärung der für die Raupen gegebenen ähnlich ist.

Ferner berichtet Semper[1]) über eine merkwürdige Angabe, wonach „weisse Kaninchen am leichtesten und sicher zu züchten seien in weissem reflectirten Licht.“ Ich glaube aber kaum, dass dies mit dem vorliegenden Gegenstand etwas zu thun hat. Bei ihren Verwandten im hohen Norden hat man wenigstens Gründe[2]) die Anlegung des weissen Winterkleides auf den mittelbaren Einfluss der Kälte zurückzuführen. Und wenn jene Kaninchen nur reflectirtes und nicht directes Sonnenlicht erhielten, hatten sie vermuthlich ihren Aufenthalt an einem kühlen Orte.

Ob der oben betrachteten Art von Farbenanpassung noch eine weitere Verbreitung zukommt, weiss ich nicht. Vielleicht werden aber weitere Fälle bekannt, wenn erst die Aufmerksamkeit der Biologen darauf gelenkt ist.[3])

Es ist aber auffällig, dass in dem kräftigen Licht der Aequatorialzonen eher dunkle als helle Formen herangewachsen sind. Aber auch hier nimmt man einen Zusammenhang mit dem Licht an. So berichtet Darwin[4]) über die dunklere Färbung vieler Vögel, die den Süden der Vereinigten Staaten Amerikas bewohnen gegenüber denen im Norden, und fügt hinzu: „dies scheint das directe Resultat der Verschiedenheiten zwischen den beiden Gegenden in Bezug auf Temperatur, Licht etc. zu sein.“ [5])

1) Semper, l. c. p. 265.

2) Vgl. Poulton, Colours of Animals. p. 94 ff. 1890; Beddard, Animal Coloration. p. 76. 1895.

3) Nachträglich finde ich noch in Vogel's Handbuch der Photographie 1. 4. Aufl. p. 57 u. 203. 1890 die bemerkenswerthe Angabe, dass schon Herschel (Phil. trans. p. 189. 1842) nachwies, dass gewisse Pflanzenfarbstoffe am stärksten durch die zu der ihrigen complementären Beleuchtungsfarbe gebleicht werden. Es hätte demnach die Untersuchung Reiz, ob auch bei der lebenden Pflanze z. B. gewisse Blüthen unter farbiger Beleuchtung ähnliche Färbungen annehmen können.

4) Darwin, Abstammung des Menschen; deutsch von V. Carus. 5. Aufl. p. 253.

5) Hr. O. Wackerzapp gewährte mir den genussreichen Anblick ganzer Reihen von Schmetterlingen jeweils derselben Art in seiner reich-

Hier muss man nun bedenken, dass unser Urtheil über den Grad der Farbenanpassung getrübt ist durch die Unempfindlichkeit unseres Auges gegen die äussersten violetten und ultravioletten Strahlen einerseits, die ultrarothen andererseits. Jene bringen aber häufig Schwärzung hervor und müssen daher bei der Farbenphotographie fern gehalten werden.[1])

In dieser Hinsicht verdient der folgende Versuch Beachtung, den ich mit einem Poitevin'schen Blättchen anstellte. Dasselbe wurde heller, wenn von dem beleuchtenden unzerlegten electrischen Licht die ultravioletten Strahlen durch eine Chininlösung zurückgehalten wurden, dagegen dunkler, wenn diese ungehindert hinzutraten. Es ist dies eine Folge des im ersten Fall zersetzten, im zweiten neugebildeten Silberchlorürs. Bei derartigen Versuchen fiel mir auch die schwärzende Wirkung der Erwärmung und die Veränderungen begünstigende der Feuchtigkeit auf.

Nach allem wird man wenigstens bei den Raupen einen Zusammenhang mit der Körperfarbenphotographie anerkennen, insofern sie einen Farbstoff beherbergen, der in gewissem Maasse die Eigenschaften eines farbenempfänglichen Stoffes besitzt.

Und in diesem Sinne muss die Farbenanpassung der einzelnen Raupe als eine mechanische bezeichnet werden. Damit würde aber nicht im Widerspruch stehen, wenn diese Fähigkeit durch biologische Anpassung im Sinne Darwin's erworben wurde. Denn es können diejenigen Individuen am besten geschützt und erhalten worden sein, deren Pigmente am besten farbenempfänglich waren.

Ob jene Fähigkeit aber auch unter Mitwirkung des Lichtes nach Roux und Eimer[2]) oder nur durch zufällige Abänderung des Keimplasmas nach Weismann im Laufe der Zeiten entwickelt wurde, ist wohl nicht leicht zu entscheiden. Dabei

haltigen Sammlung, in denen je nach dem Breitegrad oder dem Klima, z. B. auf Nord- und Südseite der Alpen, oder der Höhenlage die Färbungen stufenweise verschieden waren. Die sonst bedeutungslos erscheinenden Unterschiede würden wohl kaum zu verstehen sein, wenn man sie nicht auf den Einfluss von Licht, Wärme etc. zurückführen wollte.

1) Zenker, Photochromie. p. 59.

2) Roux u. Eimer, vgl. Citat p. 235 u. 234.

muss man bedenken, dass es keinen vollkommen echten Farbstoff gibt und also jeder wohl in einem geringen Maasse farbenempfänglich sein wird. Dann werden aber auch die frühen Vorfahren der Raupen, welche noch nicht die Farbenanpassung der heutigen besessen haben, ein wenig durch das Licht verändert worden sein. Nach Eimer müsste man sich vorstellen, dass diese chemische Veränderung auch nicht ohne Einfluss auf die Beschaffenheit des Keimplasmas und der Nachkommen geblieben sein konnte und deren individuellen Abänderungen eine bestimmte Richtung verliehen hat. Diese Abänderungen brauchten dann nicht auf einen Zufall zu warten. Aber selbst wenn Eimer's Vorstellung unzulässig wäre, dürfte ein solcher Zufall in physikalischem Sinne nur als das Spiel unbekannter Vorgänge betrachtet werden, die noch der Aufklärung bedürfen.

16. Zusammenfassung und Schluss.

Ich hatte mir die Aufgabe gestellt, die Ursachen der Farbenwiedergabe bei den alten Verfahren der Farbenphotographie zu ermitteln, wie sie in ihren Hauptarten durch die von Seebeck, Becquerel, Poitevin vertreten sind.

Die Erklärung von Schultz-Sellack durch Zertheilungsfarben wurde zunächst als unrichtig erwiesen.

Es war vor allem ein Mittel erforderlich zur Unterscheidung von Interferenz- und Körperfarben, welche an Stoffen von hohem Brechungsvermögen erscheinen.

Dies leistete ein rechtwinkeliges Glasprisma von gleichfalls hohem Brechungsvermögen, durch welches die zu untersuchenden Farben betrachtet wurden.

Durch die dabei eintretende Veränderung der Farben erwies sich das Becquerel'sche Bild auf spiegelnder Silberunterlage als im Wesentlichen durch Interferenz entstanden. Hier hatte also Zenker als Ursache der Farbenwiedergabe richtig die Bildung von stehenden Lichtwellen erkannt.

Bei den Bildern nach Seebeck und Poitevin trat aber keine Farbenänderung ein. Sie bestehen also aus Körperfarben, und die Zenker'sche Erklärung findet auf sie keine Anwendung.

Zu demselben Schluss führt die Thatsache, dass diese Bilder die gleichen Farben im durchgehenden wie im reflectirten Licht zeigen.

Es liess sich nachweisen, dass auch bei Becquerel's Bildern in geringem Grade Körperfarben mitwirken.

Das Verständniss der Entstehung von Körperfarben wird angebahnt durch den für das Seebeck'sche Verfahren von Carey Lea, für das Poitevin'sche von Krone gelieferten Nachweis, dass die in der Platte vorhandenen Stoffe fähig sind farbige Verbindungen zu liefern, unter deren Farben fast alle Spectralfarben, wenn auch nicht mit deren Farbenton vertreten sind.

Es fehlte aber noch die Erklärung, warum die entstehenden Farbstoffe mit der jeweiligen Farbe der Beleuchtung übereinstimmten.

Die Erklärung wurde darin gefunden, dass von allen entstehungsfähigen Farbstoffen nur der mit der Beleuchtungsfarbe gleichfarbige auf die Dauer bestehen kann, weil er dieselbe am besten zurückwirft, also am wenigsten absorbirt und daher am wenigsten verändert werden kann; die andersfarbigen dagegen können jene Beleuchtungsfarbe absorbiren und deshalb auch wieder zersetzt werden.

Diese Erklärung wurde dadurch geprüft, dass auf ein Spectrumbild ein rechtwinklig kreuzendes Spectrum entworfen wurde. Dabei vermochte in der That eine richtig abbildbare Beleuchtungsfarbe alle anderen entstandenen Farbstoffe zu zersetzen; der gleichfarbige blieb allein erhalten.

Es ist also grundsätzlich möglich, dass farbige Beleuchtung in geeigneten Stoffen gleichfarbige Körperfarben erzeugt.

Ich habe solche Stoffe als *farbenempfängliche* bezeichnet.

Diese Möglichkeit und die Erkenntniss ihrer Ursache bilden die neue Grundlage einer Art Farbenphotographie, die man als *Körperfarbenphotographie* bezeichnen kann. Die Hoffnung scheint berechtigt, dass auf dieser Grundlage neue Verfahren gefunden werden, welche die alten Körperfarbenverfahren an Genauigkeit der Farbenwiedergabe und Fixirbarkeit der Bilder übertreffen.

Die Farbenwiedergabe kann als *Farbenanpassung* bezeichnet werden; denn sie entsteht durch Auslese der Farbstoffe, welche

der zerstörenden Einwirkung der Beleuchtungsfarbe am besten widerstehen; das sind die gleichfarbigen.

Dieser Umstand legte die Frage nahe, ob Farbenanpassung in der Natur auf gleichem Wege entstehen kann, d. h. durch einen Vorgang *mechanischer Anpassung* im Gegensatz zu der biologischen Anpassung, welche nach Darwin durch natürliche Auslese der Einzelwesen entsteht.

Ein solcher Fall liegt vor bei Raupen und ihren Puppen und ist durch eingehende Versuche von Poulton untersucht. Wenngleich diese das Hinzutreten verwickelter physiologischer Vorgänge erweisen, machen sie doch die Annahme wahrscheinlich, dass der Farbstoff dieser Thiere innerhalb der empfindlichen Stadien der Entwickelung in einem gewissen Maasse die Eigenschaft des farbenempfänglichen Stoffes besitzt.

In diesem Fall würde die Erscheinung zu einer allgemeinen Erscheinungsgruppe mechanischer Anpassung gehören, die durch Wilhelm Roux entdeckt und unter der Bezeichnung „functionelle Anpassung" zusammengefasst wurde.

Ich glaube, dass mit Vorstehendem die Arbeit des Physikers betreffs der mechanischen Farbenanpassung im Wesentlichen gethan ist, und es hat jetzt die des Chemikers und Photographen einerseits, des Biologen andererseits zu beginnen, beziehungsweise das physikalische Ergebniss nutzbar zu machen.

Phys. Inst. d. techn. Hochschule Aachen, 25. April 1895.

2. *Bemerkungen zu einer Arbeit des Hrn. Borgesius über ein Interferenzrefractometer etc.*[1]) *von Wilhelm Hallwachs.*

Im zweiten, diesjährigen Heft der Annalen spricht sich Hr. Borgesius p. 242 in Bezug auf frühere Arbeiten von mir folgendermassen aus.

„Hallwachs (Wied. Ann. 47. p. 381. 1891; l. c. 50. p. 584. 1893) hat gemeint, zeigen zu können, dass nur in Bezug auf die Dichte sich constitutive Einflüsse (Dissociation) geltend machen, das Refractionsvermögen aber von ihnen wenig berührt werde."

Nach Herleitung der Beziehung

$$AR = 1000\, v\, \Delta n + \varphi\,(n_0 - 1),$$

wo A das Aequivalentgewicht,
R das Brechungsvermögen $(n-1)/d$,
v die Verdünnung (Grammäquivalente im Liter),
Δn die Brechungsdifferenz,
φ das „Molecularvolumen",
n_0 den Brechungsexponent des Wassers
bedeuten[2]), fährt er fort:

„Mit den von Hallwachs für das Molecularvolumen des NaCl gegebenen Werthen berechnet sich aus meinen Beobachtungen die Molecularrefraction AR:

v	$^1/_2$	2	4	8	16	32	64	128
AR	15,69	15,90	15,88	15,83	15,89	15,93	16,16	16,54.

Diese Zahlen zeigen, obwohl sie constanter sind als die für $A\Delta n/p$ oder $v\Delta n$ erhaltenen Werthe, doch noch ein Anwachsen bei steigender Verdünnung. Für andere Salze war ich nicht im Stande, die Berechnung auszuführen, da genügend genaue Angaben über die Dichten nicht vorliegen. So lange aber φ abnimmt mit wachsender Verdünnung, und dies scheint

1) Borgesius, Wied. Ann. **44.** p. 221. 1895.

2) Die angegebenen, von mir früher benutzten Bezeichnungen sind auch in das Citat eingeführt.

immer der Fall zu sein, müsste nach obiger Formel $v\,\Delta n$ zugleich grösser werden, um constante Zahlen für R zu ergeben. Nach meinen Beobachtungen scheint dies nicht immer stattzufinden, für KCl z. B. zeigen die Zahlen ein Maximum für $v = 16$."

Abgesehen davon, dass der Verfasser im ersten Satz des Citates das Resultat meiner Versuche [1]) nicht scharf wiedergegeben hat, ist der Schluss, den er aus seinem zu diesem Zweck nicht ausreichenden Versuchsmaterial, der Reihe mit NaCl und etwa KCl zieht, unberechtigt.

Zunächst ist der erste Werth von AR in der oben angegebenen Reihe nicht ganz richtig berechnet. Der Verfasser gibt nämlich p. 234 für $1000\,v\,\Delta n$, dort mit

$$\frac{m\,r}{p}\,10^3$$

bezeichnet, den Werth 9,48 an. Die Temperatur war 19,2°; für 18° ist beobachtet [2]) $\varphi_{18^\circ} = 18{,}94$; für 19,2° ergiebt sich dann [3]) $\varphi_{19{,}2^\circ} = 19{,}04$, also $\frac{1}{3}\varphi = 6{,}35$. Aus der oben angegebenen Formel folgt dann:

$$AR = 9{,}48 + 6{,}35 = 15{,}83.$$

Der niedrigere Werth 15,69 des Verfassers ist vielleicht dadurch veranlasst, dass er für 14,1° gültige φ benutzt hat, denn er verweist hinsichtlich des φ auf meine Arbeit im Band 50 d. Ann., wo nur Werthe für 14,1° angegeben sind.

Eine weitere Unsicherheit des ersten Werthes der AR liegt darin, dass der Interferentialrefractor für eine so concentrirte Lösung kein geeignetes Instrument ist. Die beobachteten Streifenzahlen sind in der Arbeit nicht enthalten. Da die ganze Verschiebung der Compensatorzelle (35 mm) die Zählung von 1100—1200 Streifen erfordert hätte, wurde nur ein Bruchtheil derselben benutzt. Wählt man diesen so, dass die Streifenverschiebung auf Werthe herabgeht, welche in Rücksicht auf Temperaturfehler genügend schnell zu ermitteln sind,

---

1) Hallwachs, Wied. Ann. **53.** p. 11. 1894; **50.** p. 587. 1893.

2) F. Kohlrausch u. W. Hallwachs, Wied. Ann. **53.** p. 39. 1894.

3) Hallwachs, Wied. Ann. **53.** 6. 1894; $\alpha - \alpha_{H^2O}$ ist gleich 0,000165 nach Marignac, Arch. de Gén. **39.** p. 283. 1870.

und nicht so leicht dem Verzählen unterliegen, so gewinnen die Ablesungsfehler der Verschiebung, 0,02—0,04 mm (eine grössere Anzahl von Beobachtungen zur Beurtheilung dieses Fehlers ist nicht mitgetheilt), beträchtlichen Einfluss.

Aus diesen Gründen ist die zweite Decimale des oben berechneten Werthes unsicher.

Was ferner die beiden letzten Zahlen der erwähnten Reihe des Verfassers für AR betrifft, so sind bei denselben wegen der zu geringen Troglänge grössere Fehler in Aussicht zu nehmen.

Erstens ist die dabei benutzte Streifenverschiebung, 5 bezw. 10, an sich sehr klein.

Zweitens sind die Fransen bei so kleinen Gangunterschieden sehr breit und wenig schön, sodass im allgemeinen die Einstellung leidet.

Der Verfasser beobachtet nämlich unter spectraler Zerlegung so, dass er die Phasendifferenz durch Null durchschlägt, d. h. die Voreilung des Strahls I gegen II durch Compensation in ein ebenso grosses Zurückbleiben verwandelt und während dessen die Wanderung zählt. Nähert man sich dabei der Phasendifferenz Null, so „werden dann zuerst" die Streifen „immer breiter, bis fast das ganze Spectrum zugleich verdunkelt wird", wie der Verfasser p. 226 selbst angiebt. Ich kann das nach früheren, eigenen Beobachtungen bestätigen und habe die Einstellungsfehler in solchen Fällen beträchtlich gefunden.

Bei den erwähnten beiden verdünntesten NaCl-Lösungen geschah die Einstellung auf Interferenzen, denen höchstens 2,5 bezw. 5 Wellenlängen Gangdifferenz zugehörten. Denn die maximale Verschiebung $2e$ der Compensatortröge betrug [1]) 35 mm, die Brechungsdifferenz v für die Lösung von $v = 128$ war [2]) $0{,}83 \cdot 10^{-4}$, daraus findet sich für Na-Licht die ganze Streifenverschiebung [3])

$$p = \frac{2ev}{\lambda} = \frac{35 \cdot 0{,}83 \cdot 10^{-4}}{5{,}89 \cdot 10^{-4}} = 4{,}9 .$$

1) Borgesius, l. c. p. 226.
2) l. c. p. 234.
3) Vgl. die Formel l. c. p. 226.

Den beiden Streifenmitten, auf welche eingestellt werden kann, gehören also höchstens $4{,}9/2 = 2{,}5$ Wellenlängen Gangunterschied zu. Es muss sich also der Einfluss der vom Verfasser, wie oben citirt, angegebenen Streifenverbreiterung in bedeutendem Maasse geltend machen und auch bei der doppelten Concentration noch einwirken.

Vermuthlich haben auch diese Fehlerquellen die bei anderen Bestimmungen des Verfassers mit geringerer Streifenzahl vorkommenden Unregelmässigkeiten mit veranlasst, z. B.[1])

		v = 4	16	64
$\frac{1}{2}$ $BaCl^2$		15,29	15,42	14,93
$\frac{1}{2}$ $SrCl^2$	1000	14,09	14,18	14,06
$\frac{1}{2}$ $BaBr^2$	$v\Delta n$	19,06	19,21	19,22
$\frac{1}{2}$ $SrBr^2$		17,91	18,01	17,67

Man sieht, dass die einfachen Beziehungen der Zusammensetzung der vier Körper in den Werthen für $v = 4$ und $v = 16$ scharf hervortreten, in denen für $v = 64$ aber nicht mehr.

Ferner nimmt bei dreien der Körper $v\Delta n$ mit der Verdünnung ab, während sich bei allen von mir oder Hrn. Forch untersuchten Lösungen bis zu viel stärkeren Verdünnungen hin eine Zunahme fand und diese auch bei den Versuchen des Verfassers eintritt, so lange die Verdünnungen nur bis 32 gehen. Bei der Hälfte der untersuchten Körper ist bis $v = 64$, bei zweien bis $v = 128$ fortgeschritten worden: die entsprechenden Aenderungen von $v\Delta n$ haben wechselndes Vorzeichen.

Am meisten tritt dies bei Vergleichung der Werthe für NaCl mit denen für KCl hervor:

		v = 4	8	16	32	64	128
1000 $v\Delta n$	KCl	10,06	10,13	10,26	10,27	10,23	10,05
	NaCl	10,22	10,25	10,36	10,49	10,77	11,18

Während die Werthe für NaCl bei den beiden grössten Verdünnungen auffällig ansteigen, nehmen die für KCl ab. Der Verfasser schliesst aus diesen Zahlen, dass bei KCl bei mittlerer Verdünnung ein Maximum eintrete[2]), was aber doch wohl zu weit gegangen sein dürfte.

Unter Berücksichtigung des gerade Erwähnten, des über die Fehler, welche aus zu geringer Streifenzahl entspringen,

1) l. c. p. 234 u. 235.
2) l. c. p. 243 u. 242.

Gesagten und der Erwägung, dass gerade für sonst so analoge Körper wie NaCl und KCl eine derartige Verschiedenheit des Verhaltens, wie sie die Zahlen des Verfassers zeigen, wenig wahrscheinlich ist, darf man die mitgetheilten Werthe für $v = 64$ und $v = 128$ zu weiteren Schlüssen über den Zusammenhang zwischen Lichtbrechung und Concentration nicht verwenden. Es kommt bestätigend hinzu, dass der Verfasser selbst Fehler von einigen Einheiten der 6. Decimale in Aussicht nimmt (p. 227) und eine quadratische Formel für die Abhängigkeit des Δn von der Concentration als zulässig erachtet (p. 242), welche Abweichungen bis zu sechs Einheiten der 6. Decimale giebt. Dem entspricht aber ein Fehler von 7—8 Proc. in dem AR der verdünntesten NaCl-Lösung, während bereits ein Fehler von 4 Proc. weitere Schlüsse unmöglich macht.

Die vom Verfasser gegebene, oben citirte Reihe der Molecularrefraction des NaCl in Lösungen verschiedener Concentration erhält nach dieser Weglassung der beiden letzten und der Verbesserung des ersten Werthes folgende Gestalt:

v	$\frac{1}{2}$	2	4	8	16	32
AR	15,82	15,90	15,88	15,83	15,89	15,93
t	19,2°	18,0	18,8	19,4	19,8	18,1

Diese Beobachtungen reichen nun mit Rücksicht auf ihren, aus der Reihe selbst ersichtlichen, wohl durch die Temperaturschwankungen [1]) etwas beeinträchtigten Genauigkeitsgrad zu einem Schluss auf Inconstanz von AR bei fortschreitender Verdünnung nicht aus. Insbesondere lässt sich aus ihnen ein Ansteigen von AR mit wachsender Verdünnung nicht entnehmen.

Es findet mit letzterer, wie meine früheren Beobachtungen zeigen, allerdings ein geringer Anstieg statt, er ist aber gegen das erhebliche Wachsen der Werthe von $v\Delta n$ sehr klein und

1) Hr. Borgesius gibt l. c. p. 230 darüber an, dass die Beobachtungen während der Monate Juli bis September 1893 geschahen, dass die Sonne mit einer unerhörten Ausdauer ihre Strahlen herabsandte, das Beobachtungszimmer gegen Süden lag, und es deshalb nicht möglich war, die Temperaturänderungen innerhalb geringer Grenzen zu erhalten. Letzteres ergab sich bei meinen früheren Versuchen als durchaus nothwendig, wenn man für weitergehende Schlüsse ausreichend genaue Beobachtungen liefern wollte, und fand deshalb, wie aus den Temperaturangaben hervorgeht, sorgfältig statt.

fällt fast vollständig weg, wenn man sich für das Brechungsvermögen der Grösse

$$R' = \frac{1}{d}\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$$

bedient.

Aus den im Vorstehenden gegebenen Erläuterungen geht hervor, dass durch die Beobachtungen des Hrn. Borgesius dessen zu Anfang citirter Aeusserung entgegen meine früheren Resultate nicht berührt werden. Der Inhalt derselben war, „dass die" an verdünnten Lösungen von mir früher beobachtete „in vielen Fällen beträchtliche Zunahme der molecularen Brechungsdifferenz mit wachsender Verdünnung durch das besondere Verhalten der Dichte verdünnter Lösungen vollständig erklärt wird", dass also „die im Gang des electrischen Leitungsvermögens ihren deutlichsten Ausdruck findenden, constitutiven Einflüsse (Dissociation) auf das Brechungsvermögen keinen erkennbaren Einfluss ausüben. Denn einerseits sind die beobachteten Aenderungen sehr klein, andererseits ist ja die Unveränderlichkeit des Brechungsvermögens auch sonst nur annäherungsweise vorhanden und zu erwarten.[1])"

Dresden, April 1895.

1) Hallwachs, Wied. Ann. 53. p. 10 u. 11. 1894.

3. *Ueber den Einfluss gelöster Gase auf das Silbervoltameter; von John E. Myers.*

(Aus der Strassburger Dissertation.)

Die Hrn. Schuster und Crossley fanden, dass die im Silbervoltameter abgeschiedenen Mengen um einen wahrnehmbaren Betrag grösser sind, wenn die Electrolyse im Vacuum, als wenn sie wie gewöhnlich unter atmosphärischem Druck und in Luft stattfindet. Der Mittelwerth der Differenzen aus einer grossen Versuchsreihe beträgt rund $^1/_{10}$ Proc. des Niederschlages. [1])

Diese kleinen Unterschiede wurden Sauerstoff zugeschrieben, der von der Silberlösung absorbirt worden war; denn als die Electrolyse in einer Sauerstoffatmosphäre ausgeführt wurde, ergaben sich kleinere Niederschläge als unter gleichen Umständen in Luft.

Die nachfolgenden Untersuchungen wurden unternommen in der Absicht, diese interessante Entdeckung zu prüfen und ferner, einen Einfluss anderer Gase als Sauerstoff auf das electrochemische Aequivalent des Silbers festzustellen.

An dieser Stelle sei es mir verstattet, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Dr. Kohlrausch meinen aufrichtigsten Dank auszudrücken für die Anregung zu der Untersuchung und die werthvollen Rathschläge, mit denen er mir während der ganzen Dauer der Arbeit zur Seite stand.

Zu sämmtlichen Versuchen wurden zwei Voltameter Poggendorff'scher Form benutzt. Zwei Platintiegel, jeder von ca. 12 cm² innerer Oberfläche, bildeten die Kathoden; die Anoden waren cylindrische Stäbe aus reinem Silber von 0,3 cm Durchmesser. Um das Herunterfallen von Ag-Theilchen zu vermeiden und zugleich um die durch den Strom an der Anode gebildeten Sauerstoffverbindungen zu sammeln,

1) Schuster u. Crossley, Proc. Roy. Soc. **50.** p. 344. 1892.

wurde die von F. und W. Kohlrausch angegebene Vorrichtung angewandt. Dieselbe besteht in einem unter die Anode gehängten Glasschälchen, welches mittels dreier angeblasener Glasfäden auf dem Tiegelrand aufliegt. Die schwarzen Verbindungen wurden auf diese Weise gesammelt und man suchte ihre chemische Zusammensetzung, über welche verschiedene Hypothesen vorliegen, festzustellen.

Der Strom wurde von Accumulatoren geliefert, mittels eines Rheostaten constant erhalten und durch eine Federstromwaage gemessen.

Die Lösungen wurden aus reinem krystallinischen Silbernitrat bereitet und reagirten immer neutral auf Lackmuspapier. Die in den zwei Tiegeln benutzten Lösungen wurden voneinander getrennt gehalten.

Das Ausspülen der Silberniederschläge geschah nach den bekannten Vorschriften. Die Tiegel wurden über einer kleinen Flamme getrocknet, in einen Exsiccator gebracht und eine halbe Stunde nachher auf einer empfindlichen kurzarmigen Waage gewogen. In allen Fällen wurde Doppelwägung angewandt und zwar der eine Tiegel mit dem anderen verglichen. Das Gewicht eines und desselben Tiegels wurde vor und nach jedem Versuche bestimmt.

1. Beide Tiegel in Luft.

Durch die zwei hintereinandergeschalteten Voltameter, die sich in Luft befanden, wurde ein constanter Strom geleitet. Die benutzte $AgNO_3$-Lösung war 20 proc.

Tabelle I.

Strom	Ag-Niederschlag in		$A-B$	In Proc.
	Tiegel A	Tiegel B		
Am.	g	g	mg	
0,178	0,56888	0,56886	+ 0,02	+ 0,003
0,264	1,06100	1,06115	− 0,15	− 0,014
0,256	0,51301	0,51301	± 0,00	± 0,000
0,213	0,85732	0,85728	+ 0,04	+ 0,004
0,32	0,65232	0,65234	− 0,02	− 0,003
0,20	0,92977	0,92976	+ 0,01	+ 0,001

Die Unterschiede sind verschwindend klein.

Ebenso vollkommene Uebereinstimmung erhielt man mit verschieden concentrirten Lösungen von 5, 15 und 20 Proc. in zwei hintereinandergeschalteten Voltametern.

Tabelle II.

Strom	Temp.	Conc.	Niederschlag in *A*	Conc.	Niederschl. in *B*	*A* — *B*	In Proc.
Am.		%	g	%	g	mg	%
0,14	17,0°	20	0,36620	5	0,36624	— 0,04	— 0,011
0,16	17,2	20	0,18645	15	0,18646	— 0,01	— 0,005
0,04	19,0	20	0,33121	5	0,33119	+ 0,02	+ 0,006
0,05	19,0	20	0,37065	5	0,37063	+ 0,02	+ 0,006

Für kleine Stromdichten ist also der Niederschlag unabhängig von der Concentration der Lösung.

2. Vergleichung der Niederschläge im Vacuum und in Luft.

Der Vacuumapparat besteht aus einer Glasglocke von 6 cm Durchmesser und 14,5 cm Höhe, welche auf einer ebenen geschliffenen Glasplatte ruht. In der Glasplatte befand sich ein etwas conisches Loch, welches mit einem paraffinirten Korke verstopft war. Durch diesen gingen die Zuleitungsdrähte, sowie eine mit einem Hahne versehene Glasröhre, welche in Verbindung mit einer Bunsen'schen Wasserluftpumpe stand. Ausserdem wurde das Loch mit Kitt luftdicht gemacht und von Zeit zu Zeit mittels eines empfindlichen Galvanometers auf Nebenschluss geprüft.

Das erzielte Vacuum ging im Mittel bis zu 1,6 cm Hg-Druck, welcher mehrere Stunden constant blieb.

Eine merkwürdige Erscheinung trat in dem Vacuumvoltameter auf, wenn die Stromstärke 0,25 Amp. überschritt: es fand dann eine gewaltsame Entwickelung von Gasblasen an der Anode statt, sodass Flüssigkeitstheilchen herausspritzten. Diese Störung trat bei schwächeren Strömen nicht auf.

Da man nach Obigem nur Ströme unter 0,25 Amp. verwenden konnte, war naturgemäss die Dauer der Versuche gross. Die Frage, ob Silber in neutralen Silbernitratlösungen

löslich ist, wird deshalb für die Untersuchung von Wichtigkeit. Um sie zu entscheiden, liess ich einen mit einer dicken electrolytischen Ag-Schicht versehenen Tiegel, in welchen eine 20 proc. neutrale $AgNO_3$-Lösung gegossen worden war, ca. 40 Stunden stehen. Der Gewichtsverlust des Tiegels in dieser Zeit betrug nur 0,19 mg, es kommt mithin die Löslichkeit des Silbers während eines 2—3 Stunden dauernden Versuches nicht in Betracht.

Die Resultate sind in der Tabelle III—V wiedergegeben. Dabei wurden nur diejenigen Versuche ausgeschlossen, bei denen sogenannte Ag-Bäume auftraten.

Tabelle III.

20 proc. Silberlösung.

Strom	Temp.	Ag-Niederschlag		Druck	Vac.— Luft	In Proc.
		in Luft	im Vacuum			
Amp.		g	g	cm Hg	mg	%
0,02	19,0°	0,75513	0,75586	1,5	0,73	0,096
0,025	18,7	0,63964	0,64028	1,5	0,64	0,100
0,20	18,0	0,42207	0,42244	1,7	0,37	0,089
0,10	19,0	0,91812	0,91910	1,6	0,98	0,106
0,10	19,0	0,71005	0,71073	1,5	0,68	0,095
0,12	18,5	1,27734	1,27860	1,6	1,26	0,098
0,10	19,0	0,60020	0,60067	1,6	0,47	0,078
0,10	18,0	0,21602	0,21632	1,5	0,30	0,142
0,12	—	0,38320	0,38356	1,5	0,36	0,094
0,105	19,0	0,83571	0,83652	1,7	0,81	0,097
0,03	—	0,07925	0,07934	1,5	0,09	0,114
0,19	18,5	0,88452	0,88524	5,7	0,72	0,081
* 0,135	—	0,67850	0,67883	—	(0,33)	(0,049)
					Mittel	+ 0,099

* Bei diesem Versuche wurden durch ein Versehen die Lösungen vertauscht, sodass die im Tiegel *A* benutzte Lösung mehr oder weniger luftfrei war, da sie vorher zu einem Vacuumversuch benutzt worden war. Deshalb blieb dieser Versuch bei der Berechnung des Mittelwerthes unberücksichtigt.

Die im Vacuum abgeschiedenen Ag-Mengen waren also im Mittel um 0,099 Proc. grösser, als die in Luft abgeschiedenen.

Tabelle IV.

40 proc. Silberlösung.

Strom	Temp.	Ag-Niederschlag		Druck	Vac.— Luft	In Proc.
		in Luft	im Vacuum			
Amp.		g	g	cm Hg	mg	
0,045	18,3°	0,88050	0,88118	1,1	0,68	0,081
0,042	18,3	1,13000	1,13023	1,4	0,23	0,020
0,042	20,0	1,09211	1,09365	1,5	1,54	0,141
0,043	20,2	0,69173	0,69247	1,7	0,74	0,106
0,043	18,6	0,62291	0,62341	1,5	0,50	0,080
					Mittel	0,085

Die Differenz ist also nahezu dieselbe wie vorhin.

Wandte man aber im Vacuum eine 5 proc. Lösung an, so wurden die Unterschiede kleiner und unregelmässig (Tab. V). Das Voltameter in Luft hatte 20 proc. Lösung.

Tabelle V.

Strom	Temp.	Ag-Niederschlag		Druck	Vac.— Luft	In Proc.
		in Luft	im Vacuum			
Amp.		g	g	cm Hg	mg	
0,046	—	0,78600	0,78638	1,3	+ 0,38	+ 0,047
0,049	17,0°	0,65820	0,65803	1,5	− 0,17	− 0,026
0,046	15,5	0,58979	0,58981	1,3	+ 0,02	+ 0,003
0,043	16,0	1,24050	1,24001	1,3	− 0,49	− 0,039
0,040	17,0	1,05251	1,05230	1,4	− 0,21	− 0,020

Nach diesen Versuchen kam ich auf den Gedanken, dass eine Verdampfung des Schmiermittels (Bienenwachs und Vaseline in gleichen Theilen) des Glockenrands stattfinden und eine reducirende Wirkung auf die Silberlösung ausgeübt werden könne.

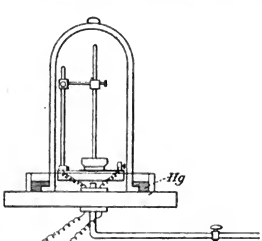


Fig. 1.

Um diese Eventualität auszuschliessen, änderte ich den Vacuumapparat so ab, dass der Gebrauch von Schmiermittel vermieden wurde: Der Rand der Glocke wurde auf der Platte mit feinem Schmirgel ab-

geschliffen und auf die letztere ein kurzer hohler Glascylinder (Fig. 1), dessen Durchmesser etwas grösser war als der der Glocke, festgekittet.

Etwas Quecksilber, das zwischen Cylinder und Glocke gegossen wurde, machte den Apparat luftdicht.

Tabelle VI.

Strom	Temp.	Ag-Niederschlag		Druck	Vac.—Luft	In Proc.
		in Luft	im Vacuum			
Amp.		g	g	cm Hg	mg	
0,062	23,1°	0,53733	0,53765	1,5	0,32	0,059
0,045	24,6	0,63525	0,63598	1,7	0,73	0,114
0,051	25,5	0,66890	0,66941	—	0,51	0,076
0,13	22,7	0,85762	0,85920	1,4	1,58	0,184
					Mittel	0,108

Die Differenz ist also im Mittel dieselbe geblieben, wie bei der Dichtung durch das Schmiermittel.

3. Silbervoltameter in Stickstoff und Kohlensäure.

Ein mit Hahn versehenes Glasrohr, das an die Glasglocke angeschmolzen war, diente als Zuleiter des Gases. Die Glocke war mit Quecksilber gedichtet.

Der *Stickstoff* wurde dadurch erhalten, dass man in der Wärme einem Gemenge von Kaliumnitrit mit Chlorammonium eine gesättigte Lösung von überchromsaurem Kalium zusetzte. Nachdem die Silberlösung (40 proc.) luftfrei gemacht worden war, wurde Stickstoff mindestens eine Stunde lang durch die Glocke geleitet. Man ersieht aus Tabelle VII, dass die Niederschläge in der Stickstoffatmosphäre ein wenig grösser sind, als diejenigen in der Luft.

Tabelle VII.

Strom	Temp.	Ag-Niederschlag		Stickstoff—Luft	In Proc.
		in Luft	in Stickstoff		
Amp.		g	g	g	
0,152	19,8°	0,77978	0,78053	0,00075	0,096
0,148	19,2	0,76655	0,76689	0,00034	0,044
* 0,062	20,2	1,13237	1,13267	0,00030	0,026
0,071	20,2	0,69466	0,69506	0,00040	0,057

* Bei diesem Versuche hatte man vergessen die Lösung in Tiegel *B* vor dem Einleiten von Stickstoff luftfrei zu machen.

Aehnliche Versuche wurden mit *Kohlensäure* ausgeführt, die mittels eines Kipp'schen Apparates dargestellt und sorgfältig gewaschen wurde, ehe sie in Berührung mit der (20 proc.) Silberlösung kam.

Eine mit CO_2 gesättigte Lösung übt keine merkliche lösende Wirkung auf Silber aus. In neunzehn Stunden lösten sich nur 0,07 mg Ag in einer 10 proc. $AgNO_3$-Lösung, welche mit CO_2 gesättigt war.

Tabelle VIII.

Strom	Temp.	Ag-Niederschläge		Luft—CO_2	in Proc.
		in Luft	in CO_2		
Amp.		g	g	g	
0,102	22,3°	0,66332	0,66300	0,00032	0,048
0,095	22,6	0,68195	0,68158	0,00037	0,054
0,043	22,1	0,51732	0,51699	0,00033	0,063
				Mittel	0,055

In Kohlensäure finden wir also gegen Luft eine *verminderte* Silbermenge, im Mittel um 0,055 Proc.

Die Electrolyse von mit *Sauerstoff* gesättigten Silbernitratlösungen ist von Schuster und Crossley [1]) untersucht worden. Die Resultate dieser Forscher zeigen, dass der erhaltene Niederschlag aus solchen Lösungen 0,04 Proc. kleiner ist als der in Luft erhaltene.

Ich hatte die Absicht den Einfluss von absorbirtem *Wasserstoff* in ähnlicher Weise zu bestimmen. Es ist mir aber nicht gelungen, Wasserstoff darzustellen, welcher keine reducirende Wirkung auf eine Silbernitratlösung hat. Der Literatur nach scheint es allerdings etwas zweifelhaft zu sein, ob chemisch reiner Wasserstoff auf $AgNO_3$ derart reagirt.

Löslichkeit des Silbers in sauren Silbernitratlösungen. Die gewogenen Tiegel, welche schon mit einer starken Silberschicht versehen waren, wurden mit einer neutralen 20 proc. Silbernitratlösung gefüllt.

Zu der Lösung in Tiegel *A* fügte man noch eine Spur freier Salpetersäure. Nach mehreren Stunden wurden die Tiegel ausgespült, getrocknet und gewogen.

1) Schuster und Crossley, Proc. Roy Soc. **50.** p. 356. 1892.

Tiegel *A* zeigte etwas Verlust, während das Gewicht vom Tiegel *B* constant blieb.

Zum Beispiel, in einem Versuch verlor Tiegel *A* in 2,5 Stunden 0,33 mg; in einem zweiten Versuch betrug der Verlust 0,38 mg in 3 Stunden.

4. Bestimmung des Silbergehaltes der an der Anode gebildeten Oxydationsproducte.

Nach jedem Versuch wurde die Verbindung sorgfältig abgekratzt und gesammelt. Nach gutem Auswaschen löste man dann in reiner Salpetersäure und bestimmte das Silber als Chlorsilber. Während der Auflösung fand eine reichliche Gasentwickelung statt und die Lösung wurde grünbraun gefärbt.

0,3480 g der Sauerstoffverbindung entsprach 0,4035 g Chlorsilber, also enthält die Verbindung 87,3 Proc. Silber, was annähernd den theoretischen Silbergehalt von Silberoxyd, Ag_2O_2 (87,1 Proc.) darstellt.

5. Einfluss absorbirter Luft auf das electrische Leitvermögen von Silbernitratlösungen.

Nach der Kohlrausch'schen Wechselstrommethode wurde das Leitvermögen einer $AgNO_3$-Lösung in einem Gefäss mit platinirten Electroden bestimmt (Fig. 2) und zwar sowohl, wenn die Lösung mit Luft gesättigt war, als auch, wenn sie luftfrei war.

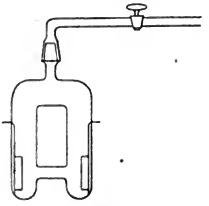


Fig. 2.

Nachdem der Widerstand der luftgesättigten 5 proc. Lösung gemessen war, schloss man das Widerstandsgefäss an die Luftpumpe an und evacuirte ca. 10 Minuten unter beständigem Schütteln. Der Widerstand wurde darauf wieder bestimmt, und die Flüssigkeit mehrere Stunden lang in Luft stehen gelassen und von Zeit zu Zeit geschüttelt. Alsdann maass man abermals den Widerstand. Bei diesen Bestimmungen konnte die Temperatur auf $^1/_{250}{}^0$ C. genau abgelesen werden.

Die auf 18° C. reducirten Leitvermögen waren bei einem Versuch

vor dem Evacuiren $23{,}35 \cdot 10^{-7}$

nach dem Evacuiren $23{,}45 \cdot 10^{-7}$

nach dreistündigem Stehen in Luft $23{,}44 \cdot 10^{-7}$.

Die Zunahme des Leitvermögens muss ohne Zweifel auf die Vergrösserung zurückgeführt werden, welche die Concentration durch die Verdampfung des Lösungsmittels erfährt.

Die Wiederaufnahme der Luft bewirkt keine die Versuchsfehler übersteigende Aenderung.

Resultate.

1. Wurden durch zwei Voltameter, welche neutrale $AgNO_3$-Lösungen von gleicher Temperatur und Concentration enthielten, und von denen eines in Luft, das andere im Vacuum sich befand, gleiche Electricitätsmengen geleitet, so schied sich in Uebereinstimmung mit den Versuchen der Hrn. Schuster und Crossley etwas weniger Silber aus in dem in Luft gebrachten Voltameter als in dem im Vacuum befindlichen. Der Unterschied betrug im Mittel 0,10 Proc. für 20—40 proc. Lösungen. Für eine 5 proc. war er kleiner.

2. Wenn die Lösung mit Kohlensäure gesättigt war, schieden sich 0,055 Proc. Silber weniger ab, als aus einer mit Luft gesättigten Lösung.

3. Dagegen fand sich in der mit Stickstoff gesättigten Lösung 0,05 Proc. Silber mehr als in Luft.

4. Für Sauerstoff fanden Schuster und Crossley 0,04 Proc. weniger als für Luft.

5. Der Widerstand einer mit Luft gesättigten 5 proc. Lösung war dem einer evacuirten merklich gleich.

6. Bei Stromstärken über 0,25 Amp. fand im Vacuum an der Anode eine Gasentwickelung statt, eine Erscheinung, welche von Interesse ist. Denn sie zeigt, dass der Vorgang an der Anode entweder direct oder vermöge der Abwesenheit von Luft in der Lösung durch den Druck beeinflusst wird.

Eine Erklärung der Erscheinungen zu geben ist mir nicht gelungen.

4. *Ueber das Faraday'sche Gesetz bei Strömen von Reibungselectricität; von John E. Myers.*

(Aus der Strassburger Dissertation.)

Electrolyte werden durch statische Electricität ebenso zersetzt, wie durch galvanische Ströme.

Schon im Jahre 1789 zerlegten Paetz van Troostwyk und Deimann [1]) mittels Entladungen von Leydener Flaschen Wasser in seine Bestandtheile. Wenige Jahre später electrolysirte Wollaston [2]) eine Kupfersulfatlösung, indem er 2,5 mm lange Funken einer Electrisirmaschine hindurchschickte. Er verwandte als Electroden Silberdrähte, welche bis auf die Endflächen vollständig mit Siegellack bedeckt waren; auf dem als Kathode dienenden Draht wurde metallisches Kupfer niedergeschlagen. Bei Umkehrung der Stromrichtung wurde das niedergeschlagene Kupfer gelöst. In einer Quecksilberchloridlösung wurde der als Kathode benutzte Golddraht amalgamirt.

Ritter [3]) scheint zuerst die Zersetzung des Wassers durch Ströme einer Electrisirmaschine bemerkt zu haben. Er verband einen Zinkdraht mit dem positiven, einen Kupfer- oder Platindraht mit dem negativen Entlader. Diese Drähte wurden in Wasser getaucht und die Maschine in Gang gesetzt. Die Zinkelectrode oxydirte sich, und an der Kupfer- oder Platinelectrode entstand eine Gasentwickelung.

Buff [4]) verwandte Platinspitzen als Electroden und konnte aus mit Schwefelsäure angesäuertem Wasser die electrolytischen Gase getrennt auffangen.

Mit der Dampfelectrisirmaschine konnte Armstrong [5]) das Verhältniss der entstandenen Wasserstoff- und Sauerstoffvolumina als 2:1 beobachten. Dies ist das einzige quantitative

1) Paetz van Troostwyck u. Deimann, Journ. de Phys. **2.** p. 130. 1789.

2) Wollaston, Phil. Trans. p. 427. 1801; Gilb. Ann. **11.** p. 107. 1802.

3) Ritter, Gilb. Ann. **2.** p. 154. 1799.

4) Buff, Lieb. Ann. **96.** p. 257. 1855.

5) Armstrong, Pogg. Ann. **60.** p. 354. 1843.

Resultat, das ich über Electrolyse mittels Reibungselectricität in der Literatur auffinden konnte.[1]) Das Faraday'sche Gesetz scheint für diesen Fall niemals geprüft worden zu sein.

Wenn man dasselbe auch von vornherein für sehr wahrscheinlich halten wird, so ist eine Prüfung doch nicht ohne Interesse. Im Folgenden suche ich erstens zu bestimmen, ob verschiedene Elemente in äquivalenten Mengen ausgeschieden werden, und zweitens versuche ich eine Bestimmung des Weber'schen electrochemischen Aequivalentes mit Reibungselectricität. Die Genauigkeit beider Messungen ist natürlich durch die Schwäche und den Mangel an Constanz der Ströme beschränkt.

Die Maschine, die mir zur Verfügung stand, war eine grosse Töpler'sche Influenzmaschine neuer Construction mit 20 Scheiben von 30 cm Durchmesser. Dieselbe gab einen Strom von ungefähr 0,5 Milliampère bei zwei Umdrehungen in der Secunde. Meine Triebkraft, ein Schmidt'scher Wassermotor, reichte freilich nur für 0,3 Milliampère.

Gemäss den sehr geringen Niederschlägen, mit welchen man zu thun hatte, wurden die Voltameter in möglichst kleinen Dimensionen zusammengestellt.

Die Kathode des Silbervoltameters bildete ein Platintiegel von 1,2 cm Höhe und einem Durchmesser von 1 cm. Ein Streifchen aus reinem Silber diente als Anode. Die Lösung enthielt 5 Proc. $AgNO_3$; ein Versuch bewies, dass ihre lösende Wirkung auf metallisches Silber zu vernachlässigen war. Vor dem ersten Versuch wurde ein dünner Belag von Silber in dem Tiegel niedergeschlagen.

Die Electroden des Kupfervoltameters bestanden aus quadratischen Blättchen von 0,25 cm^2 und wurden aus reinem Kupferblech geschnitten.

Wegen der langen Dauer der Versuche ist die Herstellung der Kupfersulfatlösung von Wichtigkeit. Die Lösung (spec. Gew. = 1,12) wurde aus zweimal umkrystallirtem Kupfersulfat und im übrigen nach den Vorschriften von Vanni[2]) hergestellt.

1) Eine detaillirte Geschichte des Gegenstandes findet sich bei Wiedemann, Electricität **2**. p. 450. 1894.

2) Vanni, Wied. Ann. **44**. p. 218. 1891.

Ein Zusatz von ca. 0,5 g/l einer 1 proc. Schwefelsäure ergab eine Flüssigkeit, welche äusserst wenig durch Lösung oder Oxydation auf die Electroden einwirkte. Eine Kupferplatte von ca. 40 cm² Oberfläche nahm in 16 Stunden um 0,01 mg zu.

Nach Beendigung eines Versuches wurde die Kupferkathode sofort mit destillirtem Wasser gewaschen, mit Fliesspapier getrocknet und in einen Exsiccator gebracht.

Das Wasserstoffvoltameter, mit 5 proc. Schwefelsäure gefüllt, bestand aus einer gebogenen Glasröhre von 3,5 mm innerem Durchmesser, die oben geschlossen war. Die negative Electrode bildete ein Platindraht, der in ein dünnes Glasröhrchen eingeschmolzen, am Ende abgeschnitten und überfeilt wurde — nach der Art der Wollaston'schen Spitzelectroden. Ein Stück Platindraht bildete die Anode. Die Röhre wurde durch Wägung calibrirt, indem man durch Electrolyse einen Theil der Flüssigkeit aus dem Röhrchen herausdrückte.

Der von der Electrisirmaschine gelieferte Strom wurde alle 10 Minuten mit Commutator gemessen. Das Galvanometer, dessen Widerstand 0,25 Ohm betrug, wurde mittels eines frisch zusammengestellten Daniellelementes, das man vorher mit einem grossen Widerstand eine halbe Stunde geschlossen hatte, und eines calibrirten Rheostaten geaicht. Man bestimmte die Scalenausschläge, welche bez. 10 000 Ω, 9000 Ω . . . 1000 Ω entsprachen. Eine Controlmessung mit 10 000 Ω zeigte, dass während der Aichung das Daniellelement constant geblieben war. Unmittelbar darauf verglich man die electromotorische Kraft des Daniells mit der eines zuverlässigen Clarkelementes dadurch, dass man die Ablenkungen (47,28 bez. 58,95 Scalenth.) der Nadel eines empfindlichen Galvanometers bestimmte, wenn ein Widerstand von 100 000 Ω eingeschaltet war. Die Zimmertemperatur betrug 10° C.; die electromotorische Kraft eines Clarkelementes bei 10° C. = 1,437 + 0,005 = 1,442 leg. Volt, also die electromotorische Kraft des Daniells = 47,28/58,95 . 1,442 = 1,157 leg. Volt = 1,154 Volt.

Die Beobachtungen ergaben nun

Widerstand =	4988	3991	2994 wahre Ohm
Also Stromstärke =	2,312	2,891	$3{,}853 \cdot 10^{-4}$ Amp.
Ausschlag =	98,05	122,05	162,35 Scalenth.

Die während der Electrolyse beobachteten Ausschläge wurden hiernach auf Stromstärke umgerechnet.

Die drei Voltameter (Ag, Cu, H_2O) waren hintereinander in den Stromkreis geschaltet.

Im ganzen wurden fünf Versuche durchgeführt: jedoch konnte bei einem wegen eines plötzlichen Anhaltens des Wassermotors, bei einem zweiten wegen zu spät bemerkter, mangelhafter Aufstellung des Galvanometers das electrochemische Aequivalent nicht bestimmt werden. In diesen zwei Fällen wurden nur die niedergeschlagenen Mengen miteinander verglichen.

Die Masse m des Wasserstoffes wurde aus dessen Volumen v, der Temperatur t, dem Barometerstande b, der Höhendifferenz h im Voltameter und der zu t gehörenden Spannkraft e des Wasserdampfes berechnet als

$$m = 0{,}00008952 \frac{v}{1 + 0{,}00367 \cdot t} \frac{b - {}^1/_{12}\, h - e}{76}.$$

Die Versuche ergaben

	v	t	b	h	m
20. Dec.	1,055 cm³	17,8°	75,50 cm	10,0 cm	$0{,}0_4852$ g
22. „	0,837	15,2	74,43	12,0	673
4. Jan.	1,002	11,0	74,40	10,0	823

Die Ergebnisse der drei vollständigen Versuche sind nachstehend zusammengestellt.

	Versuchsdauer	Ausgeschiedene Menge von			Ausschläge	Stromstärke
		Wasserst.	Silber	Kupfer		
	Min.	g	g	g	Scalenth.	Amp.
20. Dec.	440	$0{,}0_4852$	$0{,}0_2916$	$0{,}0_2269$	130,97	$3{,}104 \cdot 10^{-4}$
22. „	360	$0{,}0_4673$	$0{,}0_2726$	$0{,}0_2214$	126,78	$3{,}004 \cdot 10^{-4}$
4. Jan.	484	$0{,}0_4823$	$0{,}0_2883$	$0{,}0_2258$	116,08	$2{,}723 \cdot 10^{-4}$

Die aus diesen Daten berechneten electrochemischen Aequivalente mg/Amp. sec sind im Folgenden gegeben:

	Electrochemisches Aequivalent von		
	Wasserstoff	Silber	Kupfer
20. Dec.	0,01039	1,117	0,328
22. „	0,01037	1,118	0,330
4. Jan.	0,01040	1,116	0,326
Mittel	0,01038	1,117	0,328

Die electrochemischen Aequivalente dieser Elemente für galvanische Electricität sind [1]):

H	Ag	Cu
0,01039	1,1181	0,3284

Die Uebereinstimmung ist grösser, als sie unter den Umständen zu erwarten war.

Die nachstehende Tabelle stellt ferner zusammen die Verhältnisse der in den einzelnen Versuchen erhaltenen Abscheidungen, die Mittelwerthe derselben und die nach den Aequivalentzahlen der Elemente berechneten Verhältnisse.

Datum	11. Dec.*	17. Dec.	20. Dec.	22. Dec.	4. Jan.	Mittel	Berechn. Verhältnisse
$\frac{H}{Ag}$	0,00928	0,00922	0,00930	0,00927	0,00932	0,00927	0,009292
$\frac{H}{Cu}$	—	0,0314	0,0316	0,0314	0,0319	0,0315	0,03164
$\frac{Cu}{Ag}$	—	0,293	0,293	0,294	0,292	0,293	0,2936

* Am 11. Dec. war nur das Ag- und das H-Voltameter eingeschaltet.

Durch diese Ergebnisse bestätigt sich also für Ströme electrostatischen Ursprungs Faraday's Aequivalentgesetz, und zwar mit dem gleichen Werthe des Weber'schen electrochemischen Aequivalentes wie für galvanische Ströme, so genau, wie man dies bei solchen Versuchen erwarten durfte.

Strassburg, Physik. Institut, Februar 1895.

1) Kohlrausch, Leitfaden. 7. Aufl. p. 423.

5. *Theoretische Untersuchungen über elastische Körper; von Paul Glan.*

I. Ueber Gestaltsänderungen.

Es soll zuerst eine *stetige Gestaltsänderung* eines Körpers in Betracht gezogen werden, bei der aneinander liegende Theile desselben vor ihrem Eintritt es auch bleiben nach derselben. Durch sie wird also der Körper an keinem seiner Theile zerrissen oder zerdrückt. Die Verrückung der Theile desselben während der betrachteten stetigen Gestaltsänderung muss dann sich stetig ändern mit ihrer Lage im Raume vor Beginn derselben. Ich will den Einfluss einer solchen Gestaltsänderung auf einen sehr kleinen Theil des Körpers untersuchen. Es sei ω der Vector eines Punktes P eines solchen unendlich kleinen Theils in Bezug auf einen beliebig gewählten Anfangspunkt O der Vectoren, dann ist der Vector irgend eines anderen Punktes P' dieses Theils $\omega + d\omega$, wenn $d\omega$ ein unendlich kleiner, mit der Lage von P' wechselnder Vector ist. Der Vector von P nach der stetigen Gestaltsänderung sei ϱ, das wird dann eine stetige Function von ω sein, und wir können schreiben:

$$\varrho = \varphi\,\omega,$$

in welcher Gleichung φ das Zeichen für eine vector Function ist. Nun ist $\varphi\,(\omega + d\omega)$, weil sich ϱ stetig mit ω ändert, unendlich wenig von $\varphi\,\omega$ verschieden, folglich in höherer Ordnung

$$\left[\varphi\left(\omega + \frac{d\omega}{n}\right) - \varphi\,\omega\right],$$

unendlich klein, wenn n der Unendlichkeit zustrebt. Also ist

$$\lim_{n=\infty} n\left[\varphi\left(\omega + \frac{d\omega}{n}\right) - \varphi\,\omega\right],$$

oder $d\varphi\,\omega$, jedenfalls nicht unendlich gross anzunehmen. Es kann deshalb $\varphi\,(\omega + d\omega)$ nach Taylors Satz für Quaternionen entwickelt werden, wenn die Entwickelung nur bis zu dem ersten Differential von $\varphi\,\omega$ fortgeführt wird, und wir haben

$$\varphi\,(\omega + d\omega) = \varphi\,\omega + d\varphi\,\omega_{d\omega}.$$

Es ist hier von mir dem Differentiale $d\varphi\omega$ der Index $d\omega$ angefügt, der das Differential der vector Variabeln ω bezeichnet, weil der Werth von $d\varphi\omega$ von dem Werthe des Differentials $d\omega$ der unabhängigen vector Variabeln ω abhängt und durch diesen bestimmt wird. Aus dem Vector $d\omega$, oder PP', vor der behandelten Gestaltsänderung wird also der Vector

$$[\varphi(\omega + d\omega) - \varphi\omega], \quad \text{oder} \quad d\varphi\omega_{d\omega},$$

wenn sie ausgeführt worden ist.

Ich will zunächst die Veränderung einer sehr kleinen geraden Linie von P aus untersuchen. Eine solche erhält man, wenn man wählt $d\omega = x\omega_1$, in welcher Gleichung ω ein constanter Einheitsvector und x ein unendlich kleiner variabler Scalar ist. Aus $d\omega$ wird dann $d\varphi\omega_{x\omega}$, oder — nach einer bekannten Eigenschaft der Differentiale von quaternion Functionen — $x\,d\varphi\omega_{\omega_1}$. Hier hat ω den constanten Werth des Vectors von P und $x\,d\varphi\omega_{x\omega_1}$ ist eine unendlich kleine gerade Linie des Körpers von — im allgemeinen — anderer Richtung und anderem Anfangspunkte im Raume als $d\omega$. Mithin *bleiben bei einer stetigen Gestaltsänderung sehr kleine gerade Linien des Körpers solche.*

Für eine sehr kleine parallele Linie zu der eben betrachteten haben wir $d\omega = x\omega_1 + \varepsilon$, wenn ε ein sehr kleiner constanter und nicht paralleler Vector zu ω_1 ist. Dann ist

$$d\varphi\omega_{d\omega} = d\varphi\omega_{x\omega_1+\varepsilon} = x\,d\varphi\omega_{\omega_1} + d\varphi\omega_\varepsilon,$$

weil das Differential einer quaternion Function distributiv in Bezug auf das Differential der unabhängigen Variabeln ist. Der letztere Vector ist jedoch offenbar eine Gerade, welche parallel $x\,d\varphi\omega_{\omega_1}$ ist. Also *bleiben sehr nahe und sehr kleine gerade Linien bei einer stetigen Gestaltsänderung gerade und parallel.*

Die Verschiebung eines Punktes der Linie $x\omega_1$ soweit sie eine Gestaltsänderung bewirkt, eines Punktes, der um die Länge x von P absteht, ist $x(d\varphi\omega_{\omega_1} - \omega_1)$; ich will eine solche Veränderung eine *schiefwinklige Gestaltsänderung* nennen.

Der Vector $x\omega_1 + \varepsilon$ erfährt in entsprechenden Punkten, das heisst in solchen, die ebenfalls um x von seinem Anfangspunkte entfernt sind, dieselbe Verschiebung und mithin die gleiche schiefwinklige Gestaltsänderung.

Da, abgesehen von einer parallelen Verschiebung ohne Drehung, aus der materiellen Linie $x\,\omega_1$ die Linie $x\,d\varphi\,\omega_{\omega_1}$ wird, und da

$$x\,d\varphi\,\omega_{\omega_1} = x\,\frac{S d\varphi\,\omega_{\omega_1}}{\omega_1}\,.\,\omega_1 + x\,\frac{V d\varphi\,\omega_{\omega_1}}{\omega_1}\,.\,\omega_1$$

$$= x\,T d\varphi\,\omega_{\omega_1}\left[\cos\angle\,\frac{d\varphi\,\omega_{\omega_1}}{\omega_1}\,.\, + \frac{U V d\varphi\,\omega_{\omega_1}}{\omega_1}\sin\angle\,\frac{d\varphi\,\omega_{\omega_1}}{\omega_1}\right]\omega_1$$

$$= x\,T d\varphi\,\omega_{\omega_1}\left[\frac{U V d\varphi\,\omega_{\omega_1}}{\omega_1}\right]^{\angle\,\frac{d\varphi\,\omega_{\omega_1}2}{\omega_1\pi}}\,.\,\omega_1$$

ist, stellt die schiefwinklige Gestaltsänderung eine *Dehnung* vom Betrage $(T d\varphi\,\omega_{\omega_1} - 1)$ *und* eine *Drehung* um den *Winkel*

$$\angle\,\frac{d\varphi\,\omega_{\omega_1}}{\omega_1}$$

dar. Da *sehr nahe* und *sehr kleine gerade Linien* bei einer stetigen Gestaltsänderung dieselbe schiefwinklige Gestaltsänderung erleiden, *erfahren sie gleiche Dehnungen und Drehungen.*

Nehmen wir

$$d\,\omega = x\,\omega_1 + y\,\omega_2,$$

in welcher Gleichung ω_1 und ω_2 zwei *nicht* parallele Einheitsvectoren und x und y zwei unendlich kleine variable Scalare sind, so liegen die Endpunkte von $d\,\omega$ auf einem sehr kleinen Stück einer Ebene durch P. In diesem Falle wird

$$\varphi\,(\omega + d\,\omega) - \varphi\,(\omega) = x\,d\varphi\,\omega_{\omega_1} + y\,d\varphi\,\omega_{\omega_2}.$$

Diese Gleichung stellt den Vector eines Punktes dieses ebenen Stücks in Bezug auf P als Anfangspunkt nach der stetigen Gestaltsänderung dar, und sein Endpunkt bildet danach ein sehr kleines ebenes Stück durch die constanten und nichtparallelen Vectoren $d\varphi\,\omega_{\omega_1}$ und $d\varphi\,\omega_{\omega_2}$. Mithin *bleibt bei einer stetigen Gestaltsänderung ein sehr kleines ebenes Stück eines Körpers ein solches.* Es kann dabei parallel zu seiner Anfangslage verschoben und gedreht und im Abstand seiner einzelnen Punkte geändert sein.

Wählen wir

$$d\,\omega = x\,\omega_1 + y\,\omega_2 + \varepsilon,$$

in welcher Gleichung die Buchstaben der rechten Seite die gleiche Bedeutung haben sollen, welche sie kurz zuvor hatten,

so ist der Ort des Endpunktes von $d\omega$, ein sehr kleines, dem eben betrachteten paralleles Stück einer Ebene im Körper. Dann erhalten wir

$$\varphi(\omega + d\omega) - \varphi\,\omega = x\,d\varphi\,\omega_{\omega_1} + y\,d\varphi\,\omega_{\omega_2} + d\varphi\,\omega_\varepsilon.$$

Ein Vergleich mit dem vorletzten Ausdruck für

$$[\varphi(\omega + d\omega) - \varphi\,\omega]$$

zeigt, da $d\varphi\,\omega_\varepsilon$ ein constanter, weder zu $d\varphi\,\omega_{\omega_1}$ noch zu $d\varphi\,\omega_{\omega_2}$ paralleler Vector ist, dass *bei einer stetigen Gestaltsänderung sehr kleine und sehr nahe parallele Ebenenstücke in einem Körper es bleiben.* Oder, wie wir es auch ausdrücken können, *ein sehr kleines und sehr nahes Ebenenpaar in einem Körper bleibt bei einer stetigen Gestaltsänderung ein solches.*

Ein kleiner Würfel in der Substanz wird durch drei sehr kleine und sehr nahe parallele Ebenenpaare begrenzt. Wird der Körper einer stetigen Gestaltsänderung unterworfen, so bleibt also dieser Würfel ein Körper, der durch drei parallele Ebenenpaare begrenzt wird. Die Form desselben wird also im allgemeinen ein schiefwinkliges Parallelepiped sein. Folglich *wird aus einem sehr kleinen Würfel in einem Körper bei einer stetigen Gestaltsänderung desselben ein schiefwinkliges Parallelepiped.*

Ein Punkt dieses Würfels, dessen Vector vor der stetigen Gestaltsänderung $\omega + d\omega$ ist, hat nach derselben den Vector

$$\varphi(\omega + d\omega) = \varphi\,\omega + x\,d\varphi\,\omega_{\omega_1} + y\,d\varphi\,\omega_{\omega_2} + z\,d\varphi\,\omega_{\omega_3},$$

wenn

$$d\,\omega = x\,\omega_1 + y\,\omega_2 + z\,\omega_3$$

ist. Oder es ist

$$\varphi(\omega + d\omega) = \omega + d\omega + (\varphi\,\omega - \omega) - (d\varphi\,\omega_{\omega_1} - \omega_1).$$

$$S\,\omega_1\,d\,\omega - (d\varphi\,\omega_{\omega_2} - \omega_2)S\,\omega_2\,d\,\omega - (d\varphi\,\omega_3 - \omega_3)\,S\,\omega_3\,d\,\omega.$$

Die Veränderung, welche ein sehr kleiner Würfel in einem Körper bei einer stetigen Gestaltsänderung erleidet, besteht danach aus einer geradlinigen Verschiebung, — hier $(\varphi\,\omega - \omega)$ — *die für alle seine Punkte die gleiche ist, und aus drei gleichzeitigen schiefwinkligen Gestaltsänderungen.*

Ein besonderer Fall einer schiefwinkligen Gestaltsänderung ist es, wenn die Richtung der Verschiebung mit derjenigen

der Linien übereinstimmt, welche sie erleiden. Eine solche Gestaltsänderung nenne ich eine *Dehnung*. Eine *Linie* erfährt eine solche, wenn jeder Punkt derselben eine Verschiebung in ihrer Richtung erleidet, welche proportional seinem Abstande von einem festen Punkte O desselben ist. Sie ist vollständig bestimmt, wenn der Vector ε der Verschiebung für den Punkt angegeben wird, welcher um die Einheit der Länge vom Anfangspunkte O derselben entfernt ist. Die *Grösse der Dehnung* wird durch den Tensor, $T\varepsilon$, *des Vectors der Dehnung* ε bestimmt.

Die *Dehnung einer Ebene* kann durch einen Einheitsvector α bezeichnet werden, der die Richtung der Linien in ihr bestimmt, welche eine Gestaltsänderung der Art erleiden, und durch einen positiven oder negativen Coefficienten m, der ihre Grösse und ihr Vorzeichen angibt. Ein Punkt O, oder mehrere Punkte (Fig. 1), werden sich stets angeben lassen, durch welche sich eine Linie senkrecht zur Richtung von α so legen lässt, dass die Platte ganz jenseits derselben nach der Seite hin liegt, nach welcher α weist. Wenn man dann die Linien der Ebene parallel α, welche von der durch O gelegten Linie senkrecht zu α ausgehen oder von ihr ausgehend anzunehmen sind, eine Dehnung $m\alpha$ erleiden lässt, sodass sich also alle Punkte der Ebene auf einer Linie senkrecht zu α gleich viel verrücken, so soll das *eine Dehnung* $m\alpha$ *der Ebene* sein.

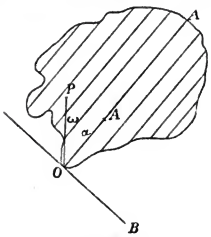


Fig. 1.

Wir wählen O zum Anfangspunkte der Vectoren. Der Vector eines Punktes P der Ebene sei ω; es erfährt dann P dieselbe Verschiebung, wie seine Projection auf OA, oder α. Ist also ϱ der Vector von P nach der Dehnung $m\alpha$, so wird

$$\varrho = \omega - \alpha m S \omega \alpha.$$

Was man unter der *Dehnung* $m\alpha$ *eines beliebig gestalteten Körpers* zu verstehen habe, ist nun leicht ersichtlich. Man theilt ihn in Linien parallel α, welche von einer Ebene senkrecht zu α ausgehen oder ausgehend angenommen sind, die

durch einen seiner äussersten Punkte O in der Anfangsrichtung von α geht, und lässt sämmtliche Linien eine Dehnung $m\alpha$ erleiden. Der Punkt O sei der Anfangspunkt der Vectoren, m, α, ω, ϱ mögen die bisherige Bedeutung haben, dann ist wie im eben behandelten Falle

$$\varrho = \omega - \alpha m S \omega \alpha.$$

Eine zweite einfache Art der Gestaltsänderung soll jetzt in's Auge gefasst werden. Wenn von zwei Linien OA und OB, welche in einem Punkte zusammentreffen oder zusammenhängen, und die also einen materiellen Winkel bilden, die eine — zum Beispiel OB — in der Ebene OAB um den Winkel n gedreht wird, wo n positiv oder negativ sein kann, so soll eine solche Gestaltsänderung eine *Verdrehung* n des Winkels heissen. Ist α der Vector von OA und β der Vector OB vor der Verdrehung, so ist der von β nach derselben:

$$\varrho = (UV\alpha\beta)^n \beta;$$

n ist in dieser Gleichung in rechtem Winkel zu messen.

Eine *Verdrehung* (α, β, n) *einer Ebene* ist eine solche Gestaltsänderung derselben, bei der alle Linien in derselben parallel dem Einheitsvector α, diese von einer Geraden OB (Fig. 1) ausgehend angenommen, welche senkrecht zu OA ist und durch einen oder mehrere ihrer Randpunkte geht, sodass die ganze Ebene auf einer Seite dieser Linie nach der Richtung des Vectors α hin liegt, um denselben Winkel n gedreht werden. Der Vector ω eines Punktes P der Ebene kann dann, da α und β in ihr liegen, in der Form

$$\omega = x\alpha + y\beta$$

dargestellt werden, in der x und y zwei variable Scalare sind. Der Vector ϱ desselben Punktes P nach der Verdrehung (α, β, n) ist dann

$$\varrho = x(V\beta\alpha)^n \alpha + y\beta.$$

Hier sind α und β Einheitsvectoren und der Winkel n ist in Rechten zu messen.

In demselben Sinne können wir von einer *Verdrehung* (α, β, n) *eines Körpers* sprechen. Die Linien des Körpers parallel dem Einheitsvector α, diese ausgehend angenommen von einer Ebene senkrecht zu ihm durch die Grenze des Körpers, von

welcher aus der ganze Körper nach der Richtung des Vectors α hin liegt, erfahren hierbei in der Ebene der Einheitsvectoren α, β eine Drehung um den Winkel von n Rechten um ihren Anfangspunkt in der erwähnten Grenzebene und zwar von β fort, wenn n positiv ist. Bei der früheren Bedeutung von ω und ϱ und der Lage des Vectorenanfangspunktes O in jener Grenzebene ist dann

$$\varrho = (\beta\,\alpha)^n x\,\alpha + y\,\beta + z\,\gamma,$$

wenn

$$\omega = x\,\alpha + y\,\beta + z\,\gamma$$

ist.

Bei einer Dehnung erleiden die Punkte einer parallelen Linienschaar Verschiebungen in der Richtung dieser Linien, welche an Grösse proportional ihrem Abstande von ihrem Anfangspunkte sind, bei einer unendlich kleinen Drehung solche senkrecht zu diesen Linien. Wenn die Verschiebung *irgend einen* Winkel mit einer derartigen Linienschaar macht und an Grösse proportional der Entfernung von der durch die Anfangspunkte jener Linienschaar gehenden Ebene ist, die senkrecht zur Schaar ist, so entsteht die allgemeinere *schiefwinklige Gestaltsänderung eines Körpers.*

Unter einer *schiefwinkligen Gestaltsänderung* (α, β) *eines Körpers* wird man danach eine solche verstehen, bei der die Punkte der Linien des Körpers parallel dem Vector α, diese Linien ausgehend gedacht von der Ebene durch die äusserste Grenze desselben nach dem Anfange des Vectors α und senkrecht zu ihm, Verschiebungen parallel dem Vector β erleiden, proportional ihrer Entfernung von jener Ebene, und wobei die Punkte derselben eine Verschiebung β erfahren, die um die Entfernung eines von dieser Ebene abstehen.

Wird der Anfangspunkt O der Vectoren in diese Ebene verlegt, und haben ϱ, ω die frühere Bedeutung, so ist der Vector ϱ eines Punktes P eines Körpers, nach einer schiefwinkligen Gestaltsänderung (α, β) desselben, bestimmt durch die Gleichung:

$$\varrho = \omega - \beta\,S\omega\,\alpha.$$

Die Ebenen senkrecht zu α verschieben sich bei einer Gestaltsänderung (α, β) ohne Gestaltsänderung parallel zu ihrer Anfangslage.

Wenn man einen Körper von irgend welcher Form einer Dehnung $m\alpha$ unterwirft, so kann man sich die Frage stellen, wie sich dabei die Linien desselben von irgend einem seiner Punkte aus ändern. Es sei P der Punkt, von dem alle diese Linien ausgehen, und sein Vector vor der Dehnung sei ω (Fig. 2). Der Vector einer solchen Linie sei von P aus $x\gamma$, wo $T\gamma = 1$ und $x > 1$ ist. Der Vector ϱ des Punktes P nach der Dehnung $m\alpha$ ist:

$$\varrho = \omega - m\alpha S\omega\alpha.$$

Der Vector von P' vor der Dehnung sei

$$\omega' = \omega + x\gamma;$$

nach derselben ist er dann

$$\varrho' = \omega + x\gamma - m\alpha S\omega\alpha - xm\alpha S\gamma\alpha.$$

Da α im allgemeinen nicht parallel γ ist, *erleidet die materielle Linie $x\gamma$ eine geradlinige Verrückung ohne Gestaltsänderung, — $m\alpha S\omega\alpha$, und eine schiefwinklige Gestaltsänderung, — $m\alpha S\gamma\alpha$,* folglich *eine parallele Verschiebung ohne Gestaltsänderung, eine Dehnung und eine Drehung.* Diese schiefwinklige Gestaltsänderung ist offenbar für alle Linien in einem geraden Kreiskegel, dessen Spitze in P und dessen Axe parallel α ist, dieselbe. Die *Dehnung* eines solchen Vectors $x\gamma$ ist in diesem Falle $[T(\gamma - m\alpha S\gamma\alpha) - T\gamma]\gamma$.

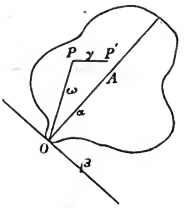


Fig. 2.

Sie ist also *für alle Linien in einem geraden Kreiskegel mit dem Scheitel in P, dessen Axe parallel α ist, und seinem Gegenkegel dieselbe.* Sie erreicht ihren grössten Werth für den Vector von P aus parallel α, nimmt ab, wenn der Winkel zwischen γ und α wächst, und wird Null, wenn γ senkrecht zu α ist.

Die Drehung eines Vectors $x\gamma$ im Körper, dessen Anfangspunkt vor der Dehnung $m\alpha$ der Punkt P ist, beträgt

$$\angle \frac{\gamma - m\alpha S\gamma\alpha}{\gamma}.$$

Alle Linien in einem geraden Kreiskegel und seinem Gegenkegel, welche ihre gemeinsame Spitze in P und ihre *Axe parallel α*

haben, werden *um denselben Winkel gedreht*, doch in jedem dieser beiden Kegel in entgegengesetztem Sinne.

Die *Grösse* der Drehung ist Null, wenn γ senkrecht oder parallel α ist und erreicht im Kegel um α ihren grössten Werth, wenn

$$\angle \frac{\gamma}{\alpha} = \arccos \sqrt{\frac{1}{2+m}}.$$

Ist die Dehnung, also m, unendlich klein, so wird der Vector am meisten gedreht, der einen Winkel von beinahe 45^0 mit α macht.

Wir wollen jetzt die *Veränderung der geraden Linien von einem Punkte P* des Körpers aus *bei einer Verdrehung* (α, β, n) desselben untersuchen. Ist der Vector eines Punktes P' in Bezug auf P gleich $x\gamma'$ und ϱ' sein Vector nach der Verdrehung in Bezug auf den Vectorenanfangspunkt O und haben ϱ, ω die frühere Bedeutung, so ist der Vector von P' nach der Verdrehung in Bezug auf P, wenn $\gamma = \alpha\beta$,

$$\varrho' - \varrho = -(\beta\alpha)^n \alpha S\alpha x\gamma' - \beta S\beta x\gamma' - \gamma S\gamma x\gamma'.$$

Die *Punkte eines Vectors* $x\gamma'$ von P aus erfahren also *bei einer Verdrehung*, im allgemeinen, einmal *eine geradlinige Verschiebung* $(\varrho - \omega)$, welche für alle gleich ist, *und* dann *eine schiefwinklige Gestaltsänderung*, denn der Vector $(\varrho' - \varrho)x^{-1} - \gamma'$ hat im allgemeinen eine andere Richtung als γ'; folglich eine *parallele Verschiebung ohne Gestaltsänderung*, eine *Dehnung* und eine *Drehung*.

Die *Dehnung eines Vectors* $x\gamma'$ von P aus ist

$$\{T[-(\beta\alpha)^n \alpha S\alpha\gamma' - \beta S\beta\gamma' - \gamma S\gamma\gamma'] - T\gamma'\}\gamma'$$

oder

$$\left\{\left[1 - 2\sin\frac{n\pi}{2}\cos\angle\frac{\gamma'}{\beta}\cos\angle\frac{\gamma'}{\alpha}\right]^{\frac{1}{n}} - 1\right\}\gamma'.$$

Die *Vectoren gleicher Dehnung* sind bestimmt durch die Gleichung:

$$\cos\angle\frac{\gamma'}{\beta}\cos\angle\frac{\gamma'}{\alpha} = \text{const.} = C$$

oder durch

$$S\frac{\gamma'}{-\beta}\,S\frac{\overset{-\alpha}{C}}{\gamma'} = 1$$

mit der Beziehung

$$T\gamma' = 1.$$

Die vorletzte Gleichung stellt *einen Kegel mit der Spitze in P* dar, *welcher durch den Kreis geht, in dem die Ebene senkrecht zu* $-\beta$ *durch den Endpunkt dieses Vectors die Kugel schneidet, deren einer Durchmesser* $-\alpha/C$ *ist.*

Seinen grössten und kleinsten Werth erreicht der Tensor des Dehnungsvectors, wenn $\cos \angle \gamma'/\alpha \cos \angle \gamma'/\beta$ den kleinsten oder grössten Werth annimmt, und dieser ist $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$. Denn wenn wir den Winkel der Ebenen (α, γ') und (α, β) mit B bezeichnen, ist

$$\cos \angle \frac{\gamma'}{\alpha} = \sin \angle \frac{\gamma'}{\alpha} \cos B,$$

$$\cos \angle \frac{\gamma'}{\alpha} \cos \angle \frac{\gamma'}{\beta} = \tfrac{1}{2} \sin 2 \angle \frac{\gamma'}{\alpha} \cos B = C.$$

Dieses *Maximum und Minimum der Dehnung* tritt ein für *die beiden Vectoren von P aus in der Ebene von* α *und* β, *welche den Winkel* $\pi/4$ *oder* $3\pi/4$ *mit* α *bilden.*

Bei einer sehr kleinen Verdrehung können wir $n\pi/2$ statt $\sin n\pi/2$ setzen und erhalten für die Dehnung eines Vectors $x\gamma'$ von einem Punkte P aus

$$-\frac{n\pi}{2} \cos \angle \frac{\gamma'}{\beta} \cos \angle \frac{\gamma'}{\alpha} \gamma'.$$

In diesem Falle ist *die Grösse der Dehnung derjenigen der Drehung n proportional.*

Was die *Drehung eines* solchen *Vectors* γ', *von einem Punkt P des Körpers aus, bei einer Verdrehung* (α, β, n) betrifft, so ist *ihre Grösse* durch den Winkel, $\angle (\varrho' - \varrho) x^{-1}/\gamma'$, bestimmt. Denn $(\varrho' - \varrho)$ ist der Vector, zu dem $x\gamma'$ nach der betrachteten Gestaltsänderung wird.

Bei einer *schiefwinkligen Gestaltsänderung* (α, β) ist der Vector eines Punktes P', der um $x\gamma'$ von P absteht, wenn die Zeichen die bisherige Bedeutung haben und der Anfangspunkt O der Vectoren in der vorigen Weise gewählt wird, nach derselben

$$\varrho' = \omega + x\gamma' - \beta S \omega \alpha - x\beta S \gamma' \alpha.$$

Der Vector $x\gamma'$ erfährt also *eine Verschiebung* $-\beta S \omega \alpha$ und *eine schiefwinklige Gestaltsänderung* $-\beta S \gamma' \alpha$. Seine *Dehnung* ist $[T(\gamma' - \beta S \gamma' \alpha) - T\gamma'] \gamma'$.

Die *Vectoren der Dehnung gleicher Grösse* sind danach bestimmt durch die Gleichung:

$$-\beta^2(S\gamma'\alpha)^2 - 2S.\gamma'(-\beta S\gamma'\alpha) = \text{const.},$$

oder durch

$$S\gamma'\alpha S\gamma'(\alpha - 2\beta^{-1}) = -\frac{\text{const.}}{\beta^2} = C$$

oder vermittelst der Gleichung:

$$S\frac{\gamma'}{-\alpha}S\frac{\left(\frac{2\beta^{-1}-\alpha}{C}\right)}{\gamma'} = 1.$$

Sie *bilden* also *den schiefen Kreiskegel mit der Spitze in P, der durch den Kreis geht, in dem die Ebene senkrecht zum Vector $-\alpha$ durch seinen Endpunkt die Kugel mit dem Durchmesser $2\beta^{-1} - \alpha$ / C schneidet.*

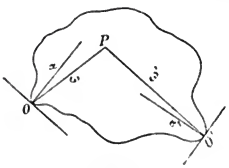


Fig. 3.

Die *Grösse der Drehung* eines Vectors $x\gamma'$ wird durch den Winkel, $\angle(\gamma' - \beta S\gamma'\alpha)/\gamma'$, bestimmt.

Es soll jetzt die *Veränderung* untersucht werden, die ein Körper *durch mehrere gleichzeitige Dehnungen* erfährt. Durch eine Dehnung $m\alpha$ erleidet ein Punkt desselben die Verschiebung $-\alpha m S\alpha\omega$, wenn ω der Vector dieses Punktes vor der Dehnung in Bezug auf den ihr zugehörigen Vectorenanfangspunkt O ist. Infolge einer zweiten Dehnung $m_1\alpha_1$ wäre die Verrückung desselben Punktes $-m_1\alpha_1 S\alpha_1\omega'$, wenn ω' der Vector dieses Punktes P in Bezug auf den der zweiten Dehnung zugehörigen Vectorenanfangspunkt O' ist (Fig. 3). Ist nun ω_1 der Vector von O' in Bezug auf O als Anfangspunkt der Vectoren, so wird $\omega' = \omega - \omega_1$ und die letztere Verrückung wird dann $-\alpha_1 m_1 S\alpha_1\omega + m\alpha_1 S\alpha_1\omega_1$.

Danach ergäbe sich der Vector ϱ eines Punktes P eines Körpers nach beliebig vielen gleichzeitigen Dehnungen $m\alpha$, $m_1\alpha_1$, $m_2\alpha_2$, ... $m_n\alpha_n$ in Bezug auf den der ersten zugehörigen Anfangspunkt, in Bezug auf welchen er vor diesen ω ist, in der Form:

$$\varrho = \omega + \sum_{n=1}^{n=n} m_n\alpha_n S\alpha_n\omega_n - \sum_{n=0}^{n=n} m_n\alpha_n S\alpha_n\omega.$$

Die Wirkung aller wäre also *eine geradlinige Verschiebung des Körpers ohne Gestaltsänderung und zugleich eine Verrückung seiner Punkte, welche eine solche zur Folge hat.*

Nun ist

$$\sum_{n=0}^{n=n} m_n \alpha_n S\alpha_n \omega$$

eine selbstconjugirte, lineare, oder distributive Vectorfunction; wenden wir auf sie die rechtwinklige Transformation einer solchen an, so können wir schreiben:

$$\sum_{n=0}^{n=n} m_n \alpha_n S\alpha_n \omega = c_1 \beta_1 S\beta_1 \omega + c_2 \beta_2 S\beta_2 \omega + c_3 \beta_3 S\beta_3 \omega .$$

Hier sind c_1, c_2, c_3 drei reelle Scalare, welche durch die Constanten der linken Seite der Gleichung bestimmt sind, und β_1, β_2, β_3 drei zu einander rechtwinklige constante Einheitsvectoren. Setzen wir

$$\sum_{n=1}^{n=n} m_n \alpha_n S\alpha_n \omega_n - c_1 \beta_1 S\beta_1 \omega_1 - c_2 \beta_2 S\beta_2 \omega_2 - c_3 \beta_3 S\beta_3 \omega_3 = \text{einem Vector } \gamma ,$$

in welchem Ausdruck ω_1, ω_2 und ω_3 beziehlich die Vectoren der Anfangspunkte sind, in Bezug auf O, dem Anfangspunkte zur Dehnung $m\alpha$, welche den Dehnungen $c_1\beta_1$, $c_2\beta_2$ und $c_3\beta_3$ zugehören, so haben wir

$$\varrho = \omega + \gamma - c_1\beta_1 S\beta_1(\omega - \omega_1) - c_2\beta_2 S\beta_2(\omega - \omega_2) - c_3\beta_3 S\beta_3(\omega - \omega_3).$$

Danach lässt sich *die Wirkung beliebiger gleichzeitiger Dehnungen an einem Körper* zurückführen auf *eine geradlinige Verschiebung ohne Gestaltsänderung* und auf *drei zu einander rechtwinklige gleichzeitige Dehnungen.*

Benutzen wir die cyclische Transformation einer selbstconjugirten linearen Vectorfunction, so können wir schreiben:

$$\sum_{n=0}^{n=n} m_n \alpha_n S\alpha_n \omega = g'\omega + \lambda S\mu\omega + \mu S\lambda\omega ;$$

hier ist g' ein constanter Scalar und λ und μ sind zwei constante Vectoren, deren Tensor im allgemeinen jedoch nicht eins ist. Setzt man

$$\sum_{n=1}^{n=n} m_n \alpha_n S\alpha_n \omega_n - \lambda S\mu\omega_1 - \mu S\lambda\omega_2 = \text{einem Vector } \gamma_1 ,$$

in welcher Gleichung ω_1 und ω_2 die Anfangspunkte in Bezug auf O bestimmen, welche den Richtungen der Vectoren μ, beziehlich λ zugehören. Dann ist der Ausdruck für ϱ:

$$\varrho = \omega + \gamma_1 - g'\omega - \lambda S(\omega - \omega_1)\mu - \mu S(\omega - \omega_2)\lambda .$$

Den Theil der Gestaltsänderung, welcher vom Gliede $-g'\omega$ herkommt, können wir eine *sphärische Gestaltsänderung* nennen, weil durch ihn alle Punkte des Körpers, welche auf der Oberfläche einer Kugel um O als Mittelpunkt liegen, in der Richtung ihres Radius auf eine neue Kugeloberfläche mit demselben Mittelpunkte übergeführt werden. Die beiden letzten Glieder der rechten Seite der letzten Gleichung stellen *zwei schiefwinklige Gestaltsänderungen* dar, welche in der Beziehung zu einander stehen, dass die Vectoren, die bei der einen die Richtung der Linien angeben, welche die eine schiefwinklige Gestaltsänderung erleiden, für die andere die Richtung bestimmen, nach welcher die Verrückung der einzelnen Punkte solcher Linien statt hat. Wir wollen zwei schiefwinklige Gestaltsänderungen der Art *conjugirte schiefwinklige Gestaltsänderungen* nennen und können dann sagen:

Die Wirkung mehrerer gleichzeitiger Dehnungen eines Körpers ist gleich einer geradlinigen Verschiebung desselben ohne Gestaltsänderung, einer sphärischen und zwei conjugirten schiefwinkligen Gestaltsänderungen.

Drittens können wir die Focaltransformation einer selbstconjugirten und linearen Vectorfunction einführen und bekommen dann

$$\sum_{n=0}^{n=n} m_n \alpha_n S\alpha_n \omega = -a\alpha' V\alpha'\omega + b\beta S\beta\omega ,$$

in welch letzterem Ausdrucke a und b zwei constante Scalare und α' und β zwei constante Einheitsvectoren sind. Setzt man

$$\sum_{n=1}^{n=n} m_n \alpha_n S\alpha_n \omega_n - b\beta S\beta\omega_1 = \gamma_2 ,$$

in welcher Gleichung ω_1 der Vector des der Richtung β zugehörigen Anfangspunktes in Bezug auf O ist, so wird

$$\varrho = \omega + \gamma_2 + a\alpha' V\alpha'\omega - b\beta S\beta(\omega - \omega_1) .$$

Das Glied $a\alpha' V\alpha'\omega$ bewirkt eine Gestaltsänderung, bei der alle Linien in einem geraden Kreiskegel mit der Spitze in O,

dessen Axe α' ist, der Grösse nach dieselbe schiefwinklige Gestaltsänderung erleiden. Die Richtung der Verrückung liegt in der Ebene einer solchen Linie oder Seite des Kegels und seiner Axe α' und ist senkrecht zu ihr. Wir können sie eine *conische Gestaltsänderung* nennen; die Seiten eines geraden Kreiskegels mit der Spitze in O werden durch sie auf einen neuen solchen mit derselben Spitze übergeführt.

Die Wirkung mehrerer gleichzeitiger Dehnungen kann also auch *gleich einer geradlinigen, für alle Punkte des Körpers gleichen Verrückung, einer conischen Gestaltsänderung und einer Dehnung desselben* aufgefasst werden.

Wir wollen jetzt die *Wirkung mehrerer gleichzeitiger Verdrehungen* untersuchen. Nach einer solchen (α, β, n) ist der Vector ϱ eines Punktes P des denselben unterworfenen Körpers

$$\varrho = -(\beta\alpha)^n \alpha S\alpha\omega - \beta S\beta\omega - \gamma S\gamma\omega,$$

wenn er vor derselben $\omega = -\alpha S\alpha\omega - \beta S\beta\omega - \alpha\beta S\alpha\beta\omega$ war und der Vectorenanfangspunkt O der gemäss dieser Verdrehung gewählte ist. Die Verschiebung, welche der Punkt P bei einer Verdrehung (α, β, n) erfährt, ist danach

$$+ \alpha S\alpha\omega\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right) + \beta S\alpha\omega \sin\frac{n\pi}{2} = 2\sin\frac{n\pi}{4} S\alpha\omega\left(\alpha\sin\frac{n\pi}{4} + \beta\cos\frac{n\pi}{4}\right).$$

Infolge einer zweiten Verdrehung (α_1, β_1, n_1) wäre die Verrückung desselben Punktes P

$$= 2\sin n_1\frac{\pi}{4} S\alpha'(\omega - \omega_1)\left[\alpha_1\sin\frac{n_1\pi}{4} + \beta_1\cos\frac{n_1\pi}{4}\right],$$

wenn ω_1 der Vector des der zweiten Verdrehung zugehörigen Anfangspunktes in Bezug auf den der ersten O ist.

Setze ich $\alpha\beta = \gamma$, so sind α, β, γ drei zu einander rechtwinklige Einheitsvectoren. Es kann geschrieben werden

$$\alpha_1 = -\alpha S\alpha\alpha_1 - \beta S\beta\alpha_1 - \gamma S\gamma\alpha_1$$
$$S\alpha_1\omega = -S\alpha\alpha_1 S\alpha\omega - S\beta\alpha_1 S\beta\omega - S\gamma\alpha_1 S\gamma\omega$$

und die Verrückung von P durch die zweite Verdrehung kann auch in der Form dargestellt werden

$$- 2 \sin n_1 \frac{\pi}{4} S\alpha_1\omega_1 \left(\alpha_1 \sin n_1 \frac{\pi}{4} + \beta_1 \cos n_1 \frac{\pi}{4}\right)$$

$$-2\sin n_1\frac{\pi}{4}\left(\alpha_1 \sin n_1\frac{\pi}{4}+\beta_1 \cos n_1\frac{\pi}{4}\right)(S\alpha\alpha_1 S\alpha\omega + S\beta\alpha_1 S\beta\omega + S\gamma\alpha_1 S\gamma\omega).$$

Nach beliebig vielen gleichzeitigen Verdrehungen (α, β, n), (α_1, β_1, n_1), (α_2, β_2, n_2), $\ldots$ (α_m, β_m, n_m) ist der Vector ϱ eines Punktes P des Körpers, der ihnen unterworfen wird, in Bezug auf den der ersten von ihnen gemäss gewählten Anfangspunkt O der Vectoren danach durch den Ausdruck gegeben:

$$\varrho = \omega + \sigma + c_1\gamma_1 S\alpha\omega + c_2\gamma_2 S\beta\omega + c_3\gamma_3 S\gamma\omega,$$

in welcher Gleichung

$$\sigma = -\sum_{m=1}^{m=m} 2 \sin n_m \frac{\pi}{4}\left(\alpha_m \sin n_m \frac{\pi}{4} + \beta_m \cos n_m \frac{\pi}{4}\right) S\alpha_m\omega_m$$

$$c_1\gamma_1 = 2 \sin n \frac{\pi}{4}\left(\alpha \sin n \frac{\pi}{4} + \beta \cos n \frac{\pi}{4}\right)$$

$$-\sum_{m=1}^{m=m} 2 \sin n_m \frac{\pi}{4}\left(\alpha_m \sin n_m \frac{\pi}{4} + \beta_m \cos n_m \frac{\pi}{4}\right) S\alpha\alpha_m,$$

$$c_2\gamma_2 = -\sum_{m=1}^{m=m} 2 \sin n_m \frac{\pi}{4}\left(\alpha_m \sin n_m \frac{\pi}{4} + \beta_m \cos n_m \frac{\pi}{4}\right) S\beta\alpha_m$$

$$c_3\gamma_3 = -\sum_{m=1}^{m=m} 2 \sin n_m \frac{\pi}{4}\left(\alpha_m \sin n_m \frac{\pi}{4} + \beta_m \cos n_m \frac{\pi}{4}\right) S\gamma\alpha_m$$

ist. Die Vectoren γ_1, γ_2, γ_3 können als Einheitsvectoren angesehen werden und c_1, c_2, c_3 als drei Scalare. Die Summe der drei letzten Glieder im Ausdruck für ϱ stellt eine lineare oder distributive Vectorfunction dar, welche im allgemeinen *nicht* selbstconjugirt ist. Es lässt sich also schreiben:

$$c_1\gamma_1 S\alpha\omega + c_2\gamma_2 S\beta\omega + c_3\gamma_3 S\gamma\omega = \varphi_0\omega + V\gamma'\omega,$$

und hier ist $\varphi_0\omega$ der selbstconjugirte Theil der linken Seite der letzten Gleichung und $\gamma' = \frac{1}{2}V(c_1\gamma_1\alpha + c_2\gamma_2\beta + c_3\gamma_3\gamma)$. Und es folgt

$$\varrho = \omega + \sigma + V\gamma'\omega + \varphi_0\omega.$$

Der Vector σ stellt eine allen Punkten gemeinsame Verschiebung dar und $V\gamma'\omega$ eine — wie wir sagen können — *conische Gestaltsänderung*, denn durch sie werden alle Linien des Körpers von O aus, welche auf dem Mantel eines geraden Kreiskegels mit dem Vector γ' als Axe liegen, auf den Mantel eines neuen

solchen mit derselben Axe übergeführt. Die selbstconjugirte lineare oder distributive Vectorfunction $\varphi_0\omega$ zusammen mit einem Theile der in passender Weise veränderten Vectorconstanten σ stellt eine Gestaltsänderung dar, wie sie durch mehrere gleichzeitige Dehnungen hervorgebracht wird.

Es ist also *die Wirkung beliebig vieler gleichzeitiger Verdrehungen eines Körpers gleich einer geradlinigen Verrückung desselben, einer bestimmten conischen Gestaltsänderung und mehrerer gleichzeitiger Dehnungen desselben.*

Es soll jetzt *die Veränderung eines Körpers durch mehrere schiefwinklige, gleichzeitige Gestaltsänderungen* untersucht werden.

Nach dem früheren ist die Verschiebung eines Punktes P des Körpers nach einer schiefwinkligen Gestaltsänderung (α, β) desselben $-\beta S\alpha\omega$, wenn der Vectorenanfangspunkt O gemäss dieser Gestaltsänderung gewählt ist, wie vorher auseinandergesetzt worden ist. Für eine zweite schiefwinklige Gestaltsänderung (α_1, β_1) wäre die Verschiebung $-\beta_1 S\alpha_1(\omega - \omega_1)$, wenn ω_1 der Vector des dieser zweiten schiefwinkligen Gestaltsänderung zugehörigen Anfangspunktes in Bezug auf O ist. Der Vector ϱ eines Punktes des Körpers nach beliebig vielen schiefwinkligen Gestaltsänderungen (α, β), (α_1, β_1), (α_2, β_2), $\ldots (\alpha_n, \beta_n)$ desselben in Bezug auf den der ersten (α, β) zugehörigen Anfangspunkt O ist danach bestimmt durch die Gleichung

$$\varrho = \omega - \sum_{n=0}^{n=m} \beta_n S\alpha_n(\omega - \omega_n),$$

wenn ω der Vector dieses Punktes vor der Gestaltsänderung und ω_i der Vector des der schiefwinkligen Gestaltsänderung (α_i, β_i) zugehörigen Anfangspunktes O_i in Bezug auf O, den der ersten zugehörigen Anfangspunkt, ist. Wenn wir $V\alpha\beta = \gamma$ setzen, so haben wir:

$$\alpha_i = \frac{1}{S\alpha\beta\gamma}(\alpha S\beta\gamma\alpha_i + \beta S\gamma\alpha\alpha_i + \gamma S\alpha\beta\alpha_i)$$

und also

$$\varrho = \omega + \sum_{n=1}^{n=m} \beta_n S\alpha_n\omega_n - \frac{1}{S\alpha\beta\gamma} \sum_{n=1}^{n=m} \beta_n (S\beta\gamma\alpha_n S\alpha\omega + S\gamma\alpha\alpha_n S\beta\omega + S\alpha\beta\alpha_n S\gamma\omega) - \beta S\alpha\omega,$$

oder

$$\varrho = \omega + \sigma + \gamma_1 S\alpha\omega + \gamma_2 S\beta\omega + \gamma_3 S\gamma\omega.$$

wenn σ das von ω unabhängige Glied im Ausdruck für ϱ ist und γ_1, γ_2, γ_3 beziehlich die Vectorfactoren von $S\alpha\omega$, $S\beta\omega$, $S\gamma\omega$ in ihm sind. Die Summe der drei letzten Glieder der rechten Seite der letzten Gleichung ist nun eine lineare oder distributive Vectorfunction von ω, welche im allgemeinen *nicht* selbstconjugirt ist.

Dann *lassen sich* aber, wenn man sich die Vectorconstante σ entsprechend umgestaltet denkt, *mehrere gleichzeitige schiefwinklige Gestaltsänderungen eines Körpers ersetzen durch eine geradlinige Verrückung desselben ohne Gestaltsänderung und durch mehrere gleichzeitige Verdrehungen.*

Kehren wir jetzt zur *allgemeinen stetigen Gestaltsänderung* $\varphi\omega$ zurück. Bei einer solchen *erfährt ein unendlich kleiner Würfel* der Substanz *drei gleichzeitige Dehnungen nach den Richtungen seiner drei Kanten und drei gleichzeitige Verdrehungen, welche die Linien in ihm parallel eben diesen Kanten erleiden.*

Es finden, nach früherem, *keine Dehnungen* statt, *wenn*

$$Td\varphi\,\omega_{\omega_1} = Td\varphi\,\omega_{\omega_2} = Td\varphi\,\omega_{\omega_3} = 1$$

ist, und *keine Verdrehungen, wenn*

$$Sd\varphi\,\omega_{\omega_1}\omega_1 = -\,Td\varphi\,\omega_{\omega_1}, \quad Sd\varphi\,\omega_{\omega_2}\omega_2 = -\,Td\varphi\,\omega_{\omega_2},$$
$$Sd\varphi\,\omega_{\omega_3}\omega_3 = -\,Td\varphi\,\omega_{\omega_3},$$

ist. *Aus dem Würfel* wird ferner *ein rechtwinkliges Parallelepiped, wenn*

$$Sd\varphi\,\omega_{\omega_1}d\varphi\,\omega_{\omega_2} = Sd\varphi\,\omega_{\omega_2}d\varphi\,\omega_{\omega_3} = Sd\varphi\,\omega_{\omega_3}d\varphi\,\omega_{\omega_1} = 0$$

ist.

Denken wir uns von einem Punkte P des Körpers aus, dessen Vector vor der allgemeinen Gestaltsänderung $\varphi\omega$ den Werth ω haben möge, einen unendlich kleinen Vector $d\omega$. Es sei

$$d\omega = x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3,$$

in welcher Gleichung ω_1, ω_2, ω_3 drei gleich lange, zu einander rechtwinklige, unendlich kleine Vectoren und x, y, z drei variable im allgemeinen endliche Scalare sein mögen, welche der Bedingungsgleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

genügen sollen. Der Ort des Endpunktes von P ist dann eine Kugelfläche um P als Mittelpunkt, deren Radius der gemein-

same Tensor von $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ist. Nach der *stetigen Gestaltsänderung* $\varphi\omega$ wird aus einem solchen Vector $d\omega$ der Vector

$$\varphi(\omega + d\omega) - \varphi\omega = x d\varphi\omega_{\omega_1} + y d\varphi\omega_{\omega_2} + z d\varphi\omega_{\omega_3},$$

mit der vorigen Bedingungsgleichung für die variabeln Scalare x, y, z. Der Ort des Endpunktes von $[\varphi(\omega + d\omega) - \varphi\omega]$ ist danach ein Ellipsoid um die durch die Gestaltsänderung $\varphi\omega$ veränderte Lage von P als Mittelpunkt, in dem $d\varphi\omega_{\omega_1}, d\varphi\omega_{\omega_2}, d\varphi\omega_{\omega_3}$ drei conjugirte Halbmesser sind. *Also wird bei einer stetigen Gestaltsänderung aus einer sehr kleinen Kugel in einem Körper*, im allgemeinen, *ein Ellipsoid, und irgend drei zu einander rechtwinklige Radien der ersteren werden drei conjugirte Halbmesser des letzteren.*

Nehmen wir $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ nicht rechtwinklig zu einander und nicht gleich lang an, so wird der Ort des Endpunktes von $d\omega$ die Oberfläche eines Ellipsoids um P als Mittelpunkt, in dem $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ drei conjugirte Halbaxen sind. Für $[\varphi(\omega + d\omega) - \varphi\omega]$ erhalten wir den vorigen Ausdruck mit veränderter Bedeutung von $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

Bei einer stetigen Gestaltsänderung eines Körpers wird danach aus einem sehr kleinen Ellipsoid in ihm wieder ein solches und irgend drei conjugirte Halbmesser bleiben es.

Wählt man $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ *bei ungleicher Länge zu einander senkrecht*, so werden diese Vectoren die Hauptaxen eines solchen Ellipsoids vor seiner Gestaltsänderung und nach derselben drei conjugirte Halbmesser in dem veränderten Ellipsoid, welche — im allgemeinen — nicht dessen Hauptaxen sind. Man kann nun nach der *Bedingung* fragen, *bei der diese Hauptaxen es bleiben.* Es findet offenbar statt, wenn $S d\varphi\omega_{\omega_1} d\varphi\omega_{\omega_2} = S d\varphi\omega_{\omega_2} d\varphi\omega_{\omega_3} = S d\varphi\omega_{\omega_3} d\varphi\omega_{\omega_1} = 0$ ist, denn dann sind die conjugirten Halbmesser, welche aus den Hauptaxen werden, auch zu einander rechtwinklig. Die Hauptaxen eines solchen Ellipsoids vor seiner Gestaltsänderung werden in diesem Falle im allgemeinen eine andere Richtung haben, als in der veränderten Gestalt desselben. *Wenn* jedoch $d\varphi\omega_{\omega_1}/\omega_1 =$ einem Scalar ist, und auch $d\varphi\omega_{\omega_2}/\omega_2$ und $d\varphi\omega_{\omega_3}/\omega_3$ *Scalare* sind, so bleiben die Hauptaxen eines sehr kleinen Ellipsoids vor seiner Gestaltsänderung sich parallel nach derselben.

Wenn die geometrischen Brüche $d\varphi\,\omega_{\omega_1}/\omega_1$, $d\varphi\,\omega_{\omega_2}/\omega_2$, $d\varphi\,\omega_{\omega_3}/\omega_3$ *Scalare und* ω_1, ω_2, ω_3 *rechtwinklig zu einander sind, bleiben die Hauptaxen eines sehr kleinen Ellipsoids in einem Körper es auch nach einer stetigen Gestaltsänderung desselben und bewahren ihre Richtung.*

Berlin, den 19. März 1895.

6. *Theoretische Untersuchungen über elastische Körper; von Paul Glan.*

II. Von den elastischen Kräften und Temperaturveränderungen bei Gestaltsänderungen.

Wenn ein elastischer Körper eine Gestaltsänderung erleidet, entstehen in ihm Kräfte, welche ihn in den Zustand ohne Gestaltsänderung zurückzuführen suchen. Dieselben sind im allgemeinen für verschieden gerichtete ebene Elemente durch denselben Punkt des Körpers nach Grösse und Richtung verschieden und auch im allgemeinen für gleich grosse, gleich gerichtete ebene Elemente durch verschiedene Punkte des Körpers verschieden. Die auf die Seitenfläche eines solchen ebenen Elementes wirksame elastische Kraft kann durch einen Vector dargestellt werden, den wir den zugehörigen *Vector der elastischen Kraft* nennen wollen. Bei einer stetigen Gestaltsänderung, durch die wir im Folgenden die hier betrachteten elastischen Kräfte hervorgerufen denken wollen, variirt die Verschiebung und also auch die Art der Gestaltsänderung stetig mit dem Ort, von der letzteren hängen nun die elastischen Kräfte ab und sie können danach auch stetig veränderlich im Körper angenommen werden. Haben sie also für ein Element einer Ebene im Körper eine gewisse Grösse und Richtung, so werden sie für ein benachbartes verschwindend wenig anders sein, man wird demnach die Grösse der elastischen Kraft, die auf ein ebenes Element do im Körper wirkt, dem Flächeninhalt dieses Elementes proportional setzen. Ist mithin α der Vector der elastischen Kraft *gerechnet* für die Flächeneinheit um einen Punkt einer Ebene, so kann er für ein Element do derselben Ebene um denselben Punkt gleich $\alpha\, do$ gesetzt werden.

Denken wir uns den Körper einer Gestaltsänderung unterworfen und in derselben erhalten. Ein räumliches Element in seinem Innern ist dann im Zustande des Gleichgewichts und die elastischen Kräfte, welche von aussen auf seine Umgrenzung wirken, erhalten es in demselben.

Wenn man sich seine einzelnen Theile fest verbunden denkt, so dass es einen sehr kleinen vollkommen harten Körper bildete, so würde das Gleichgewicht nicht gestört werden, das dieselben elastischen Kräfte erhielten und sie müssen also den Bedingungen genügen, welche für die Kräfte gelten, die einen vollkommen harten Körper in Ruhe halten, ihre Resultante muss also Null sein.

Wir wählen das Element als eine kleine dreiseitige Pyramide. Die Seitenflächen derselben mögen do_1, do_2, do_3 sein und die Vectoren der von aussen auf sie wirkenden elastischen Kräfte gerechnet für die Flächeneinheit seien bezüglich α', β', γ'. Die Basisfläche dieser Pyramide sei do und der Vector der von aussen auf sie wirkenden elastischen Kraft gerechnet für die Flächeneinheit sei ϱ. Dann muss nach dem Vorigen

$$\varrho\, do = -(\alpha' do_1 + \beta' do_2 + \gamma' do_3)$$

sein.

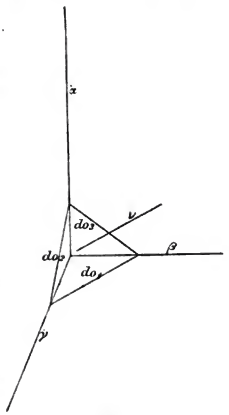


Fig. 1.

Da nun do jede kleine Ebene unendlich nahe der Spitze, oder im Grenzfall durch sie gehend, sein kann und mit ihrer Lage bei der gegebenen Richtung der Kanten der Pyramide auch do_1, do_2, do_3 gegeben sind, so *genügt die Kenntniss der Vectoren der elastischen Kraft, gerechnet für die Flächeneinheit, zu irgend drei kleinen ebenen Elementen durch einen Punkt, um den Vector der elastischen Kraft gerechnet für die Flächeneinheit für jedes andere sehr kleine Ebenenstück, durch ihn angeben zu können.*

Besonders einfach gestaltet sich die Bestimmung von do_1, do_2, do_3 aus der Lage von do, wenn die von der Spitze der unendlich kleinen Pyramide ausgehenden Kanten rechtwinkelig zu einander sind; ihre Richtung sei beziehentlich durch die drei zu einander rechtwinkeligen Einheitsvectoren α, β, γ (Fig. 1) bestimmt. Die Richtung der auf der Basis do nach aussen

errichteten Normale sei durch den Einheitsvector ν gegeben. Dann ist $do_1 = -do\, S\alpha\nu$, $do_2 = -do\, S\beta\nu$, $do_3 = -do\, S\gamma\nu$, und $(S\alpha\nu)^2 + (S\beta\nu)^2 + (S\gamma\nu)^2 = 1$. Wir haben also für den Vector ϱ der elastischen Kraft gerechnet für die Flächeneinheit den Ausdruck:

$$\varrho = \alpha' S\alpha\nu + \beta' S\beta\nu + \gamma' S\gamma\nu,$$

in Verbindung mit

$$(S\alpha\nu)^2 + (S\beta\nu)^2 + (S\gamma\nu)^2 = 1.$$

Zieht man zu sämmtlichen Ebenenelementen durch die Spitze P der betrachteten Pyramide die für die Flächeneinheit gerechneten, zugehörigen *Vectoren der elastischen Kräfte von P aus,* so *bilden* die Endpunkte dieser Vectoren *ein Ellipsoid, das Kraftellipsoid, mit dem Mittelpunkt in P, in dem* α', β', γ' *drei conjugirte Halbaxen sind.* Es ergiebt sich im Besonderen, dass die Vectoren der elastischen Kraft zu den beiden Seiten eines ebenen Elementes von gleicher Länge, doch entgegengesetzter Richtung sind. Da do_1, do_2, do_3 drei beliebig gewählte ebene, zu einander rechtwinkelige Elemente durch P sind, so folgt weiter:

Die Vectoren der elastischen Kraft gerechnet für die Flächeneinheit zu irgend drei ebenen und zu einander senkrechten Elementen durch einen Punkt P eines Körpers sind stets drei conjugirte Halbaxen des Kraftellipsoids um P.

Es gibt danach nur drei ebene und zu einander senkrechte Elemente durch einen Punkt, für welche die drei zugehörigen Vectoren der elastischen Kraft auch zu einander lothrecht sind. Die Letzteren sind dann die drei Hauptaxen des Kraftellipsoids. Es sollen jetzt in dem Ausdruck für ϱ die drei zu einander lothrechten Ebenenelemente do_1, do_2, do_3 so gewählt sein, dass die zugehörigen Vectoren der elastischen Kraft α', β', γ' die drei Hauptaxen des Kraftellipsoids um P sind. Die elastische Kraft wirkt im allgemeinen schräg gegen das Element, dem sie zugehört. Die Vectoren ϱ der elastischen Kraft, welche senkrecht zu den zugehörigen Elementen sind, sind die Lösungen der Gleichung $V\varrho\nu = 0$. Es sei die Drehung um α von β nach γ positiv oder rechtsläufig; lösen wir die in Bezug auf ν lineare oder distributive Gleichung für ϱ nach ν auf, ergiebt sich:

$$\nu = -\frac{\alpha\, S\alpha'\varrho}{(T\alpha')^2} - \frac{\beta\, S\beta'\varrho}{(T\beta')^2} - \frac{\gamma\, S\gamma'\varrho}{(T\gamma')^2} = \varphi\varrho$$

und dann wird:

$$V\varrho\nu = V\varrho\varphi\varrho = 0 = V\varrho\Phi\varrho,$$

wenn

$$\Phi\varrho = \varphi\varrho + c\varrho$$

und c ein Scalar ist. Jeder Vector ϱ ist eine Wurzel dieser quadratischen Vectorgleichung, der $\Phi\varrho$ gleich Null macht. Es kann nun geschrieben werden

$$\varrho = -\alpha S\alpha\varrho - \beta S\beta\varrho - \gamma S\gamma\varrho,$$

und also

$$\Phi\varrho = -\alpha S\left(\frac{\alpha'}{T\alpha'^2} + c\alpha\right)\varrho - \beta S\left(\frac{\beta'}{T\beta'^2} + c\beta\right)\varrho - \gamma S\left(\frac{\gamma'}{T\gamma'^2} + c\gamma\right)\varrho.$$

Da α, β, γ diplanar sind, kann dieser Ausdruck nur Null werden, wenn ein Glied der Summe Null ist. Das ergiebt erstens die Lösung

$$S\left(\frac{\alpha'}{T\alpha'^2} + c\alpha\right)\varrho_1 = c,$$

$$\varrho_1 = V\left(\frac{\beta'}{T\beta'^2} + c\beta\right)\left(\frac{\gamma'}{T\gamma'^2} + c\gamma\right).$$

Da nun ϱ nicht zu drei diplanaren Vectoren lothrecht sein kann, so folgt aus der ersten Gleichung

$$U\alpha' = \pm\alpha, \qquad T\alpha'^{-1} = \mp c.$$

Wählen wir zweitens $\Phi = \varphi + c_1$, in welchem Ausdruck c_1 ein anderer Scalar als c sein mag, und setzen das zweite Glied im neuen Ausdruck für $\Phi\varrho$ gleich Null, so folgt als zweite Lösung:

$$\varrho_2 = V\left(\frac{\alpha'}{T\alpha'^2} + c_1\alpha\right)\left(\frac{\gamma'}{T\gamma'^2} + c_1\gamma\right)$$

in Verbindung mit

$$U\beta' = \pm\beta, \qquad T\beta'^{-1} = \mp c_1.$$

Und die Annahme $\Phi = \varphi + c_2$ und verschwinden machen des dritten Gliedes in dem neuen Ausdruck für $\varphi\varrho$, führt zur neuen Lösung:

$$\varrho_3 = V\left(\frac{\alpha'}{T\alpha'^2} + c_2\alpha\right)\left(\frac{\beta'}{T\beta'^2} + c_2\beta\right)$$

im Verein mit

$$U\gamma' = \pm\gamma, \qquad T\gamma'^{-1} = \mp c_2.$$

Da nun die quadratische Vectorgleichung $V\varrho\Phi\varrho = V\varrho\nu = 0$ im allgemeinen nur drei Wurzeln hat, so sind die gefundenen

Werthe von ϱ im allgemeinen ihre einzige Lösungen und die drei Wurzeln der Gleichung $V\varrho\nu = 0$ sind:

$$\varrho_1 = C_1\alpha, \qquad \varrho_2 = C_2\beta, \qquad \varrho_3 = C_3\gamma;$$

C_1, C_2, C_3 sind hier drei Scalare. Folglich *sind die drei zu einander senkrechten ebenen Elemente durch einen Punkt, deren Lothe die Hauptaxen des Kraftellipsoids sind, die einzigen — im allgemeinen —, zu denen die zugehörige elastische Kraft senkrecht ist*, welche durch eine stetige Gestaltsänderung entsteht.

Durch diese elastischen Kräfte vermag nun ein Körper nach einer stetigen Gestaltsänderung Arbeit zu leisten. Wir wollen zuerst die *Grösse der elastischen Arbeit* betrachten, welche er *nach einer bestimmten stetigen Gestaltsänderung* leisten kann, *wenn seine Temperatur constant erhalten wird;* und zwar denken wir uns den Körper als *einen sehr kleinen Würfel*, dessen Kanten von einer Ecke aus die drei zu einander rechtwinkligen Vectoren $x\omega_1$, $y\omega_2$, $z\omega_3$ sein mögen. Er mag einer stetigen Gestaltsänderung $\varphi\omega$ unterworfen werden und wird dann also ein sehr kleines schiefwinkliges Parallelepiped, dessen Kanten von derselben Ecke aus die drei Vectoren $x\,d\varphi\,\omega_{\omega_1}$, $y\,d\varphi\,\omega_{\omega_2}$, $z\,d\varphi\,\omega_{\omega_3}$ sind. Die Grösse der elastischen Arbeit, welche es zu leisten vermag, wenn es bei constanter Temperatur wieder zum ursprünglichen Würfel wird, hängt nur von seiner Gestalt und seiner Temperatur ab. Seine Gestalt ist nun bestimmt durch die Länge seiner Seiten von einer Ecke aus und die Winkel, welche sie einschliessen, oder durch Grössen, die jene sechs Elemente unzweideutig bestimmen. Wir denken uns x, y, z als drei gleiche und unendlich kleine Scalare und ω_1, ω_2, ω_3 als Einheitsvectoren. Diese sechs Werthe sind durch die Grösse und Lage des ursprünglichen Würfels als bekannt und gegeben anzusehen. Die Längen der Kanten des Parallelepipedes geben die drei Tensoren $Td\varphi\,\omega_{\omega_1}$, $Td\varphi\,\omega_{\omega_2}$, $Td\varphi\,\omega_{\omega_3}$ an und diese sind wieder eindeutig bestimmt durch die Differenzen $Td\varphi\,\omega_{\omega_1} - 1$, $Td\varphi\,\omega_{\omega_2} - 1$, $Td\varphi\,\omega_{\omega_3} - 1$. Die Winkel zwischen zwei Kanten des Parallelepipedes sind, da sie zwischen 0 und π liegen müssen, durch ihre Cosinus vollständig bestimmbar. Diese sechs Grössen bestimmen also die augenblickliche Gestalt des Parallelepipedes völlig; wir wollen sie seine *Gestaltsvariabeln*

nennen und mit m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3 bezeichnen und es sei danach:

$$m_1 = Td\varphi\,\omega_{\omega_1} - 1,\quad m_2 = Td\varphi_{\omega_2} - 1,\quad m_3 = Td\varphi\,\omega_{\omega_2} - 1,$$
$$n_1 = -Sd\varphi\,\omega_{\omega_1}\,d\varphi\,\omega_{\omega_2} : Td\varphi\,\omega_{\omega_1}\,Td\varphi\,\omega_{\omega_2},$$
$$n_2 = -Sd\varphi\,\omega_{\omega_2}\,d\varphi\,\omega_{\omega_3} : Td\varphi\,\omega_{\omega_2}\,Td\varphi\,\omega_{\omega_3},$$
$$n_3 = -Sd\varphi\,\omega_{\omega_3}\,d\varphi\,\omega_{\omega_1} : Td\varphi\,\omega_{\omega_3}\,Td\varphi\,\omega_{\omega_1}.$$

Die Grösse der von dem ursprünglich würfelförmigen Körperelement bei constanter Temperatur zu leistenden Arbeit durch seine elastischen Kräfte ist demnach eine stetige Scalarfunction seiner Gestaltsvariabeln und seiner Temperatur. Die meisten Stoffe ertragen nun bloss kleine Dehnungen und kleine Verdrehungen ohne Störung des Zusammenhanges ihrer Theile, es soll deshalb der Charakter der Function f der elastischen Arbeit bei constanter Temperatur *nur für sehr kleine Werthe der Gestaltsvariabeln* festgestellt werden. Der physikalischen Bedeutung der Function f nach sind ihre Ableitungen nicht unendlich, für sehr kleine Werthe der Gestaltsvariabeln ist sie in eine convergente Reihe nach Mac Laurins Satz nach Gliedern von steigender Ordnung in Bezug auf die Gestaltsvariabeln zu entwickeln und wir können schreiben:

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots,$$

in welcher Gleichung

$$f_m = \frac{1}{2\,.\,3\,\ldots\,m}\left[e_m m_1 + e_m m_2 + e_m m_3 + e^{(m)}_{1,2} n_1 + e^{(m)}_{2,3} n_2 + e^{(m)}_{3,1} n_3\right]^m$$

und $e_m, \ldots e^{(m)}_{3,1}$ nur von der Temperatur abhängen. Wenn die Variabeln sämmtlich gleich Null werden, der kleine Würfel also keine Gestaltsänderung erleidet, vermag er keine elastische Arbeit zu leisten. Der Ausdruck für die Grösse f der elastischen Arbeit reducirt sich in diesem Falle auf das erste Glied der Reihe für f, auf f_0 und das muss gleich Null sein. Wir haben somit:

$$f = f_1 + f_2 + \cdots + f_m + r_m.$$

Hier ist jedes folgende Glied der Reihe unendlich klein höherer Ordnung als das vorhergehende und r_m bedeutet den Rest der Reihe, der klein gegen f_m ist, wenn sich die Variabeln der Null nähern. Die Summe der Glieder bis f_m bestimmt also bei kleinen Werthen der Gestaltsvariabeln das

Vorzeichen von f. Es würde also f_1 das Vorzeichen von f bestimmen, wenn wir $f = f_1 + r_1$ setzen. Nun muss f stets positiv sein, denn ein Würfel vermag nach jeder Gestaltsänderung bei constanter Temperatur positive elastische Arbeit zu leisten, f_1 ändert aber sein Vorzeichen mit dem Wechsel des Vorzeichens der Gestaltsvariabeln, folglich muss f_1 im Ausdruck für f verschwinden und wir erhalten:

$$f = f_2,$$

indem wir die auf f_2 folgenden Glieder fortlassen, weil sie unendlich klein höherer Ordnung sind, als f_2.

Wir wollen uns jetzt den *Würfel* als *Theil eines Körpers* denken, *der drei zu einander rechtwinklige physikalische Symmetrieebenen hat*, und die Seitenflächen des Würfels sollen jenen Symmetrieebenen parallel sein. Dann muss die Grösse der elastischen Arbeit bei constanter Temperatur die gleiche sein, wenn wir den Würfel einmal einer Verdrehung (ω_1, ω_2, n), das andere Mal einer Verdrehung $(\omega_1, \omega_2, -n)$ unterwerfen. Hierbei ändert aber n_1 sein Vorzeichen und es darf deshalb nicht die erste Potenz von n_1 in f_2 vorkommen. In entsprechender Weise gelangt man zu dem Schluss, dass auch die ersten Potenzen von n_2 und n_3 nicht in f_2 enthalten sein dürfen und der Ausdruck für f wird danach:

$$f = e_1 m_1^2 + e_2 m_2^2 + e_3 m_3^2 + v_1 n_1^2 + v_1 n_2^2 + v_3 n_3^2 + e_{12} m_1 m_2 + e_{23} m_2 m_3 + e_{31} m_3 m_1 .$$

Denken wir uns $T d\varphi\, \omega_1$, also auch m_1, um die kleine Grösse dm_1 verändert, durch welche m_1 der Null stets genähert werden mag; es verrückt sich in diesem Falle, z. B., die Seitenfläche durch den Anfangspunkt von $x d\varphi\, \omega_{\omega_1}$, welche jenen Vector nicht enthält, um $-x dm_1\, U d\varphi\, \omega_{\omega_1}$, von innen wirkt auf jene Seitenfläche die Kraft

$$-\alpha_1 y z\, T d\varphi\, \omega_{\omega_3} T d\varphi\, \omega_{\omega_2} \sin \angle \frac{d\varphi\, \omega_{\omega_2}}{d\varphi\, \omega_{\omega_3}},$$

wenn der Vector der elastischen Kraft gerechnet für die Flächeneinheit, der von aussen auf diese Seitenfläche wirkt, α_1 ist. Die Arbeit der von innen auf sie wirkenden Kraft ist dann bei dieser Verrückung derselben $-S\alpha_1\, U d\varphi\, \omega_1\, dm_1\, xyz$, wenn unendlich kleine Grössen höherer Ordnung fortbleiben, da

$$T d\varphi\, \omega_{\omega_3},\quad T d\varphi\, \omega_{\omega_2} \quad \text{und} \quad \sin \angle \frac{d\varphi\, \omega_{\omega_2}}{d\varphi\, \omega_{\omega_3}}$$

bei der hier betrachteten sehr kleinen Gestaltsänderung sich sehr wenig von der Einheit unterscheiden. Um diesen Betrag wird also die Grösse der elastischen Arbeit des ursprünglichen unendlich kleinen Würfels bei der betrachteten Veränderung verringert; diese Grösse verändert sich demnach dabei um $S\alpha_1 U d\varphi\, \omega_{\omega_1} d m_1 x y z$. Dieselbe Aenderung lässt sich aber ausdrücken durch

$$\frac{d f}{d m_1} d m_1 x y z,$$

wenn f jetzt die für die Volumeneinheit gerechnete Grösse der elastischen Arbeit bei constanter Temperatur bedeutet und unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als die hingeschriebene fortgelassen werden. Durch Gleichstellung der erhaltenen beiden Ausdrücke für dieselbe Grösse erhalten wir:

$$-\frac{d f}{d m_1} = -S\alpha_1 U d\varphi\, \omega_{\omega_1}$$

gleich der Grösse der Componenten von α_1 *auf die Richtung von* $d\varphi\, \omega_{\omega_1}$, und entsprechend:

$$-\frac{d f}{d m_2} = -S\alpha_2 U d\varphi\, \omega_{\omega_2}$$

gleich der Grösse der Componenten von α_2 *auf die Richtung von* $d\varphi\, \omega_{\omega_2}$, wenn α_2 der für die Flächeneinheit gerechnete Vector der elastischen Kraft ist, welche von aussen auf die Seitenfläche durch den Anfangspunkt von $y d\varphi\, \omega_{\omega_2}$ wirkt, welche jenen Vector nicht enthält; und

$$-\frac{d f}{d m_3} = -S\alpha_3 U d\varphi\, \omega_{\omega_3}$$

gleich der Grösse der Componenten von α_3 *auf die Richtung von* $d\varphi\, \omega_{\omega_3}$, wenn α_3 der für die Flächeneinheit gerechnete Vector der elastischen Kraft ist, welche von aussen auf die durch den Anfangspunkt des Vectors $z d\varphi\, \omega_{\omega_3}$ gehende Seitenfläche wirkt, in der jener Vector nicht enthalten ist.

Es mag jetzt, und zwar vom Anfangszustande $m_1, \ldots, n_3$ aus, die Kante $x d\varphi\, \omega_{\omega_1}$ und die ihr parallelen Linien im schiefwinkligen Parallelepipede eine unendlich kleine konische Drehung um die Seite $z d\varphi\, \omega_{\omega_3}$, beziehentlich um parallele Linien zu ihr, ausführen. Es ändert sich dabei nur $\angle\, d\varphi\, \omega_{\omega_1} | d\varphi\, \omega_{\omega_2}$ und also allein $n_1 = \cos \angle\, (d\varphi\, \omega_{\omega_1} | d\varphi\, \omega_{\omega_2})$, und zwar mag es um $d n_1$ sein. Die vom Parallelepipede im Anfangszustande

zu leistende elastische Arbeit bei constanter Temperatur ändert sich dabei um

$$\frac{df}{dn_1} dn_1 x y z.$$

Da nun

$$\cos \angle \frac{d\varphi\, \omega_{\omega_1}}{d\varphi\, \omega_{\omega_2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \angle \frac{d\varphi\, \omega_{\omega_1}}{d\varphi\, \omega_{\omega_2}}\right) = \frac{\pi}{2} - \angle \frac{d\varphi\, \omega_{\omega_1}}{d\varphi\, \omega_{\omega_2}},$$

weil der Cosinus und Sinus hier unendlich kleine Grössen sind, muss sich $\angle\, d\varphi\, \omega_{\omega_1} / d\varphi\, \omega_{\omega_2}$ um $-dn_1$ ändern, wenn sich n_1 oder $\cos \angle\, (d\varphi\, \omega_{\omega_1} / d\varphi\, \omega_{\omega_2}$ um dn_1 verändern. Die Seitenfläche des Parallelepipeds durch den Endpunkt der Kante $x\, d\varphi\, \omega_{\omega_1}$, welche sie nicht enthält, verschiebt sich dabei um $x\, dn_1\, U d\varphi\, \omega_{\omega_1}$, wenn unendlich kleine Grössen höherer Ordnung fortbleiben, und die Arbeit der vom Innern des Parallelepipeds auf seine Seitenflächen ausgeübten elastischen Kräfte bei dieser unendlich kleinen Gestaltsänderung ist $-S\alpha_1\, U d\varphi\, \omega_{\omega_2}\, dn_1\, x y z$, wenn man von unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung absieht. Um sie vermindert sich die elastische Arbeit des Parallelepipeds bei constanter Temperatur bei jener Veränderung seiner Gestalt und wir erhalten danach, wenn wir gemeinsame Factoren auf beiden Seiten der folgenden Gleichung fortlassen:

$$-\frac{df}{dn_1} = -S\alpha_1\, U d\varphi\, \omega_{\omega_2}$$

gleich der Theilkraft von α_1 nach der Richtung von $d\varphi\, \omega_{\omega_2}$.

Die gleiche Veränderung des Winkels $\angle\, d\varphi\, \omega_{\omega_1} / d\varphi\, \omega_{\omega_2}$ um $-dn_1$ hätte sich auch dadurch erreichen lassen, dass man sich $d\varphi\, \omega_{\omega_2}$ konisch um $d\varphi\, \omega_{\omega_2}$ in passender Weise hätte drehen lassen. Durch eine der zuvor angestellten entsprechende Betrachtung ergiebt sich dann:

$$-\frac{df}{dn_1} = -S\alpha_2\, U d\varphi\, \omega_{\omega_1}$$

gleich der Theilkraft von α_2 nach der Richtung von $d\varphi\, \omega_{\omega_1}$. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$-S\alpha_1\, U d\varphi\, \omega_{\omega_2} = -S\alpha_2\, U d\varphi\, \omega_{\omega_1},$$

die Gleichheit der Theilkraft von α_1 auf die Richtung von $d\varphi\, \omega_{\omega_2}$ und der von α_2 auf diejenige von $d\varphi\, \omega_{\omega_1}$.

Auf ähnliche Weise erhalten wir:

$$-\frac{df}{dn_2} = -S\alpha_2\, U d\varphi\, \omega_{\omega_3}$$

gleich der Theilkraft von α_2 auf die Richtung von $d\varphi\,\omega_{\omega_3}$

$$= -S\alpha_3\,U\,d\varphi\,\omega_{\omega_2}$$

gleich der Theilkraft von α_3 auf die Richtung von $d\varphi\,\omega_{\omega_2}$, und

$$-\frac{df}{dn_3} = -S\alpha_3\,U\,d\varphi\,\omega_{\omega_1}$$

gleich der Theilkraft von α_3 nach der Richtung von

$$d\varphi\,\omega_{\omega_1} = -S\alpha_1\,U\,d\varphi\,\omega_{\omega_3}$$

gleich der Theilkraft von α_1 nach der Richtung von $d\varphi\,\omega_{\omega_3}$.

Da die Einheitsvectoren $U\,d\varphi\,\omega_{\omega_1}$, $U\,d\varphi\,\omega_{\omega_2}$, $U\,d\varphi\,\omega_{\omega_3}$ nahe rechtwinklig zu einander sind bei den hier betrachteten kleinen Gestaltsänderungen, so wird mit Fortlassung von kleinen Werthen gegenüber den beibehaltenen:

$$\alpha_1 = -\left(\frac{df}{dn_1}\,U d\varphi\,\omega_{\omega_1} + \frac{df}{dn_1}\,U d\varphi\,\omega_{\omega_2} + \frac{df}{dn_3}\,U d\varphi\,\omega_{\omega_3}\right)$$

$$\alpha_2 = -\left(\frac{df}{dn_1}\,U d\varphi\,\omega_{\omega_1} + \frac{df}{dn_2}\,U d\varphi\,\omega_{\omega_2} + \frac{df}{dn_2}\,U d\varphi\,\omega_{\omega_3}\right)$$

$$\alpha_3 = -\left(\frac{df}{dn_3}\,U d\varphi\,\omega_{\omega_1} + \frac{df}{dn_2}\,U d\varphi\,\omega_{\omega_2} + \frac{df}{dn_3}\,U d\varphi\,\omega_{\omega_3}\right).$$

Wenn die Gestaltsänderung eines Körpers sich mit der Zeit ändert, wird der Vector ϱ eines Punktes P desselben eine Vectorfunction seines Anfangswerthes ω und der Zeit t sein und wir haben in diesem Falle:

$$\varrho = \varphi(\omega, t).$$

Ein Theilchen des Körpers im Innern mag ein kleiner Würfel mit den Kanten $x\,\omega_1$, $y\,\omega_2$, $z\,\omega_3$ sein, wenn es von äusseren Kräften nicht beeinflusst wird. Die Vectoren ω_1, ω_2, ω_3 seien hier drei zu einander rechtwinklige Einheitsvectoren und die Drehung um ω_1 von ω_2 nach ω_3 positiv oder rechtsläufig, ferner sind dann x, y, z drei gleiche unendlich kleine Scalare. Nach der Gestaltsänderung $\varphi(\omega, t)$ ist aus diesem Würfel ein schiefwinkliges Parallelepiped geworden. Nach dem d'Alembert'schen Princip müssen die von aussen auf ein Theilchen wirkenden Kräfte und die aus der Beschleunigung sich ergebenden mit entgegengesetzter Richtung genommenen bewegenden Kräfte desselben im Gleichgewicht sein. Dazu

ist nöthig und ausreichend, dass bei der Verlegung aller auf ein solches Theilchen wirkenden Kräfte und der mit negativem Vorzeichen genommenen bewegenden Kraft desselben nach dem Vectorenanfangspunkt O die Summe der Kraftvectoren und die Vectorsumme der Kräftepaare, welche durch diese Verlegung entstehen, verschwinde. Die Masse des Theilchens können wir durch das Product seiner Dichte s und seines Volumens $x\,y\,z\,S\,d\varphi\,\omega_{\omega_1}\,d\varphi\,\omega_{\omega_2}\,d\varphi\,\omega_{\omega_3}$ ausdrücken; da wir nur unendlich kleine Gestaltsänderungen betrachten, ist hierbei angenommen, dass die Drehung um $d\varphi\,\omega_{\omega_1}$ von $d\varphi\,\omega_{\omega_2}$ nach $d\varphi\,\omega_{\omega_3}$ positiv oder rechtsläufig sei, wie diejenige um ω_1 von ω_2 nach ω_3. Die drei erstgenannten Vectoren sind dabei nahe rechtwinklig zu einander und von der Länge eins. Die Masse eines solchen Theilchens kann dann durch $s\,x\,y\,z$ ausgedrückt werden, wenn unendlich kleine Grössen höherer Ordnung fortfallen; und seine bewegende Kraft ist $s\,x\,y\,z\,D_t^2\varrho$, wenn ϱ sein Vector ist. Haben α_1, α_2, α_3 die frühere Bedeutung, so ist der Vector der elastischen Kraft, die auf die Seitenfläche von aussen wirkt, in der die Vectoren $y\,d\varphi\,\omega_{\omega_2}$, $z\,d\varphi\,\omega_{\omega_3}$ liegen, die von der Ecke ausgehen, deren Vector ϱ ist, gleich $y\,z\,\alpha_1$, wenn unendlich kleine Grössen höherer Ordnung unberücksichtigt bleiben. Für die parallele Seitenfläche des Parallelepipeds durch den Endpunkt des Vectors $\varrho + x\,d\varphi\,\omega_{\omega_1}$ ist der Vector der von aussen auf sie wirkenden elastischen Kraft

$$-\,y\,z\,\alpha_1 - y\,z\,x\,d\,\alpha_{1\,\omega_1}$$

mit Fortlassung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung als die beibehaltenen. Entsprechend ergiebt sich für die Vectoren der elastischen Kräfte, welche von aussen auf die beiden Seitenflächen durch den Anfangs- und Endpunkt des vom Endpunkt von ϱ ausgehenden Vectors $y\,d\varphi\,\omega_{\omega_3}$ wirken, $+\,z\,x\,\alpha_2$ und $-\,z\,x\,\alpha_2 - z\,x\,y\,d\,\alpha_{2\,\omega_3}$ und für die noch übrig bleibenden Seitenflächen des Parallelepipeds finden wir die Vectoren der von aussen auf sie wirkenden elastischen Kräfte $x\,y\,\alpha_3$ und $-\,x\,y\,\alpha_3 - x\,y\,z\,d\,\alpha_{3\,\omega_3}$. Die Vectorsumme dieser elastischen Kräfte und der Kraft $-\,s\,x\,y\,z\,D_t^2\varrho$ müssen gleich Null sein und wir erhalten danach *die Gleichung für die Bewegung im Innern der elastischen Körper* in der Form:

$$s\,D_t^2\varrho = -\,d\,\alpha_{1\,\omega_1} - d\,\alpha_{2\,\omega_2} - d\,\alpha_{3\,\omega_3}.$$

Die Gleichung, welche aus der Bedingung folgt, dass die Vectorsumme der Kräftepaare Null sei, welche durch die Verlegung dieser elastischen Kräfte nach dem Vectorenanfangspunkte O entstehe, lautet:

$$V\Big\{\big(\varphi(\omega,t)+\varepsilon\big)\,s\,x\,y\,z\,D_t^2\varrho - y\,z\,\varphi(\omega,t)\,\alpha_1 + y\,z\big(\varphi(\omega,t)+x\,d\varphi(\omega,t)_{\omega_1}\big)$$
$$(\alpha_1+x\,d\alpha_{1\,\omega_1}) - z\,x\,\varphi(\omega,t)\,\alpha_2 + z\,x\big(\varphi(\omega,t)+y\,d\varphi(\omega,t)_{\omega_2}(\alpha_2+y\,d\alpha_{2\,\omega_2})\big)$$
$$- x\,y\,\varphi(\omega,t)\,\alpha_3 + x\,y\,(\varphi(\omega,t)+z\,d\varphi(\omega,t)_{\omega_3})(\alpha_3+z\,d\alpha_{3\,\omega_3})\Big\} = 0.$$

In ihr ist ε ein unendlich kleiner Vector, da es die Entfernung des Angriffspunktes der bewegenden Kraft des betrachteten Theilchens vom Endpunkt desselben mit dem Vector ϱ darstellt. Die letztere Gleichung wird nun befriedigt wegen der vorigen Gleichung und der Form der Gleichungen wegen α_1, α_2, α_3, wenn man unendlich kleine Vectoren höherer Ordnung als die der mit dem Coefficienten xyz versehenen fortlässt.

Ein Theilchen an seiner Grenze kann man sich — im allgemeinen — als ein Tetraeder vorstellen; seine drei Kanten im Innern des elastischen Körpers im Zustande ohne Gestaltsänderung seien $x\,\omega_1$, $y\,\omega_2$, $z\,\omega_3$, wenn ω_1, ω_2, ω_3 die bisherige Bedeutung haben und x, y, z drei unendlich kleine, im allgemeinen ungleiche Scalare sind, und seine Seitenfläche in der Oberfläche des Körpers sei $d\sigma$. Die Gleichung der letzteren sei

$$\omega = \psi(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \psi,$$

wie wir die Vectorfunction der beiden Scalarvariabeln $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ abkürzend bezeichnen wollen. Ein nach aussen gehender normaler Einheitsvector zu $d\sigma$ sei ν; wir können dann für ν schreiben $U\,V\,d_{\mathfrak{x}}\varphi\,\psi\,d_{\mathfrak{y}}\varphi\,\psi$, wenn die Reihenfolge der beiden Differentiale so gewählt wird, dass dieser Vector die Richtung der von $d\sigma$ nach aussen gehenden Normale hat. Nach der Gestaltsänderung werden die Kanten des Tetraeders

$$x\,d\varphi(\omega,t)_{\omega_1},\quad y\,d\varphi(\omega,t)_{\omega_2},\quad z\,d\varphi(\omega,t)_{\omega_3}.$$

Die Seitenflächen desselben im Innern sind dann

$$-d\sigma\,S\,U\,d\varphi(\omega,t)_{\omega_1}\,U\,V\,d_{\mathfrak{x}}\varphi\,\psi\,d_{\mathfrak{y}}\varphi\,\psi,$$
$$-d\sigma\,S\,U\,d\varphi(\omega,t)_{\omega_2}\,U\,V\,d_{\mathfrak{x}}\varphi\,\psi\,d_{\mathfrak{y}}\varphi\,\psi,$$
$$-d\sigma\,S\,U\,d\varphi(\omega,t)_{\omega_3}\,U\,V\,d_{\mathfrak{x}}\varphi\,\psi\,d_{\mathfrak{y}}\varphi\,\psi.$$

Die elastischen Kräfte, welche von aussen auf sie wirken, sind

$$-\alpha_1 d\sigma S U d\varphi (\omega, t)_{\omega_1} U V d_\xi^2 \varphi \psi d_\eta \varphi \psi,$$
$$-\alpha_2 d\sigma S U d\varphi (\omega, t)_{\omega_2} U V d_\xi \varphi \psi d_\eta \varphi \psi,$$
$$-\alpha_3 d\sigma S U d\varphi (\omega, t)_{\omega_3} U V d_\xi \varphi \psi d_\eta \varphi \psi;$$

hierbei sind unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als die hingeschriebenen nicht berücksichtigt. Für die Basis $d\sigma$ des Tetraeders mag der Vector der von aussen wirkenden Kraft, gerechnet für die Flächeneinheit, β sein, also die von aussen wirksame Kraft auf $d\sigma$ gleich $\beta d\sigma$ sein. Die Bedingung, dass die Vectorsumme aller dieser Kräfte und der negativ genommenen bewegenden Kraft des Tetraeders Null sein muss, ergiebt dann die Gleichung:

$$\begin{aligned} -sxyz D_t^2 \varrho &- \alpha_1 d\sigma S U d\varphi_{\omega_1} U V d_\xi \varphi \psi d_\eta \varphi \psi \\ &- \alpha_2 d\sigma S U d\varphi_{\omega_2} U V d_\xi \psi \varphi d_\eta \varphi \psi \\ &- \alpha_3 d\sigma S U d\varphi_{\omega_3} U V d_\xi \varphi \psi d_\eta \varphi \psi = -\beta d\sigma. \end{aligned}$$

Da das erste Glied der rechten Seite wegen des Factors xyz unendlich klein dritter Ordnung, die folgenden Glieder mit dem Coefficienten $d\sigma$ dagegen im allgemeinen unendlich klein zweiter Ordnung sind, erhalten wir bei Fortlassung unendlich kleiner Grössen dritter Ordnung und des gemeinsamen Factors $d\sigma$ der dann übrig bleibenden Glieder als *Gleichung für die Grenzfläche eines elastischen Körpers*:

$$\begin{aligned} \alpha_1 S U d\varphi_{\omega_1} U V d_\xi \varphi \psi d_\eta \varphi \psi + \alpha_2 S U d\varphi_{\omega_2} U V d_\xi \varphi \psi d_\eta \varphi \psi \\ + \alpha_3 S U d\varphi_{\omega_3} U V d_\xi \varphi \psi d_\eta \varphi \psi = \beta. \end{aligned}$$

Die Gleichung, welche aus der Bedingung folgt, dass die Summe der Kräftepaare verschwinden muss, welche durch die Verlegung jener Kräfte nach dem Vectorenanfangspunkte entstehen, führt auf die letzte Gleichung, wenn man in ihr nur die unendlich kleinen Glieder zweiter Ordnung berücksichtigt und ergiebt somit keine neue Bedingungsgleichung für die Grenzfläche.

Bei einer Gestaltsänderung eines elastischen Körpers ändert sich nun, im allgemeinen, die Temperatur seiner Theile, und, wenn die Art der Gestaltsänderung seiner einzelnen Theile verschieden ist, in jedem in anderer Weise. Es muss

deshalb bei variabler Gestaltsänderung während eines Zeitmomentes sich die Temperatur aus doppeltem Grunde ändern, durch Wärmeleitung, wegen des Temperaturunterschiedes eines Theilchens gegen seine Umgebung und infolge der Wärmemenge, die in ihm wegen seiner Gestaltsänderung in diesem Augenblicke entsteht oder vernichtet wird. In einem Augenblicke t und in einem Punkte P des Körpers, dessen Vector zu dieser Zeit ϱ ist, wird deshalb die Temperatur t als Scalarfunction von ϱ und t sich bestimmen lassen aus einer Gleichung von der Form:

$$t = f(\varrho, t).$$

In bekannter Weise ergiebt sich die für die Zeiteinheit gerechnete *Temperaturänderung, welche allein durch die Wärmeleitung* entsteht, *aus der Gleichung*:

$$s\,c\,D_t\,t = k_1\,d^2\,t_{\omega_1} + k_2\,d^2\,t_{\omega_2} + k_3\,d^2\,t_{\omega_3},$$

welche *für das Innere* des Körpers gilt und in der s das specifische Gewicht des Körpers, c die specifische Wärme eines Theilchens in dem Zustand bedeutet, den es zu Anfang des betrachteten Zeitelementes $d\,t$ hat; und die Vectoren ω_1, ω_2, ω_3 müssen die Richtung der drei zu einander lothrechten krystallographischen Axen des Theilchens haben, wenn es krystallinisch ist. Die Wärmeleitungsfähigkeiten in ihm nach den Richtungen von ω_1, ω_2, ω_3 sind beziehentlich k_1, k_2, k_3 in diesem Falle; ist das Theilchen als nichtkrystallinisch zu betrachten, so ist die Lage des rechtwinkligen Vectorensystems ω_1, ω_2, ω_3 in ihm eine beliebige und $k_1 = k_2 = k_3 = k$.

Der *Wärmefluss* durch ein ebenes Element durch einen Punkt P des Körpers senkrecht zu ω_1 ist $-k_1\,d\,t_{\omega_1}$ und *der Vector des Wärmeflusses von P aus nach der Richtung von* ω_1 kann der Ausdruck $-k_1\,d\,t_{\omega_1}\omega_1$ genannt werden in dem Sinne, dass *sein Tensor zur Längeneinheit in demselben Verhältniss* stehen soll, *wie die Grösse des Wärmeflusses zur Wärmeeinheit* und *sein Versor die Richtung* angiebt, *nach der er zu nehmen ist* und *senkrecht zu der das ebene Element* liegt, *dem er zugehört.* Entsprechend ist $-k_2\,d\,t_{\omega_2}$ der Wärmefluss durch ein ebenes Element durch einen Punkt senkrecht zu ω_2 und $-k_2\,d\,t_{\omega_2}\omega_2$ der zugehörige Vector des Wärmeflusses und $-k_3\,d\,t_{\omega_3}$ und $-k_3\,d\,t_{\omega_3}\omega_3$ haben die entsprechende Bedeutung für die Richtung von ω_3.

Denken wir uns im Innern des Körpers ein unendlich kleines Tetraeder mit der Spitze in P, dessen Kanten von ihr aus parallel den drei zu einander rechtwinkligen Einheitsvectoren ω_1, ω_2, ω_3 sein sollen; letztere Vectoren sollen den krystallographischen Axen in P parallel sein, wenn der Körper oder das Element von ihm um P krystallinisch sind. Die Basis dieser kleinen dreiseitigen Pyramide sei $d\sigma$ und ein Einheitsvector normal zu ihr nach aussen sei ω_n. Durch die Seitenflächen dieses Tetraeders in sein Inneres treten beziehentlich die Wärmemengen $k_1 \, d\,\mathrm{t}_{\omega_1} S\,\omega_1\,\omega_n\,d\sigma\,dt$, $k_2\,d\,\mathrm{t}_{\omega_2} S\,\omega_2\,\omega_n\,d\sigma\,dt$, $k_3\,d\,\mathrm{t}_{\omega_3} S\,\omega_3\,\omega_n\,d\sigma\,dt$ während des Zeitmomentes dt. Durch die Basis $d\sigma$ mag in derselben Zeit die Menge $w_n\,d\sigma\,dt$ von innen nach aussen, also in der Richtung von ω_n, hindurchgehen. Die Grösse w_n kann der *Wärmefluss nach der Richtung von ω_n im Punkte P* genannt werden, denn wenn das Volumen des Tetraeders im Grenzfall verschwindend wird, fällt $d\sigma$ in diesen Punkt. Die Zunahme der Wärme im Tetraeder während des Zeitraumes dt ist also

$$\{k_1\,d\,\mathrm{t}_{\omega_1} S\,\omega_1\,\omega_n + k_2\,d\,\mathrm{t}_{\omega_2} S\,\omega_2\,\omega_n + k_3\,d\,\mathrm{t}_{\omega_3} S\,\omega_3\,\omega_n - w_n\}\,d\sigma\,dt.$$

Haben nun s und c die vorige Bedeutung und ist dv das Volumen des Tetraeders, folglich eine unendlich kleine Grösse dritter Ordnung, so lässt sich dieselbe Zunahme der Wärme auch durch $s\,c\,D_t\,t\,dt\,dv$ ausdrücken. Setzt man die beiden für sie erhaltenen Ausdrücke gleich und vernachlässigt unendlich kleine Grössen dritter Ordnung, so folgt nach Fortlassung von $d\sigma\,dt$:

$$w_n = k_1\,d\,\mathrm{t}_{\omega_1} S\,\omega_1\,\omega_n + k_2\,d\,\mathrm{t}_{\omega_2} S\,\omega_2\,\omega_n + k_3\,d\,\mathrm{t}_{\omega_3} S\,\omega_3\,\omega_n.$$

Diese Gleichung gestattet den *Wärmefluss nach einer gegebenen Richtung* für eine bestimmte Vertheilung der Temperatur im Körper anzugeben, wenn er nach den Richtungen dreier bestimmten zu einander rechtwinkligen Vectoren vom betrachteten Punkte des Körpers aus bekannt ist.

Es ist dann $w_n\,\omega_n$ oder $\varkappa_n$ der *Vector des Wärmeflusses von P aus nach der Richtung von ω_n für die gegebene Vertheilung der Temperatur.* Denken wir uns von einem Punkte des Körpers aus die Vectoren des Wärmeflusses nach allen möglichen Richtungen für eine gegebene Temperaturvertheilung in ihm, so bilden ihre Endpunkte die Fläche der Vectoren

des Wärmeflusses für den betreffenden Punkt und die zugehörende Temperaturvertheilung.

Wir wollen uns jetzt eine Vertheilung der Temperatur denken, bei der die Temperatur gegeben ist durch die Gleichung

$$t = S\frac{\omega}{\omega_n}.$$

Sie ist dann in jedem Punkte unveränderlich mit der Zeit und in allen Theilen irgend einer Ebene senkrecht zu ω_n dieselbe. Der Wärmefluss nach der Richtung von ω_n im Punkte P oder w_n ist, in diesem Falle, unmittelbar aus der gegebenen Temperaturvertheilung bestimmbar in der Form

$$-k_n d\left(S\frac{\omega}{\omega_n}\right)_{\omega_n} \text{ oder } -k_n,$$

wenn k_n die Wärmeleitungsfähigkeit im Punkte P des Körpers nach der Richtung ω_n bezeichnet. Die vorige Gleichung zur Bestimmung von w_n führt mit diesem Ausdrucke für w_n zur Gleichung:

$$k_n = k_1[S\omega_1\omega_n]^2 + k_2[S\omega_2\omega_n]^2 + k_3[S\omega_3\omega_n]^2.$$

Sie lehrt *die Leitungsfähigkeit des Körpers für Wärme* in einem Punkte eines Körpers *nach irgend einer Richtung* berechnen *aus den Leitungsfähigkeiten nach der Richtung der krystallographischen Axen* in diesem Punkte.

In unmittelbarer Nähe der Oberfläche sei als Theilchen des Körpers ein unendlich kleines Tetraeder gedacht, dessen Basis $d\sigma$ in der Grenzfläche des Körpers liegt und dessen im Körper liegende Kanten $x\,d\varphi(\omega,t)_{\omega_1}$, $y\,d\varphi(\omega,t)_{\omega_2}$, $z\,d\varphi(\omega,t)_{\omega_3}$ seien, die nahezu rechtwinklig zu einander sind, da nur unendlich kleine Gestaltsänderungen hier betrachtet werden.

In ähnlicher Weise wie bei der Untersuchung der auf ein Oberflächentheilchen wirkenden elastischen Kräfte und mit demselben Grade der Annäherung ergiebt sich dann *für die Oberfläche eines Körpers die Bedingungsgleichung der Temperatur* in der Form:

$$\begin{aligned} k'(t-t') = {} & k_1\,d\,t_{\omega_1} S\,U\,d\varphi_{\omega_1} U\,V\,dx\,\varphi\,\psi\,d_y\varphi\,\psi \\ & + k_2\,d\,t_{\omega_2} S\,U\,d\varphi_{\omega_2} U\,V\,d_x\varphi\,\psi\,d_y\varphi\,\psi \\ & + k_3\,d\,t_{\omega_3} S\,U\,d\varphi_{\omega_3} U\,V\,d_x\varphi\,\psi\,d_y\varphi\,\psi, \end{aligned}$$

in welcher k' *der Index der äusseren Wärmeleitungsfähigkeit* ist, der im allgemeinen von der Lage des Oberflächenelementes $d\sigma$

der sich berührenden Körper zu den krystallographischen Axen derselben und von ihrer Natur abhängen wird, t′ die Temperatur des dem Element $d\sigma$ anliegenden Theils des berührenden Körpers und t die Temperatur von $d\sigma$ ist, während die übrigen Zeichen die frühere Bedeutung haben.

Es ändert sich jedoch dann die Bedingung für die Oberfläche, wenn der Körper sich so bewegt, dass an seiner Oberfläche *Reibung* eintritt. Bezeichnen wir den im Element $d\sigma$ der Oberfläche durch Reibung erzeugten und in Arbeitsmaass gemessenen Betrag an Wärme gerechnet für die Flächen- und Zeiteinheit mit w_r, so wird *in diesem Falle die Grenzgleichung der Temperatur*:

$$\begin{aligned} k'(\mathrm{t} - \mathrm{t}') + w_r = {} & k_1 \, d\,\mathrm{t}_{\omega_1} S U d\varphi_{\omega_1} U V d_\xi \varphi \psi d_\eta \varphi \psi \\ & + k_2 \, d\,\mathrm{t}_{\omega_2} S U d\varphi_{\omega_2} U V d_\xi \varphi \psi d_\eta \varphi \psi \\ & + k_3 \, d\,\mathrm{t}_{\omega_3} S U d\varphi_{\omega_3} U V d_\xi \varphi \psi d_\eta \varphi \psi . \end{aligned}$$

Die Grösse w_r hängt von den elastischen Kräften ab, welche auf $d\sigma$ von innen und aussen wirken und von der Beschaffenheit der sich berührenden Körpertheile und ist als eine Function der Zeit und des Vectors von $d\sigma$ anzusehen.

Es muss nun noch der Einfluss derjenigen Wärmemenge auf die Temperaturänderung eines Theilchens bei variabler Gestaltsänderung des Körpers berücksichtigt werden, die durch die letztere erzeugt wird. Diese Wärmemenge gerechnet für die Zeit- und Volumeneinheit sei $w_{\varphi(\omega, t)}$ oder abgekürzt bezeichnet w_φ. Die *Gleichung zur Bestimmung der Temperatur* lautet *für das Innere des Körpers bei einer Gestaltsänderung* $\varphi(\omega, t)$ desselben:

$$s\,c\,D_t \mathrm{t} = k_1 \, d^2 \mathrm{t}_{\omega_1} + k_2 \, d^2 \mathrm{t}_{\omega_2} + k_3 \, d^2 \mathrm{t}_{\omega_3} + w_{\varphi(\omega, t)},$$

in welcher die Bedeutung der Zeichen und die Richtung der Vectoren ω_1, ω_2, ω_3 die früher angegebene ist.

Die *Grenzgleichung der Temperatur* bleibt im vorliegenden Falle *dieselbe*, wie sie ohne Berücksichtigung der durch Gestaltsänderung erzeugten Wärme zuvor hergeleitet ward, weil das wegen dieser Wärme zur vorigen Gleichung hinzutretende Glied $w_\varphi \frac{1}{6} x y z d t$ unendlich klein höherer Ordnung ist, als die übrigen Glieder derselben.

Berlin, den 8. April 1895.

7. *Zur Kenntniss der Polarisationscapacität des Quecksilbers; von Willy Lietzau.*

(Hierzu Tafel III Fig. 26—28.)

§ 1. Bestimmungen der galvanischen Polarisationscapacität liegen vor hauptsächlich von Varley, F. Kohlrausch, Lippmann, Wietlisbach, Blondlot, Oberbeck, Bouty.

Varley[1]) suchte die Electricitätsmenge zu bestimmen, welche eine Zelle von bekannter Polarisation bei der Entladung liefern kann (Entladungsversuch).

Blondlot[2]) maass die Electricitätsmenge, welche, durch eine ursprünglich ladungslose Zelle geschickt, dieser eine bestimmte electromotorische Kraft ertheilt (Ladungsversuch).

R. Krüger[3]) schaltete die zu polarisirende Zelle in den Kreis einer galvanischen Batterie und eines Galvanometers ein und maass den ersten Ausschlag des letzteren bei Schluss des polarisirenden Stromes, sowie den übrig bleibenden, nahezu constanten Reststrom. Der Versuch ist also auch ein Ladungsversuch, er wurde verwendet um die Capacität von Platin- und Silberelectroden in verschiedenen Salzlösungen zu messen.

Bouty[4]) stellte sowohl Ladungs- als auch Entladungsversuche an. Seine Versuche unterscheiden sich hauptsächlich dadurch von den Blondlot'schen, dass die Ladungsdauer sowohl wie die Entladungsdauer bei ihm mehrere Secunden betrug, während die Ladungen bei den Blondlot'schen Versuchen sich in einem Bruchtheil einer Secunde vollzogen.

F. Kohlrausch[5]), Wietlisbach[6]) und Oberbeck[7]) bestimmten die Capacität durch ihren Einfluss auf den Verlauf von Wechselströmen.

1) C. F. Varley, Proc. Roy. Soc. of London. 1871.

2) Blondlot, Thèse de docteur. Abgedruckt im Journ. de Phys. (1) **10.** p. 277. 1881.

3) R. Krüger, Inaug.-Diss. Greifswald 1889. Beibl. **14.** p. 1638.

4) E. Bouty, Ann. chim. et phys. (6) **3.** p. 145. 1894.

5) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. **148.** p. 143. 1873.

6) V. Wietlisbach, Berl. Ber. 1879. p. 278—283. Diss. Zürich. 1879.

7) A. Oberbeck, Wied. Ann. **19.** p. 625. 1883; **21.** p. 139. 1884.

Endlich ermittelte Lippmann[1]) unter der Voraussetzung der Umkehrbarkeit des Polarisationsvorganges die Capacität für Quecksilber auf indirectem theoretischem Wege aus den Curven, welche die Oberflächenspannung als Function der Polarisation darstellen. Berechnungen nach demselben Princip sind für Quecksilber von Bouty[2]) ausgeführt.

Dagegen liegen directe Bestimmungen über die Polarisationscapacität des Quecksilbers nicht vor, wenn man von einem gelegentlichen Versuch Bouty's[3]), dessen Methode für Quecksilber der grossen Depolarisationsgeschwindigkeit halber nicht gut passt, absieht. Es ist der Zweck dieser Arbeit, welche vor dem Erscheinen der Bouty'schen begonnen wurde, einige Beiträge zur Ausfüllung dieser Lücke zu liefern.

§ 2. Aus dem oben angeführten Grunde musste eine kurze Versuchsdauer gewählt werden; es lag ferner in dem Plan, dass mit derselben Zelle jedesmal Ladungs- und Entladungsversuche gemacht werden sollten.

Nach diesen Gesichtspunkten wurde mir folgende Methode von Hrn. Prof. Warburg vorgeschlagen:

1. Ladungsversuch:

Ein Condensator von der Capacität C wird zur Potentialdifferenz V geladen und durch ein ballistisches Galvanometer entladen. Sei Q die von diesem angegebene Electricitätsmenge, so ist

$$Q = C.V. \tag{1}$$

Hierauf wird der Condensator wieder zur Potentialdifferenz V geladen, durch die zu untersuchende Zelle zur Erde theilweise entladen, und darauf der im Condensator zurückgebliebene Rest Q_1 durch das ballistische Galvanometer gemessen.

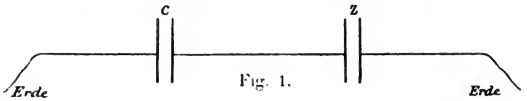


Fig. 1.

Während die innere Belegung des Condensators mit dem einen Pol der Zelle in Verbindung ist, gleichen sich die Poten-

1) G. Lippmann, Ann. chim. et phys. (5) 5. p. 515. 1875.
2) E. Bouty, l. c. p. 179.
3) E. Bouty, l. c. p. 198.

tialwerthe der inneren Condensatorbelegung und des mit dieser verbundenen Zellenpoles zu dem gemeinschaftlichen Werthe V_1 aus, für welchen man hat:

(2) $$Q_1 = C V_1 .$$

Indem die Electricitätsmenge $Q - Q_1$ durch die Zelle geschickt wurde, ertheilte sie dieser die electromotorische Kraft V_1. Setzen wir

(3) $$Q - Q_1 = x V_1 ,$$

so heisse x die mittlere scheinbare Ladungscapacität der Zelle zwischen den electromotorischen Kräften V und V_1. Es ist nach (1), (2) und (3)

(4) $$x = C \frac{Q - Q_1}{Q_1} \qquad V_1 = V \frac{Q_1}{Q} .$$

2. Entladungsversuch:

Ein Condensator von der Capacität C werde zur Potentialdifferenz V geladen und durch das ballistische Galvanometer entladen. Ist Q die von diesem angegebene Electricitätsmenge, so ist

(5) $$Q = C V.$$

Nunmehr wird die Zelle zur Potentialdifferenz V geladen und durch den Condensator theilweise zur Erde entladen (Fig. 1); darauf die in den Condensator hineingegangene Electricitätsmenge am ballistischen Galvanometer gemessen (Q_{11}). Während der eine Zellenpol mit der inneren Condensatorbelegung verbunden war, glichen sich die Potentialwerthe beider zu einem gemeinschaftlichen Werth V_{11} aus, und es ist:

(6) $$Q_{11} = C V_{11} .$$

Indem die Zelle die Ladung Q_{11} verlor, sank ihre electromotorische Kraft von V auf V_{11}. Setzt man

(7) $$Q_{11} = x' (V - V_{11}) ,$$

so heisse x' die mittlere scheinbare Entladungscapacität zwischen den Potentialwerthen V und V_{11} und es ist

(8) $$x' = C \frac{Q_{11}}{Q - Q_{11}} \qquad V_{11} = V . \frac{Q_{11}}{Q} .$$

§ 3. Ausführung der Versuche.

1. Ladungsversuch. Ein Tudoraccumulator (Messelement) von bekannter electromotorischer Kraft e wird durch einen

Widerstandskasten geschlossen, aus welchem der Widerstand R eingeschaltet sei. Die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten von R, welche den Widerstand r zwischen sich fassen, ist $e \cdot r / R$. Diese regulirbare Potentialdifferenz ist die in Gleichung (1) mit V bezeichnete. Zur Ausführung des Ladungsversuchs construirte ich die Wippe Fig. 26. Dieselbe arbeitet zwischen Quecksilbergruben und Platincontacten, die beiden Ruhestellungen der Wippe mögen durch *I* und *II* bezeichnet werden, die Drehpunkte liegen in den Gruben 5 und 6. Bei *I* ruht die Wippe auf den Quecksilbergruben 1—6, bei *II* (Fig. 26) auf den Gruben 5—8. Mit 1 und 2 sind zwei Punkte des Hauptstromkreises verbunden, welche durch die Wippe in der Stellung *I* überbrückt werden; mit 3 und 4 Drähte, welche zu den Enden des Widerstandes r führen, zwischen denen also die Potentialdifferenz V besteht. Mit 5 und 6 sind die Belegungen des Condensators, mit 7 und 8 die Klemmen des Galvanometers verbunden. In der Stellung *I* wird demnach der Condensator geladen, in der Stellung *II* wird er in das Galvanometer entladen. (Bestimmung von Q.)

Die Electroden der Zelle sind zunächst mit den Gruben α und β in einem besonderen Paraffinklotze verbunden. Erst wenn Q_1 bestimmt werden soll, wird α und β beziehungsweise mit γ und δ verbunden, wodurch die Pole der Zelle an die Metallstücke *A* und *B* angelegt werden. Wird jetzt die Wippe aus der Stellung *I* in *II* übergeführt, so lädt sich zunächst, wie im vorigen Fall, der Condensator zur Potentialdifferenz V; darauf stellen, nachdem die Wippe 3 und 4 verlassen hat, Schleifkontakte, deren eine Enden dauernd mit 5 und 6 verbunden sind, während kurzer Zeit die Verbindung zwischen 5 und *A* und 6 und *B* her, wobei der Condensator in die Zelle hinein entladen wird.

Gelangt alsdann die Wippe in die Stellung *II*, so wird wieder der Condensator durch das Galvanometer entladen (Bestimmung von Q_1). Mittels der Quecksilbergruben 9 und 10, 11 und 12 wird die Zelle in den Ruhestellungen *I* und *II* kurz geschlossen. Die Wippe wird durch ein fallendes Gewicht, in der Figur mit *G* bezeichnet, bewegt. Die Dauer des Versuchs ist aus der Fallzeit des Gewichts auf 0,1 sec. zu schätzen.

2. Entladungsversuch.

Die Metallstücke 1—10 (Fig. 27) sind auf einer Ebonitplatte montirt. Zwischen den ungerade und gerade bezifferten Metallstücken, welche innen mit Platincontacten versehen sind, läuft ein Schlitten S aus Ebonit mit 2 voneinander isolirten, gleichfalls mit Platincontacten versehenen Federn F. Mit 1 und 2 sind die Enden von r, mit 3 und 4 die Pole der Zelle, mit 5 und 6 die Belegungen des Condensators, mit 7 und 8 die Klemmen des Galvanometers, mit 9 und 10 wiederum die Pole der Zelle dauernd verbunden. Zur Bestimmung von Q werden die Quecksilbergruben α und γ, β und δ in der besonderen Paraffinplatte A miteinander verbunden und dadurch, wie aus der Figur ersichtlich ist, Contact zwischen 1 und 3 sowie zwischen 2 und 4 hergestellt, mithin die Potentialdifferenz V an die Zelle angelegt. Kommt der Schlitten aus der Anfangsstellung I, in welcher die Federn F auf 1 und 3 beziehungsweise 2 und 4 schleifen, in die in der Figur gezeichnete Lage, so wird die Potentialdifferenz V an den Condensator angelegt; weiter laufend entlädt der Schlitten, 5 mit 7 und 6 mit 8 verbindend, den geladenen Condensator in das Galvanometer und schliesst gleichzeitig die Zelle durch die Contacte 9 und 10 kurz (Bestimmung von Q). Zur Bestimmung von Q_{11} werden die Verbindungen zwischen α und γ sowie zwischen β und δ aufgehoben und dadurch 1 von 3 und 2 von 4 isolirt. In der Ruhestellung I lädt der Schlitten, 1 mit 3 und 2 mit 4 verbindend, die Zelle zur electromotorischen Kraft V_1 entlädt sie demnächst in seinem weiteren Lauf, 3 mit 5 und 4 mit 6 verbindend in den Condensator und diesen schliesslich wie vorher in das Galvanometer. Auch hier wurde der Schlitten durch ein fallendes Gewicht G bewegt und konnte die Dauer des Versuchs aus der Fallzeit des Gewichtes auf 0,14 sec. geschätzt werden.

Sämmtliche Drähte der Wippe sowohl als des Schleifcontactes endigten in einem Umschalter, durch welchen die Verbindungen mit den entsprechenden Apparaten hergestellt wurden. Es war hierdurch ermöglicht, beliebig Ladungs- oder Entladungsversuche anzustellen.

Bei allen diesen Versuchen wurde der Condensator C aus Elliott'schen Glimmercondensatoren gebildet, welche 0,05 bis

1 mf. einzuschalten erlaubten. Es standen schliesslich zwei derartige Condensatoren zur Verfügung. Das Galvanometer war ein Elliott'sches, Thomson'scher Construction. 1 mf. zu 0,2 V geladen brachte bei der Entladung durch dasselbe einen Ausschlag von ungefähr 192 Skalentheilen hervor.

§ 4. Für die Versuchsmethode ist es von Interesse zu wissen, in welcher Zeit der Ausgleich des Potentials zwischen Condensatorbelegung und Zellenpol erfolgt. Diese Zeit kann theoretisch bestimmt werden. Man denke sich die Zelle durch einen Condensator von der Capacität C_2 ersetzt, und es möge die Capacität des ersten Condensators (C in Fig. 1) durch C_1 bezeichnet werden. Da die Verbindung zwischen Zelle und Condensator durch kurze gerade Leiter hergestellt wurde, so kann man die Selbstinduction vernachlässigen. Bezeichnet man unter dieser Voraussetzung die Ladungen von 1 und 2 mit Q_1 resp. Q_2, den galvanischen Widerstand des 1 und 2 verbindenden Leiters, in welchen bei den Versuchen mit der Zelle deren Widerstand mit einzurechnen ist, durch w, und setzt $Q = Q_1 + Q_2$, so ist:

$$w\frac{dQ_1}{dt} + Q_1\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \frac{Q}{C_2},$$

daraus folgt

$$Q_1 = Q_1{}^0 e^{-\frac{t}{\Theta}} + Q\frac{C_1}{C_1 + C_2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\Theta}}\right),$$

worin

$$\Theta = cw$$

$$c = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

und $Q_1{}^0$ die Anfangsladung von 1 bedeutet. Nach 4,6 . Θ Sec. haben die Condensatoren ihre definitiven Ladungen bis auf weniger als 1 Proc. derselben angenommen. Setzt man $w = 100\,\Omega = 10^{11}$, $C_1 = C_2 = 1$ mf. $= 10^{-15}$, so wird $\Theta = 0{,}5 \,.\, 10^{-4}$ Sec. Wächst, während immer $C_1 = 1$ mf., C_2 bis Unendlich, so nähert sich Θ dem Werth 10^{-4} Sec. Der ganze Weg der Wippe oder des Schlittens nahm nach § 3 0,1 resp. 0,14 Sec. in Anspruch.

§ 5. Zur Prüfung der Methode wurde die Zelle durch einen Condensator (mf.) von der Capacität x ersetzt, welchen Hr. Prof. Lehmann in Karlsruhe freundlichst zur Ver-

fügung stellte. Wurde der Elliott'sche Condensator als richtig angenommen, so ergab sich aus der Messung der Ladungen, welche durch dieselbe Potentialdifferenz den Condensatoren C und x ertheilt wurde, $x = 0{,}994$ mf. Es wurde nun x nach der Methode des § 3 gemessen, indem V und C variirt wurden. Es ergab sich

C in mf.	V in Volt	Q	Q_1	x
1,0	0,2	192	98	0,960
0,5	0,4	193	66,7	0,945
0,25	0,5	120,6	25,8	0,918

Wie man sieht, ergiebt sich x fehlerhaft um 4—8 Proc. Als der die Condensatoren verbindende kurze Draht von 0,023 Ω Widerstand durch eine Widerstandsrolle von 10,95 Ω ersetzt wurde, wodurch die Ladungszeit um mehr als das 450fache wuchs, ergaben sich dieselben Werthe und mancherlei Controllversuche ergaben, dass die Wippe richtig functionirte und überhaupt Versuchsfehler nicht im Spiel waren.

§ 6. Es schienen nun die Abweichungen zwischen dem wahren Werth von x und dem Werthe, welchen die angewandte Methode für diese Grösse lieferte, durch den electrischen Rückstand erklärt werden zu können. Wenn nämlich der Condensator C in x hinein entladen und dadurch in C das Potential von V auf V_1 herabgesetzt wird, so wird alsbald in C ein Rückstand R zum Vorschein kommen, welcher in das Galvanometer hinein mit entladen wird. Trägt man diesem Umstande Rechnung und bezeichnet immer durch Q_1 die vom ballistischen Galvanometer angegebene Ladung, so ist in den Formeln 2—4 $Q_1 - R$ für Q_1 zu setzen, so dass man erhält

$$\left\{\begin{aligned} Q &= CV \\ Q_1 - R &= CV_1 \\ Q - (Q_1 - R) &= x \,.\, V_1 \end{aligned}\right. \tag{10}$$

woraus

$$x = C\frac{Q - (Q_1 - R)}{Q_1 - R}. \tag{11}$$

Den Rückstand R setzen wir

$$R = \varrho C(V - V_1), \tag{12}$$

wo ϱ eine Constante bedeutet. Aus (12) folgt mittels (10)

$$R = \frac{\varrho}{1-\varrho}(Q - Q_1); \qquad Q_1 - R = \frac{Q_1 - \varrho Q}{1-\varrho};$$

damit wird

$$\text{(4a)} \qquad \begin{cases} x = C\dfrac{Q - Q_1}{Q_1 - \varrho Q} \\ V_1 = V\dfrac{Q_1 - \varrho Q}{Q(1-\varrho)} \\ \varrho = \dfrac{Q_1(1+\delta) - Q}{Q \cdot \delta} \end{cases}$$

wo $(x/C) = \delta$ gesetzt ist.

Um die gemachte Annahme zu prüfen, wurde zunächst aus den drei oben mitgetheilten Versuchen ϱ berechnet, welches sich constant ergeben sollte.

Man erhält die Werthe:

0,021; 0,018; 0,017.

Das Mittel ist 0,019. Berechnet man mittels dieses Werthes x, so erhält man folgende Zusammenstellung:

$\varrho = 0{,}019 \qquad x = 0{,}994$

C	V	Q	Q_1	ϱQ	x	Δ
1	0,2	192	98	3,6	0,996	+0,002
0,5	0,4	193	66,7	3,7	1,002	+0,008
0,25	0,5	120,6	25,8	2,3	1,001	+0,007

Die Abweichungen Δ der berechneten Werthe x von dem wahren Werthe belaufen sich nur auf 2—8 pro Mille. Die aus dem Rückstand sich ergebende Correction wird procentisch um so grösser, je grösser Q/Q_1 ist, dessen genäherter Werth $x/C + 1$ ist. Man wird also, um die immerhin unsichere Correction möglichst klein zu machen, C möglichst gross im Verhältniss zu x machen, eine Forderung, der allerdings nicht immer in der wünschenswerthen Weise Rechnung getragen werden konnte, da die zu messenden Polarisationscapacitäten ziemlich gross waren und für C keine grössere Capacität als 2 mf. zur Verfügung stand.

Auch den Entladungsversuch wird die Rückstandsbildung beeinflussen, indem, wenn der Condensator C durch die Zelle

zum Potential V_{11} geladen wird, alsbald ein Rückstand $R = \varrho C V_{11}$ sich bildet, welcher dem Galvanometer verloren geht.

Bezeichnet man wieder durch Q_{11} die vom ballistischen Galvanometer angegebene Ladung, so treten an die Stelle der Gleichungen (5) bis (7) die neuen

$$Q = CV; \quad Q_{11} + R = CV_{11}$$
$$x'.(V - V_{11}) = Q_{11} + R.$$

An Stelle der Gleichungen (8) treten:

$$(8a) \qquad x' = C\frac{Q_{11}}{Q - Q_{11} - Q.\varrho}, \qquad \frac{V_{11}}{V} = \frac{Q_{11}}{Q(1-\varrho)}.$$

Nach den Gleichungen (4a) und (8a) wurden die folgenden Versuche berechnet.

§ 7. Zunächst theile ich einige nach der besprochenen Methode angestellte Versuche über Polarisationscapacitäten mit, welche schon von anderen Beobachtern nach anderen Methoden bestimmt sind und zwar zunächst einige Versuche über die von Bouty gemessene Capacität von Platinelectroden in Natriumnitrat.

In eine Krystallisationsschale von 15 cm Durchmesser wurde eine Platinplatte von ungefähr 6600 qmm einfacher Oberfläche gelegt und dieser als kleine Electrode ein Platindraht 7,65 mm lang, 0,41 mm dick, von 10 qmm Oberfläche in ungefähr 1 cm Entfernung gegenübergestellt. Dann ist nach Lippmann und Blondlot die Polarisation der grossen Electrode zu vernachlässigen und man erhält die der kleinen Electrode entsprechende Capacität. Den Entladungsversuch betreffend bemerke ich, dass mit zunehmender Dauer des polarisirenden Stromes die scheinbare Entladungscapacität zunächst zunimmt, dass aber von etwa 2 sec ab eine weitere Zunahme der Dauer des polarisirenden Stromes keinen Einfluss mehr hat. So erhielt ich, wenn t die Dauer des polarisirenden Stromes bedeutet, folgende Werthe für Q_{11}.

	t	sehr klein	1 sec	2 sec	3 sec	4 sec
$V = 0{,}05$ V. $C = 2$ mf.	Q_{11}	36	43	45	46	46
$V = 0{,}1$ V. $C = 2$ mf.	Q_{11}	75	90	95	95	95

Bei den folgenden Versuchen wurde t nie kleiner als 2 sec gewählt (vgl. § 10).

Die sämmtlichen Versuche wurden mit verschiedenen Werthen von V und C gemacht, und zwar so, dass man mit den kleinsten Werthen von V beginnend zu den grössten hinaufging und dann wieder in derselben Reihenfolge zu den kleinsten hinabging. Die Versuchsergebnisse sind in der folgenden Tabelle enthalten. Die Versuche wurden 14 Stunden nach Ansetzen der Zelle gemacht, da zuerst die Capacität mit der Zeit stark veränderlich ist.[1]) Es werde die Polarisation kathodisch oder anodisch genannt, je nachdem die kleine Electrode für den polarisirenden Strom Kathode oder Anode war.

Tabelle I.

$NaNO_3$, 0,2 g-Aeq. im Liter, Pt-Electroden, $s = 10$ qmm, $S = 6600$ qmm. Kathodische Polarisation.

V	C	Ladung		Entladung	
		Q	Q_1	Q	Q_{11}
0,05	2,0	96	48,5	95	40
0,1	2,0	193,5	97,5	191,5	83
0,2	1,0	193,5	67	191,5	116,5
0,4	0,5	193,5	40	191,5	133
0,5	0,4	193,5	33	191,5	132
0,4	0,5	193,5	40,5	191,5	134
0,2	1,0	193,5	67	191,5	116
0,1	2,0	193,5	97	191,5	83
0,05	2,0	96	48,5	95	41

Wie man sieht, stimmen die Zahlen, welche unter gleichen Bedingungen erhalten wurden, hinreichend überein, woraus hervorgeht, dass im Laufe der Versuchsreihe die Zelle ihre Beschaffenheit nicht merklich geändert hat. In nachstehender Tabelle sind die Mittelwerthe verzeichnet, und es sind die Capacitäten nach den Formeln (4a) und (8a) des § 6 berechnet, indem $\varrho = 0{,}019$ gesetzt ward. Mit x_1 ist die Capacität pro Quadratcentimeter bezeichnet.

Bei den Ladungsversuchen wurde nach Tabelle II der Zelle eine electromotorische Kraft V_1 von 0,025 bis 0,077 Volt ertheilt. Bezeichnet man die Capacität x für ein sehr

1) Bouty l. c. p. 202.

kleines V_1, Blondlot folgend, als die scheinbare Ladungsinitialcapacität, so werden die beobachteten Ladungscapacitäten etwa dieser entsprechen. Nach Blondlot nimmt die vom Einfluss der Depolarisation befreite Capacität mit wachsender electromotorischer Kraft für Platin zu; doch finden sich bei Blondlot keine Angaben darüber, von welchem Werthe der Polarisation an die Capacität anfängt, sich merklich von der Initialcapacität zu entfernen.

Tabelle II.

$NaNO_3$, 0,2 g-Aeq. im Liter, Pt-Electroden, s = 10 qmm, S = 6600 qmm. Kathodische Polarisation.

V	C	Ladung					Entladung				
		Q	Q_1	x	x_1	V_1	Q	Q_{11}	x'	x_1'	V_{11}
0,05	2,0	96	48,5	2,02	20,2	0,025	95	40,5	1,54	15,4	0,022
0,1	2,0	193,5	97,3	2,06	20,6	0,049	191,5	83	1,58	15,8	0,044
0,2	1,0	193,5	67	2,00	20,0	0,067	191,5	116,3	1,62	16,2	0,124
0,4	0,5	193,5	40,3	2,10	21,0	0,077	191,5	133,5	1,23	12,3	0,284
0,5	0,4	193,5	33	2,19	21,9	0,070	191,5	132	0,98	9,8	0,352

Die Entladungsversuche liefern kleinere Capacitäten als die Ladungsversuche, besonders kleine, wenn die Zelle zu höherer electromotorischer Kraft (0,4—0,5 Volt) polarisirt wird. Die Ursache hiervon liegt jedenfalls zum Theil darin, dass die electromotorische Kraft einer polarisirten Zelle, deren Pole isolirt sind, durch nicht umkehrbare Vorgänge an den Electroden abnimmt, ein Vorgang, welchen wir nach Blondlot als freiwillige Depolarisation bezeichnen wollen (Dépolarisation spontanée). Dieser Vorgang wird die Capacitätsbestimmungen in derselben Weise beeinflussen, wie eine schwache Leitung der isolirenden Zwischenschicht eines Condensators die Capacitätsbestimmung des letzteren, d. h. die Capacität wird beim Ladungsversuch grösser erscheinen müssen als beim Entladungsversuch.

Um ein Urtheil über die Schnelligkeit der freiwilligen Depolarisation zu gewinnen, wurde beim Entladungsversuch der Werth Q_{11} bestimmt, indem man nach Loslösung der Zelle von der polarisirenden Kraft bis zur Entladung in den Condensator kürzere oder längere Zeit t verstreichen liess. So ergab sich:

V in Volt	0,05	0,1	0,2	0,4	0,5
Q_{11} für $t = 1''$	50	99	128	117	118
Q_{11} „ $t = 2''$	48	98	118	91	95

Diese Zahlen zeigen, dass entsprechend den Ergebnissen für die Entladungscapacität die freiwillige Depolarisation in den ersten Secunden für $V = 0{,}05$ bis 0,1 Volt nicht bedeutend ist, für $V = 0{,}4$ und 0,5 Volt erheblich wird.

Auch eine dem Condensatorrückstand entsprechende Erscheinung zeigt sich bei der polarisirten Zelle, was für einige Fälle schon lange bekannt ist, für andere Fälle von Bouty neuerdings gezeigt wurde. Von dieser Erscheinung sowie auch von der freiwilligen Depolarisation gibt die Anschauungsweise, nach welcher der Polarisationsstrom ein electrische Zersetzungsproducte liefernder Leitungsstrom ist, in einfacher Weise Rechenschaft. Ohne darauf hier einzugehen, bemerken wir, dass auch die Rückstandsbildung die Ladungscapacität grösser erscheinen lässt als die Entladungscapacität.

Nun vollziehen sich sowohl freiwillige Depolarisation wie Rückstandsbildung in je nach Umständen mehr oder weniger langer Zeit, während man die Ladungs- und Entladungszeiten jedenfalls sehr klein machen kann. Man kann daher von der wahren Capacität der Zelle reden als derjenigen, welche der Versuch in dem Falle liefern würde, dass während der Ladungs- und Entladungszeiten freiwillige Depolarisation und Rückstandsbildung zu vernachlässigen sind, welche er, kurz gesagt, für unendlich kleine Ladungs- und Entladungszeiten liefern würde. Macht man nun die weitere Voraussetzung, dass die Polarisation ein umkehrbarer Process ist, so kommt man zu dem Schluss, dass die wahre Capacität zwischen der scheinbaren Ladungs- und Entladungscapacität liegt, wenn diese für dieselben Werthe der electromotorischen Kraft bestimmt ist. Bei der Angabe dieser Grenzen sind in Folgendem nur die Resultate berücksichtigt worden, welche mit Condensatorcapacitäten von 1—2 mf. erhalten wurden, theils weil für diese Fälle die Zellenpotentiale V_1 und V_{11} am kleinsten sind, besonders aber deshalb, weil nach § 6 die Versuche mit kleinen Condensatorcapacitäten unzuverlässige Werthe geben.

Bei den Entladungsversuchen wurden, wenn eine entschiedene, auf der freiwilligen Depolarisation beruhende Abnahme der scheinbaren Capacität mit wachsendem V zu Tage trat, nur die den kleinsten V-Werthen entsprechende Capacität berücksichtigt. Die Werthe von x_1 und x', welche bei der Angabe der Grenzen unberücksichtigt blieben, sind in den Tabellen jedesmal durch einen Strich von den übrigen getrennt. Demnach führen die Ergebnisse der Tabelle II zu dem Schlusse, dass die wahre Initialcapacität für Platin in wässeriger Lösung von $NaNO_3$, 0,2 g-Aeq. im Liter, zwischen 15,8 und 20,4 mf./qcm liegt.

Eine ähnliche Versuchsreihe wurde mit einer anderen Platinelectrode angestellt; die folgende Tabelle, in welcher nur die Endwerthe x_1, x_1', V_1, V_{11} aufgenommen sind, enthält die Ergebnisse:

Tabelle III.

$NaNO_3$, 0,2 g-Aeq. im Liter, Pt-Electroden, $s = 7{,}67$ qmm, $S = 2700$ qmm. Kathodische Polarisation; 16 Stunden nach Ansetzen.

V	C	Ladung		Entladung	
		x_1	V_1	x_1'	V_{11}
0,05	2,0	25,4	0,025	20,6	0,022
0,1	2,0	25,3	0,051	20.6	0,041
0,2	1,0	25,3	0,067	23,6	0,128
0,4	0,5	25,8	0,080	24,1	0,204
0,5	0,4	25,4	0,081	16,3	0,354

Für diese Electroden würde die wahre Initialcapacität in wässeriger Lösung von $NaNO_3$ (0,2 g-Aeq. im Liter) zwischen 21,6 und 25,3 mf./qcm liegen. Bouty giebt hierfür 17,8 mf./qcm an. Ob dieser Werth auch durch Entladungsversuche gewonnen wurde, ist aus der Arbeit von Bouty nicht zu ersehen.

§ 8. Verschiedene Beobachter haben Angaben gemacht über die Veränderlichkeit der Polarisationscapacität des Platins mit der Zeit, welche seit dem Ansetzen der Zelle vergangen ist. Meine diesbezüglichen Beobachtungen stimmen im allgemeinen mit jenen Angaben überein. Entsprechend einer Angabe von Bouty fand ich, dass frische Zellen stets unregelmässige Resultate liefern; es schien mir, um die Zeitdauer

unregelmässigen Verhaltens abzukürzen, zweckmässig, die Zelle nach dem Zusammensetzen erst einige Male zu polarisiren und zu entladen und sie dann etwa 24 Stunden sich selbst zu überlassen. Frisch geglühtes Platin zeigte in verdünnter Schwefelsäure, entsprechend den Angaben Blondlot's, eine viel grössere Ladungscapacität als nach längerem Verweilen in der Flüssigkeit. So ergab sich, wenn t die seit dem Ansetzen der Zelle vergangene Zeit in Stunden bedeutet, für Lippmann'sche Schwefelsäure

$$s = 10 \text{ qmm} \quad S = 6600 \text{ qmm}.$$

		t	0	16	22	34	40	64
$V = 0{,}05$	$C = 2$ mf.	x_1	46,8	28,1	26,9	26,9	23,4	22,1
0,1	2	x_1	46,8	28,8	27,2	27,2	23,8	22

Bei einem anderen Versuch mit derselben Electrode erhielt ich:

		t	0	1	3	75
$V = 0{,}05$	$C = 2$ mf.	x_1	59,4	46,8	42,4	27,0
0,1	2	x_1	60,2	47,3	42,8	26,6

Nicht nur die scheinbare Ladungscapacität, sondern auch die scheinbare Entladungscapacität nimmt um so mehr ab, je länger das Platin in der Flüssigkeit verweilt.

		t	0	13
$V = 0{,}05$	$C = 2$ mf.	x_1	59,4	31,2
0,05	2	x_1'	41,6	26
$V = 0{,}1$	2	x_1	60,2	31,2
0,1	2	x_1'	46,6	25,6

Also auch die wahre Initialcapacität nimmt mit der Zeit ab. Bouty[1]) macht dieselbe Angabe, ohne indessen zahlenmässige Resultate mitzutheilen.

§ 9. Die folgende Tabelle enthält eine vollständige Versuchsreihe mit Platinelectroden in Lippmann'scher Schwefelsäure, 14 Stunden nach dem Ansetzen der Zelle; es sind nur die Resultate (x_1; x_1'; V_1; V_{11}) für die verschiedenen Fälle verzeichnet.

1) Bouty, l. c. p. 202.

Tabelle IV.

Verdünnte Schwefelsäure 1 Vol. H_2SO_4 . 6 Vol. H_2O . Pt-Electroden, $s = 10$ qmm, $S = 6600$ qmm. Kathodische Polarisation.

V	C	Ladung		Entladung	
		x_1	V_1	x_1'	V_{11}
0,05	2,0	13,2	0,031	13,0	0,02
0,1	2,0	13,4	0,060	14,2	0,04
0,4	0,5	15,3	0,098	11,4	0,27
0,5	0,4	16,1	0,099	8,9	0,35

Auch hier zeigt sich die Abnahme der scheinbaren Entladungscapacität, wenn Kräfte von 0,4—0,5 Volt benutzt werden. Für kleine Kräfte bis 0,1 Volt stimmen scheinbare Ladungs- und Entladungscapacität beinahe überein. Die wahre Initialcapacität würde 13,5 betragen. Dieselbe ist erheblich kleiner als die im vorigen Paragraphen mitgetheilten Werthe, welche für den Fall längeren Verweilens sich auf 22—27 mf./qcm belaufen. Auch andere Beobachter haben für die fragliche Grösse sehr verschiedene Werthe gefunden. Blondlot findet für Lippmann'sche Schwefelsäure und Platinelectroden, frisch geglüht, $x = 31{,}1$ mf./qcm; nach mehrwöchentlichem Verweilen in der Säure 7,8. Bouty findet für verdünnte Schwefelsäure, welche 1 g-Aeq. Schwefelsäure im Liter enthielt (etwa $^1/_5$ so viel als die von Lippmann benutzte Flüssigkeit) für zwei Electroden:

	1 Tag	2	4	5	7	8	10
Elect. I	27,6	29,5	24,5	21	32,6	30,2	31,5
„ II	—	—	24,2 34,6	—	—	35,6	35,1

und bemerkt, dass die fragliche Grösse zuweilen ziemlich capriciösen und ohne bemerkbare Ursache sich vollziehenden Veränderungen unterworfen sei.

§ 10. Zum Quecksilber übergehend bemerken wir zunächst, dass, wenn ein Electrolyt sich in einem Capillarrohr über einem Quecksilbermeniscus befindet, nicht nur dieser, sondern auch ein Theil der an der Glaswand liegenden cylindrischen Quecksilberoberfläche unbekannter Grösse benetzt wird.[1])

1) Bouty, l. c. p. 198.

Benutzt man also eine derartige Quecksilberfläche als Electrode, so ist deren Oberfläche unbekannt, und die Capacität der Flächeneinheit kann nicht berechnet werden. Nun verhält sich bekanntlich amalgamirtes Platin electromotorisch wie Quecksilber, kann doch in den Clarkelementen amalgamirtes Platin anstatt des Quecksilbers benutzt werden. Daher wurden amalgamirte Platindrähte, deren Oberfläche durch das Mikroskop genau bestimmt war, angewandt; das Amalgamiren geschah durch Behandeln des Platins mit Natriumamalgam, wobei das Natrium durch Spülen mit Wasser sorgfältig entfernt wurde.

Die angewandten Zellen waren entweder wie die in § 7 beschriebenen eingerichtet, wobei die grosse Platinplatte durch eine grosse Quecksilberfläche ersetzt war, oder, wenn es sich darum handelte, den Einfluss des Luftgehalts zu ermitteln, so gebaut, wie Fig. 28 zeigt.

Der Platindraht ist in das Glasrohr g eingeschmolzen und dieses mittels eines Kahlbaum'schen Quecksilberschliffes in das Glasrohr G von 5 mm Durchmesser eingesetzt; so konnte man den Draht, um ihn neu zu amalgamiren, bequem herausnehmen. Für die Untersuchungen mit einem Quecksilbermeniscus war der Schliff durch eine direct an der Biegung angeschmolzene Capillare von ungefähr 0,9 mm Durchmesser ersetzt. Die grosse Electrode war die Quecksilberfläche Q von 22 mm Durchmesser. Vergrösserte man den Widerstand der Zelle, indem man den Platindraht in dem engen Glasrohr G zurückzog und dadurch eine Flüssigkeitssäule von kleinem Querschnitt einschaltete, so wurden die Versuchsergebnisse nicht geändert, zum Beweise, dass die Contactdauer gross genug war, um den Ausgleich der Potentiale zu gestatten (§ 5).

Bei einigen Versuchen mit dieser Zelle wurde anstatt des amalgamirten Platindrahtes eine kleine Quecksilberelectrode angewandt, welche qualitativ die gleichen Ergebnisse lieferte; diese Versuche sind im Folgenden nicht mitgetheilt, weil die Reduction auf die Flächeneinheit nach dem Obigen nicht ausgeführt werden konnte. Unter Quecksilberelectroden sind im Folgenden stillschweigend amalgamirte Platindrähte verstanden.

§ 11. Auch die Quecksilberelectroden zeigten erst etwa 24 Stunden nach dem Ansetzen der Zelle ein constantes Ver-

halten. So ergab sich die Ladungsinitialcapacität für den Fall von Quecksilberelectroden in $MgSO_4$, 0,05 g-Aeq. im Liter, wenn t in Tagen die Zeit nach dem Ansetzen bedeutet:

t	0	1	2	3	4	5	6
x	2,98	3,50	3,21	3,21	3,56	3,56	3,56

Die Aenderungen sind hier im allgemeinen nicht so bedeutend wie beim Platin. Beim Entladungsversuch nehmen, wie beim Platin (§ 7), mit zunehmender Dauer des polarisirenden Stromes die scheinbaren Capacitäten zunächst zu, aber von etwa 2 sec ab hat eine weitere Zunahme der Dauer des Stromes auf die Capacität keinen merklichen Einfluss mehr. So ergab sich, wenn t die Dauer des polarisirenden Stromes in Secunden bedeutet, für Quecksilber in $MgSO_4$:

Quecksilbermeniscus.

t	sehr klein	1	2	3	4
Q_1	25	44,6	45,6	45,5	45,6

Die Ladungsversuche verliefen regelmässiger und übereinstimmender als die Entladungsversuche, jedenfalls weil bei jenen niemals grössere Electricitätsmengen durch die Zellen geschickt wurden. Aus diesem Grunde störte die Einschaltung eines Entladungsversuches in die Reihe der Ladungsversuche die letzteren, welche daher stets vor Beginn der Entladungsversuche beendigt wurden.

§ 12. Um den Unterschied zwischen Platin- und Quecksilberelectroden möglichst deutlich hervortreten zu lassen, stellte ich die in den §§ 7 und 9 beschriebenen Versuche noch einmal an, nachdem ich den Platindraht amalgamirt und die grosse Platinfläche durch eine Quecksilberfläche ersetzt hatte. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle (V, p. 355) enthalten.

Während also im Fall des Platins die scheinbaren Ladungs- und Entladungscapacitäten für kleine electromotrische Kräfte einander ziemlich nahe kommen, ist im Fall der Quecksilberelectroden die grösste beobachtete Entladungscapacität bei $NaNO_3$ nur etwa die Hälfte, bei H_2SO_4 nur etwa $^1/_3$ der kleinsten beobachteten Ladungscapacität. Damit geht parallel eine

sehr bedeutende Geschwindigkeit der freiwilligen Depolarisation. Schon bei $V = 0{,}05$ Volt fiel bei den Depolarisationsversuchen nach Art der im § 8 beschriebenen Q_{11} von 48 auf ungefähr 24, wenn zwischen dem Oeffnen des polarisirenden Stromes und der Entladung der Zelle in den Condensator 2 sec anstatt 1 sec verstrichen. Uebrigens konnten wegen der grossen Geschwindigkeit der freiwilligen Depolarisation bei Quecksilber hier constante Zahlen nicht erhalten werden, was bei Platin stets ohne Schwierigkeit gelang.

Tabelle V.

$\delta = 10$ qmm amalgamirter Platindraht, $S = 27668$ qmm.
Kathodische Polarisation.

V	C	$NaNO_3$ 2 g-Aeq. im Liter				H_2SO_4		1 Vol. H_2SO_4 6 Vol. H_2O	
		Ladung		Entladung		Ladung		Entladung	
		x_1	V_1	x_1'	V_{11}	x_1	V_1	x_1'	V_{11}
0,05	2,0	107	0,0079	52,2	0,076	183	0,0049	43,9	0,034
0,1	2,0	100	0,0166	48,2	0,071	152	0,0116	42,4	0,067
0,2	1,0	105	0,0174	33,9	0,154	144	0,0129	47,6	0,165
0,5	0,4	107	0,0176	12,0	0,282	147	0,0125	27,9	0,338

Nach der Betrachtung des § 7 würde nach Tabelle V die wahre Initialcapacität von Quecksilberelectroden in der benutzten $NaNO_3$-Lösung zwischen 50,2 und 106, in der benutzten Schwefelsäurelösung zwischen 44,6 und 160 mf./qcm liegen.

§ 13. Versuche derselben Art wurden mit $MgCl_2$ und $MgSO_4$ gemacht. Die Lösungen enthielten 0,05 g-Aeq. im Liter. Die Capacitätsbestimmungen wurden in den Apparaten ausgeführt, welche den Einfluss des Evacuirens zu bestimmen erlaubten. In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse verzeichnet, welche nicht evacuirte Zellen gaben. Es sind hier gleich die auf das Quadratcentimeter reducirten Capacitäten angegeben; der benutzte amalgamirte Platindraht war 14 mm lang, 0,278 mm dick, hatte also eine Oberfläche von 0,123 qcm. Ausserdem sind noch die Werthe V_1 und V_{11} in die Tabellen aufgenommen; es wurden mit den angegebenen Werthen von V stets dieselben Capacitäten wie bei den Versuchen des § 12 combinirt.

Tabelle VI.

$MgCl_2$ 0,05 g-Aeq. im Liter. $s = 12{,}29$ qmm, $S = 380$ qmm.
Amalgamirter Platindraht.

V	C	Anodisch				Kathodisch			
		Ladung		Entladung		Ladung		Entladung	
		x_1	V_1	x_1'	V_{11}	x_1	V_1	x_1'	V_{11}
0,05	2,0	113,9	0,006	64,2	0,040	132,5	0,006	50,2	0,038
0,1	2,0	111,3	0,013	40,7	0,074	132,5	0,011	41,3	0,072
0,2	1,0	112,1	0,013	19,3	0,148	122,1	0,013	20,6	0,143
0,4	0,5	93,6	0,017	6,4	0,243	115,0	0,016	7,5	0,259
0,5	0,4	96,1	0,016	9,5	0,291	108,3	0,015	6,3	0,329
		$MgSO_4$ 0,05 g-Aeq. im Liter.							
0,05	2,0	44,0	0,013	11,0	0,020	37,5	0,015	11,2	0,020
0,1	2,0	42,6	0,028	10,0	0,038	40,8	0,028	14,2	0,047
0,2	1,0	43,4	0,031	8,1	0,104	55,6	0,030	15,2	0,130
0,4	0,5	44,2	0,034	4,0	0,198	45,0	0,033	6,6	0,250
0,5	0,4	46,2	0,033	2,8	0,230	49,0	0,031	4,4	0,288

Bemerkungen zu den vorstehenden Tabellen:

Ueberall zeigt sich, wie bei den Versuchen der §§ 7 und 12 eine erhebliche Abnahme der scheinbaren Entladungscapacität für grössere Kräfte; ausserordentlich gross ist die Abnahme für den Fall des $MgCl_2$. Die folgende Tabelle VII enthält die aus Tabelle VI nach der Rechnungsweise des § 7 sich ergebenden Grenzen $\overline{x_1}$ und $\overline{x_1'}$, zwischen welchen die wahre Initialcapacität eingeschlossen ist. In die Tabelle sind auch die Resultate der entsprechenden Versuche mit luftfreien Zellen aufgenommen.

Tabelle VII.

		$MgCl_2$		$MgSO_4$	
		$\overline{x_1}$	$\overline{x_1'}$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1'}$
Luft- haltig	Anode	112,4	64,2	43,3	10,5
	Kathode	129,0	50,2	44,6	13,5
Luft- frei	Anode	93,1	50,2	37,5	12,8
	Kathode	99,8	116,4	40,5	16,2

Die scheinbare Ladungscapacität ist hiernach für die lufthaltigen Zellen etwas grösser als für die luftfreien. Ueber diesen Punkt wurde noch ein besonderer Versuch gemacht,

indem eine mit dem benutzten $MgSO_4$ gefüllte Zelle erst lufthaltig dann luftfrei und dann abermals lufthaltig untersucht wurde, nachdem man sie nämlich heftig mit Luft geschüttelt hatte. Es ergab sich dabei folgendes Resultat:

Tabelle VIII.

$MgSO_4$. Amalgamirter Platindraht. $s = 12{,}29$ qmm, $S = 380$ qmm. Anodische Polarisation.

V	C	Lufthaltig				Luftfrei				Lufthaltig			
		Ladung		Entlad.		Ladung		Entlad.		Ladung		Entlad.	
		x_1	V_1	x_1'	V_{11}	x_1	V_1	x_1'	V_{11}	x_1	V_1	x_1'	V_{11}
0,05	2,0	33,0	0,019	16,6	0,023	28,9	0,020	21,8	0,026	38,0	0,018	20,8	0,026
0,1	2,0	34,2	0,036	18,3	0,048	28,1	0,041	24,4	0,055	35,4	0,034	20,5	0,051
0,2	1,0	36,8	0,042	16,9	0,133	29,7	0,050	28,0	0,148	40,0	0,039	17,0	0,121
0,4	0,5	39,0	0,045	14,3	0,298	30,8	0,055	9,5	0,356	47,9	0,038	5,8	0,298
0,5	0,4	43,3	0,041	9,3	0,352	31,4	0,056	5,0	0,403	41,1	0,042	8,1	0,299

	x_1	x_1'
Lufthaltig	34,7	17,3
Luftfrei	28,9	24,7
Lufthaltig	37,8	20,7

Es bestätigt sich also die bezüglich des Einflusses der Luft auf die scheinbare Ladungscapacität gemachte Bemerkung.

Die scheinbaren Ladungscapacitäten sind ferner für die kathodische Polarisation etwas grösser (Tab. VII) als für die anodische. Die scheinbare Ladungscapacität ist für das Chlorid 1,4—1,8, für das Sulfat 2—4 mal grösser als die scheinbare Entladungscapacität für kleine Werthe von V gefunden worden. Endlich ist die wahre Initialcapacität für das Chlorid erheblich grösser als für das Sulfat.

§ 14. Versuche derselben Art wurden mit NaCl und Na_2SO_4 gemacht, wobei wieder 0,05 g-Aeq. im Liter sich befanden.

Die Ergebnisse für lufthaltige Zellen sind wie im vorigen Paragraphen in Tabelle IX zusammengestellt.

Tabelle IX.

NaCl 0,05 g-Aeq. im Liter. $s = 12{,}29$ qmm, $S = 380$ qmm.
Amalgamirter Platindraht.

V	C	Anodisch				Kathodisch			
		x_1	V_1	x_1'	V_{11}	x_1	V_1	x_1'	V_{11}
0,05	2,0	40,0	0,019	33,1	0,034	38,1	0,020	23,0	0,029
0,1	2,0	44,7	0,027	24,2	0,060	43,3	0,027	17,2	0,051
0,2	1,0	47,4	0,029	8,68	0,104	44,8	0,031	9,8	0,119
0,4	0,5	46,1	0,032	1,73	0,119	43,8	0,034	1,7	0,117
0,5	0,4	48,5	0,032	1,39	0,149	45,2	0,034	1,4	0,128
		Na_2SO_4 0,05 g-Aeq. im Liter.							
0,05	2,0	37,6	0,015	18,5	0,027	31,8	0,017	20,0	0,035
0,1	2,0	35,8	0,031	19,0	0,054	31,8	0,034	21,8	0,170
0,2	1,0	35,4	0,037	20,0	0,141	33,7	0,038	20,4	0,164
0,4	0,5	34,6	0,042	10,5	0,287	31,0	0,046	11,0	0,239
0,5	0,5	37,6	0,045	8,2	0,382	31,1	0,047	8,0	0,254

Daraus ergiebt sich die Zusammenstellung:

Tabelle X.

	NaCl		Na_2SO_4	
	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1'}$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1'}$
Anodisch	44,1	33,1	36,3	19,2
Kathodisch	42,0	23,0	32,4	20,7

Ein deutlicher Einfluss des Evacuirens wurde hier nicht bemerkt. Die scheinbare Ladungscapacität ist 1,4—1,9 mal grösser als die scheinbare Entladungscapacität für kleine Kräfte. Die wahre Initialcapacität scheint auch hier für das Chlorid grösser als für das Sulfat zu sein, obgleich die Unterschiede jedenfalls viel geringer sind als für die Magnesiumsalze. Zu bemerken ist, dass nach Bouty's[1]) Rechnung die aus den G. Meyer'schen Curven[2]) nach Lippmann berechnete Capacität in der Nähe des Maximums der Oberflächenspannung für KCl im Verhältniss von 83 : 60 grösser als für K_2SO_4 gefunden wird. Ebenso findet Oberbeck[3]) durch Wechselströme für Platin, Gold und Silber die Initialcapacität grösser für das Chlorid als für das Sulfat.

1) Bouty, l. c. p. 197.
2) G. Meyer, Wied. Ann. **35.** p. 508. 1892.
3) Oberbeck, l. c.

Bei der theoretischen Erörterung dieser Resultate muss man die Natur der an der zu polarisirenden Oberfläche einander berührenden Substanzen in Betracht ziehen. Geht man davon aus, dass immer etwas Quecksilbersalz in Lösung geht, so wäre im Fall des Chlorids zu berücksichtigen, dass Sublimat mit $MgCl_2$ und NaCl Doppelsalze bildet, aus denen durch NaOH Quecksilber nicht gefällt wird.

§ 15. Von den mit anderen Electrolyten gemachten Versuchen theile ich hier noch die auf verdünnte Schwefelsäure verschiedener Concentration bezüglichen mit.

Tabelle XI.

H_2SO_4. 1 Vol. H_2SO_4. 6 Vol. H_2O.
$s = 10$ qmm, $S = 27673$ qmm. Amalgamirter Platindraht.
Kathodische Polarisation.

V	C	Ladung		Entladung	
		x_1	V_1	x_1'	V_{11}
0,05	2,0	233,6	0,0039	15,2	0,0216
0,1	2,0	177,6	0,0101	17,8	0,0471
0,2	1,0	200,6	0,0094	26,2	0,1446
0,4	0,5	321,6	0,0081	17,0	0,3088
0,5	0,4	400	0,0050	13,3	0,3890

Die scheinbare Ladungscapacität ist hier für kleine Kräfte etwa 10—16 mal so gross als die scheinbare Entladungscapacität. Als die Ladungsversuche gleich nach Anstellung der Entladungsversuche wiederholt wurden, ergaben sich noch grössere Ladungscapacitäten (vgl. § 11) z. B.:

V	C	x_1
0,05	2,0	812
0,1	2.0	675
0,2	1,0	644

Nach etwa 16stündiger Ruhe war die Capacität wieder auf den alten Werth gesunken. Andere und regelmässigere Resultate ergab eine verdünntere Schwefelsäure (vgl. Tab. XII, p. 360).

Die scheinbare Ladungscapacität ist hier für kleine Kräfte nur etwa dreimal so gross als die scheinbare Entladungscapacität.

Die Versuche dieses Paragraphen wurden öfter mit anderen Electroden wiederholt, wobei die verhältnissmässig grosse

Ladungscapacität bei der concentrirteren Säure immer wieder hervortrat, eine Erscheinung, welche wohl darauf zurückzuführen ist, dass in der concentrirteren Säure verhältnismässig viel Quecksilber in Lösung geht.

Tabelle XII.

H_2SO_4 0,05 g-Aeq. im Liter.
$s = 10$ qmm, $S = 27673$ qmm. Amalgamirter Platindraht.
Kathodische Polarisation.

V	C	Ladung		Entladung	
		x_1	V_1	x_1'	V_{11}
0,05	2,0	63,0	0,013	20,2	0,025
0,1	2,0	61,2	0,026	23,0	0,051
0,2	1,0	62,0	0,027	21,2	0,140
0,4	0,5	59,9	0,031	16,5	0,290
0,5	0,4	71,6	0,026	9,4	0,350

Aus den in diesem Aufsatze mitgetheilten Versuchen, welche noch in vieler Hinsicht der Erweiterung und Ergänzung bedürfen, scheint immerhin soviel hervorzugehen, dass Capacitätsbestimmungen wohl geeignet sind, auf die immer noch dunklen Vorgänge bei der galvanischen Polarisation, insbesondere der Quecksilberelectroden, etwas mehr Licht zu werfen.

Zum Schluss sei es mir gestattet, meinem verehrten Lehrer, Hrn. Prof. Warburg, für seine vielfache Unterstützung durch Rath und That meinen wärmsten Dank auszusprechen.

Freiburg i. B., Physikalisches Institut, März 1895.

8. *Ueber Aureole und Schichtung beim electrischen Lichtbogen und bei Entladungen in verdünnten Gasen; von O. Lehmann.*

(Hierzu Taf. III Fig. 1—25.)

Der electrische Lichtbogen besteht bei Anwendung horizontaler Electroden scheinbar aus zwei schief gegeneinander brennenden Flammen, welche bei grosser Spannungsdifferenz sehr beträchtliche Höhe erreichen können.[1]) Steigt der Strom in der einen Flamme bis zur Spitze in die Höhe und in der anderen wieder herunter und wie erklärt sich überhaupt die Entstehung dieser Flammen?

Die gewöhnliche electrische Entladung in verdünnten Gasen, wie wir sie in Geissler'schen Röhren und im electrischen Ei beobachten, besteht, auch wenn sie ebenso stetig ist wie der Lichtbogen, aus einer Säule rothen positiven Lichtes und dem durch einen dunkeln Raum davon getrennten negativen Licht.

In welcher Beziehung stehen diese Lichterscheinungen zu den Flammen, aus welchen sich der electrische Lichtbogen zusammensetzt und weshalb zeigen sich so grosse Unterschiede, obschon doch in beiden Fällen der physikalische Process im wesentlichen der gleiche ist?

Ueber diese und ähnliche Fragen ist aus der vorhandenen Literatur nur geringe und unsichere Auskunft zu erhalten, sodass es mir von Interesse schien, die Uebergangsformen zwischen Lichtbogen und Gasentladungen, welche man beim Durchgang verhältnissmässig starker Ströme durch mässig verdünnte Luft erhält, näherem Studium zu unterwerfen.

Zum Theil sind die Unterschiede beider Entladungsformen jedenfalls dadurch bedingt, dass der Lichtbogen sich in freier Luft entwickeln kann, während die Gasentladungen gewöhnlich in sehr engen Gefässen, z. B. Geissler'schen Röhren, hervor-

1) Gelegentlich der electrotechn. Ausstellung in Frankfurt a. M. 1892 wurde z. B. durch den Vertreter der Firma Siemens & Halske ein Wechselstromlichtbogen demonstrirt, dessen Flammen eine Höhe von etwa 50 cm und mehr hatten.

gebracht werden, welche ungehinderte Ausbreitung des electrischen Stromes nicht zulassen. Diese Störung kann beseitigt werden, entweder indem man mikroskopisch kleine Electrodendistanzen anwendet oder sehr grosse Entladungsgefässe.

Auf ersterem Wege hatte ich schon früher eine Art Uebergangsform von Gasentladungen zum Lichtbogen gefunden, welche ich zuerst für eine wirkliche Flamme hielt[1]), später aber als Hülle glühenden Gases deutete. Die betreffende Stelle meiner Arbeit lautet:

„Ist die Electrodendistanz sehr klein, so wird das umgebende Gas zuweilen bis zur Glühhitze erwärmt und bildet eine röthlich leuchtende Hülle um den Funken, die wohl zu unterscheiden ist von der sogenannten Lichthülle des Inductionsfunkens, die nichts anderes, als mit dem Funken rasch alternirende und deshalb gleichzeitig wahrgenommene Streifenentladung ist.“[2])

Auch H. Hertz[3]) hat später die Erscheinung selbständig aufgefunden und näher untersucht. Er scheint der Ansicht gewesen zu sein, dass es sich um leuchtende heisse Gasmassen handelt, die zuvor durch den Entladungsprocess zum Leuchten gebracht wurden, sich aber unabhängig von der Bahn der Entladung fortbewegen und unter Umständen auch nach Aufhören der Entladung einige Zeit weiterleuchten können.

Auf die Beziehung der sogenannten „Aureole“ oder Lichthülle der Inductionsfunken, welche nach G. Wiedemann[4]) „an der Endfläche der positiven Electrode beginnt, daselbst röthlich ist und sich mit lavendelblauem Lichte noch über die negative Electrode ausbreitet“, geht Hertz nicht weiter ein. Er hielt offenbar, ebenso wie ich, die Erscheinung für eine davon principiell verschiedene, was um so mehr berechtigt war, als nirgendwo in der Literatur eine Angabe darüber zu finden ist, dass rothes positives und blaues negatives Licht nicht die einzigen Bestandtheile der Gasentladung bilden, dass sich vielmehr die Strömung der Electricität zum

1) O. Lehmann, Molecularphysik **2.** Taf. VI, Fig. *K.* p. 332 und Zeitschr. f. Kryst. **1.** Taf. XX, Fig. 31c. 1877.

2) O. Lehmann, Wied. Ann. **11.** p. 699. 1880 (Taf. VI, Fig. 45).

3) H. Hertz, Wied. Ann. **19.** p. 78. 1883.

4) G. Wiedemann, Electr. **4.** (2) p. 696, § 953. 1885.

Theil auch ausserhalb dieser Lichtgebilde vollzieht und unter Umständen dort eine eigenartige, von den beiden genannten verschiedene Lichterscheinung hervorruft, welche ich im Folgenden als eigentliche Aureole oder Aureole schlechthin bezeichnen will.

Auf diese Thatsache wurde ich erst durch die im Folgenden zu beschreibenden Untersuchungen aufmerksam, bei welchen, im Gegensatz zu den früheren, zur Elimination des Einflusses der Gefässwände nicht mikroskopisch kleine Electrodendistanzen, sondern sehr grosse Entladungsgefässe zur Anwendung gebracht wurden.

Diese Gefässe waren die grössten im Handel zu erhaltenden tubulirten Luftpumpenrecipienten, von etwa 40 cm Durchmesser und 50 cm Höhe, oder auch ein gusseiserner Recipient mit noch grösseren Dimensionen, dessen Inneres durch verschiedene Fenster aus Spiegelglas bequem betrachtet werden konnte und der den Glasrecipienten gegenüber den grossen Vorzug geringerer Zerbrechlichkeit hatte. Die obere Wölbung der ersteren wurde durch ein innen angebrachtes Blech vor zu starker Erhitzung geschützt und die Aussenwand wurde nach jedem Versuch zur Abkühlung mit kaltem Wasser abgewaschen.

Zur Erzeugung des Stromes gedachte ich die früher gebrauchte Hochdruckinfluenzmaschine mit 60 rotirenden Scheiben[1]) zu verwenden, indess war die Stromstärke derselben nur ausreichend zur einfachen Glimmentladung, wenigstens insofern nicht Funkenstrecken eingeschaltet wurden. Die letzteren bedingen aber Complicationen durch Ladung der Wände des Gefässes, welches dann als Vacuumflasche wirkt[2]), sodass diese Methode zum Studium der schon an sich complicirten Erscheinungen nicht geeignet schien.

Die mir zur Verfügung stehende Hochspannungsaccumulatorenbatterie[3]) war wegen zu geringer Capacität ebenfalls nicht verwendbar, sodass ich mich nach einer ergiebigeren Electricitätsquelle umsehen musste.

---

1) O. Lehmann, Wied. Ann. **44.** p. 642. 1891.
2) O. Lehmann, Wied. Ann. **22.** p. 305. 1884.
3) O. Lehmann, Wied. Ann. **47.** p. 428. 1892.

Durch Zufall gelangte ich in den Besitz einer passenden magnetoelectrischen Maschine, welche durch einen vier- bis fünfpferdigen Electromotor angetrieben, Spannungen bis zu 2000 Volt und Stromstärken bis zu 5 Amp. zu liefern vermochte.[1]) Die Magnetschenkel derselben wurden mit Accumulatorenstrom von 65 Volt gespeist. Bildeten sich am Collector zu starke Funken, so wurden sie durch comprimirte Luft von 4 Atm. Druck ausgeblasen. Zum Evacuiren der Recipienten diente eine mittels Electromotor betriebene Staudinger'sche Luftpumpe grösster Art, welche beim Durchgang der Entladungen zur Aufrechterhaltung des Druckes in Thätigkeit gehalten wurde. Der gewöhnlich angewandte Gasdruck betrug 4—10 mm Quecksilber.

Zur Untersuchung des Wechselstromlichtbogens diente eine vierpferdige Wechselstrommaschine von Helios, welche zur Speisung eines Transformators für 2000 Volt oder eines grossen Ruhmkorff'schen Funkeninductors verwendet wurde.

Um zu starke Erhitzung der Electroden zu vermeiden, wurden als solche gewöhnlich 3—4 cm dicke cylindrische Klötze aus Kupfer, Messing oder Eisen verwendet, zuweilen auch Kohlenstäbe oder mittels durchgeleiteten Wassers gekühlte Electroden.

Die Luftpumpenteller waren mit Vorrichtungen zum Einführen von Stromleitungen zum Erhitzen von Porzellanschiffchen mit verdampfbaren Substanzen etc. versehen. Eine oder beide Electroden waren beweglich und zwar konnte die obere während der Versuche mittels einer über Rollen geführten Schnur bewegt werden.

I. Die Grenze der Entladung.

Leiten wir den Strom durch eine metallisch leitende Flüssigkeit oder einen Electrolyten, so breiten sich die Stromlinien nahezu überall hin aus, soweit der Leiter sich ausdehnt. Im Falle der Gasentladungen dagegen, welche erst bei Erreichung eines bestimmten Potentialgradienten eintreten, be-

1) Die Maschine wurde aus den Resten einer durch Brand beschädigten Schuckertmaschine Modell $7\,L_5$ in der Werkstätte des Physikalischen Instituts der technischen Hochschule in Karlsruhe nach meinen Angaben hergestellt.

schränkt sich die Strömung nach den üblichen Vorstellungen auf die in rothem und blauem Licht erstrahlenden Gasmassen, doch ist man genöthigt zuzugeben, dass auch der dunkle Trennungsraum, sowie die dunkeln Räume zwischen den Schichten des positiven Lichtes den Strom hindurchlassen, was Faraday bekanntlich veranlasste, die Entladung überhaupt als „*dunkel*" zu bezeichnen.

Vermag nun vielleicht der Strom auch die ausserhalb der leuchtenden befindliche Gasmasse in Form dunkler Entladung zu durchdringen und wie kann man hierüber Aufschluss erhalten?

Dass dem wirklich so ist, kann man bei Anwendung der grossen Luftpumpenrecipienten und dicker Kupferklötze als Electroden leicht erkennen, wenn man der Luft etwas Jod- und Fettdampf beimischt. Man sieht dann die gewöhnliche Gasentladung von einer mehr oder minder kugel- oder birnförmigen, scharf begrenzten, grasgrünen Aureole umgeben, welche bei etwa 20 cm Electrodendistanz, 3 Amp. Stromstärke und 400 Volt Spannung den ganzen 40 cm weiten Recipienten ausfüllt. In reiner Luft ist die Aureole gelbgrau und verliert sich bald, vermuthlich infolge Umbildung des Sauerstoffs und Stickstoffs zu Untersalpetersäure und Absorption des Sauerstoffs durch Oxydation der Electroden.

Lässt man den Luftdruck zunehmen, so geht die Aureole stetig in die den Lichtbogen einhüllende Flammenerscheinung über.

Warum ist nun anzunehmen, das Leuchten der Aureole werde durch hindurchgehenden Strom hervorgebracht? Kann das Leuchten nicht ein Nachleuchten infolge einer chemischen Veränderung des Gases sein, welche dasselbe an den Stellen erfahren hatte, wo das rothe und blaue Licht auftritt?

Dass dies nicht der Fall ist, dass vielmehr die Grenze der Aureole das vom Strome durchflossene Gas von dem nicht an der Entladung betheiligten scheidet, schliesse ich in erster Linie aus den Strömungserscheinungen des Gases im Recipienten.

II. Die Bewegung des Gases im Lichtbogen.

Betrachtet man einen gewöhnlichen horizontalen Lichtbogen, insbesondere einen solchen von beträchtlicher Grösse,

so ist die erste Vermuthung, die sich jedem aufdrängt, die, es finde eine fortwährende Verdampfung der weissglühenden Electrodenspitzen statt und die entstehenden Dampfströme bildeten die beiden schief gegeneinander gerichteten Flammen des Lichtbogens, sodass also die Strömung des Gases ganz ähnlich derjenigen bei zwei gegeneinander brennenden Gasflammen wäre. Man ist also geneigt anzunehmen, es gehe eine Gasströmung von den Spitzen aus und wende sich, durch das geringe specifische Gewicht der heissen Luft veranlasst, mitten zwischen den Spitzen nach oben.

Diese Vorstellung ist völlig verkehrt. Die Strömung ist im wesentlichen vielmehr derart, wie sie sein würde, wenn die Electrodenspitzen durch einen glühenden Draht verbunden wären, von dessen Oberfläche die Luft infolge der Erhitzung überall senkrecht in die Höhe steigt, also etwa so, wie die Pfeile der Figur 1 andeuten.[1]) Staubtheilchen, welche von der bewegten Luft mitgeführt werden und, in den Lichtbogen eintretend, mit hellem Lichte erglänzen und so ihren Weg deutlich erkennen lassen, ermöglichen, sich von dem Vorhandensein dieser Strömung ohne weiteres zu überzeugen.

Eine Verdampfung der Kohlenspitzen findet beim gewöhnlichen *ruhigen* Lichtbogen nicht statt, sondern nur eine langsame Verdunstung und Oxydation des Dampfes durch die beigemischte sauerstoffhaltige Luft.

Hiervon kann man sich leicht überzeugen, wenn man ein dünnes etwa 20 cm langes, 2 mm dickes Kohlenstäbchen, dessen Fassungen zur Vermeidung von Spannungen auf Quecksilber schwimmen, durch einen Strom von etwa 60—70 Amp. bei 150 Volt Spannung zu intensivem Weissglühen bringt. Dasselbe strahlt ein äusserst blendendes Licht aus, zum mindesten ebenso hell wie das der Kohlenspitzen im Lichtbogen, verdampft aber nicht. Es wird schliesslich, anscheinend infolge von Umwandlung in eine andere Modification, bei bestimmter Temperatur plötzlich breiartig weich, biegt sich vermöge seines Gewichtes durch und reisst ab.

---

1) Der röthliche Kern des Lichtbogens ist der Deutlichkeit halber geschichtet gezeichnet, was eigentlich nur für den Lichtbogen im Vacuum zutrifft.

Anders verhält sich die Sache beim *zischenden* Lichtbogen, wie man ihn z. B. bei Anwendung derselben Stromstärke und Spannung zwischen zwei nahestehenden Kohlenspitzen erhält. Die gleiche Stromwärme, welche vorher auf das lange Stäbchen vertheilt war, ist nun auf ein sehr kleines Gebiet beschränkt, die Temperatur steigt also sehr viel höher, auch kann der kleine erweichende Theil einer Spitze nicht heruntersinken. Man sieht dann von der positiven Electrode, welche bekanntlich höhere Temperatur annimmt als die negative, eine hell grünlichblaue rauschende Flamme innerhalb der Aureole aufsteigen, welche, abgesehen von der Form, völlig dem weissblauen Lichtkegel eines Bunsen'schen Brenners bei starker Luftzufuhr gleicht. An der Grenze dieser Flamme findet offenbar Verbrennung von Kohlenstoffdampf zu Kohlenoxyd statt und die gekräuselte in lebhaftester Bewegung befindliche Oberfläche der Flamme lässt erkennen, dass die Entwickelung des Dampfes nicht ganz stetig erfolgt, sondern ab und zu wieder plötzliche Condensation eintritt, sodass nothwendig das zischende Geräusch entstehen muss, welches unter diesen Umständen stets gehört wird.

Verwendet man Ströme von mehreren hundert Ampère Stärke[1]) bei möglichst geringer Spannung, d. h. möglich geringem Abstand der Kohlenspitzen, so findet ein fortwährendes Sublimiren des Kohlenstoffs von der heissen Anode auf die kältere Kathode statt, erstere wird immer kürzer, letztere länger.

Weit besser als bei dem Lichtbogen in Luft können wir uns über die Gasbewegungen orientiren bei dem Lichtbogen im Vacuum, speciell beim Einbringen von Jod- und Fettdämpfen in den Recipienten und bei Verwendung massiver Kupferelectroden.

Die aufsteigenden Jod- und Fettdämpfe lassen sowohl den Weg der Gastheilchen deutlich erkennen, wie auch die Ausdehnung der Aureole des Lichtbogens, und bringt man ausserdem Rauch aus festen Partikelchen z. B. von verbrennendem

1) Ich benutzte dazu zwei parallel geschaltete, durch Brand beschädigte und in der Werkstätte des Physikalischen Instituts zu diesem Zwecke umgebaute Dynamomaschinen für acht Pferdekräfte, in Serie mit drei Accumulatoren für 1000 Amp. normalen Entladestrom.

Wismuth, in den Recipienten, so wird die Gasströmung so deutlich, dass man sie photographiren könnte.

Am klarsten werden die Verhältnisse wieder bei Anwendung eines horizontalen Lichtbogens, doch ist der Abwechslung halber in Fig. 2 die Strömung für einen verticalen Lichtbogen dargestellt.

Man sieht, wie nach dem Vorigen zu erwarten, in der Axe des Recipienten die heiss gewordene Luft aufsteigen und alsdann sich abkühlend an den Wänden des Recipienten wieder herunterströmen, sodass sich in einer etwa auf halber Höhe des Recipienten gelegenen Horizontalebene ein völlig unbeweglicher Wirbelring ausbildet, welcher bei Anwendung von Rauch (aus festen Partikelchen) ebenso aussieht, wie ein Rauchring aus Tabaksrauch in freier Luft.

Tritt ein Rauchfaden in das Gebiet der Aureole ein, so wird er dort sofort leuchtend und bleibt es bis zu seinem Austritt, wo er ebenso schnell wieder erlischt. Die Fettdämpfe bringen ein helles gelbes Licht hervor ähnlich dem einer gewöhnlichen Flamme (infolge der Ausscheidung von festem Kohlenstoff), die Joddämpfe leuchten in blauem Lichte. Die Aureole an sich ist schön grasgrün, vermuthlich infolge der Bildung gasförmiger Kupferverbindungen. Der Durchmesser der Aureole hängt von der Electrodendistanz ab und kann bis zu 40 cm betragen, sodass sich die Erscheinungen selbst aus der Entfernung deutlich beobachten lassen.

Gegen die Mitte zu geht die Farbe der Aureole in rothgelb über und den axialen Theil bildet, wie beim gewöhnlichen Lichtbogen, rosafarbenes oder bläuliches positives Licht, welches geschichtet sein kann, wie in der Figur angedeutet, häufig aber auch ganz stetig verläuft, wie man bisher für den Lichtbogen allgemein angenommen hat.

III. Beziehungen zwischen Lichtbogen und Gasentladungen.

Bei Fig. 4 endet der Lichtbogen beiderseits an hellen Punkten, wo sich, wie das Spectrum erweist, reichlich Metalldampf oder, falls Kohlenelectroden Verwendung finden, Kohlendampf vorfindet. Dies ist auch dann der Fall, wenn die Temperatur der hellen Punkte der Electroden nicht die Siede- bez. Sublimationstemperatur des Electrodenmaterials erreicht, d. h.

denjenigen Temperaturgrad, bei welchem die Dampfspannung gleich dem Atmosphärendruck wird, bei welchem sich also wie beim zischenden Lichtbogen ein eigentlicher Dampfstrom bilden kann. An diesen hellen Stellen findet augenscheinlich ein Verdunsten der Electroden statt unter Einfluss der hohen Temperatur und Diffusion des gebildeten Metalldampfes in die umgebende Luft — nicht auf gewöhnlichem Wege, denn hierdurch liesse sich die Bildung der relativ grossen Metalldampfbüschel in der verhältnissmässig rasch strömenden Luft nicht erklären — sondern durch Wirkung electrischer Kräfte.[1])

Ein Maass für die Diffusionsgeschwindigkeit würde man erhalten können durch Vergleich der Ausdehnung der Metalldampfbüschel, wenn die Diffusionsrichtung mit der Strömungsrichtung des Gases übereinstimmt und wenn sie entgegengesetzt ist. Beispielsweise war bei einem Potentialgefälle von etwa 4000 Volt pro Meter die Ausdehnung des negativen Eisendampfbüschels bei Anwendung von Eisenelectroden etwa die sechsfache, wenn die Richtung der Gasströmung, welche vielleicht 0,1 m pro Secunde betrug, übereinstimmend war, woraus sich eine Diffusionsgeschwindigkeit des Eisendampfes von 0,14 m pro Secunde ergeben würde (bei einem Luftdruck von etwa 4 mm und einer Temperatur von etwa 1000°). Die Geschwindigkeit der gewöhnlichen Diffusion dürfte bedeutend geringer sein, doch fehlen dafür die Anhaltspunkte.

Die Ausdehnung des positiven und diejenige des negativen Metalldampfbüschels sind im allgemeinen nicht gleich gross, was nicht nur in Verschiedenheit der Temperatur begründet sein dürfte, denn die Unterschiede sind viel beträchtlicher als die Temperaturunterschiede, sondern in verschiedener electrischer Ladung der diffundirenden Dämpfe oder Ionen. Der positive Metalldampfbüschel ist relativ sehr gross gegenüber dem negativen bei Magnesium und Natrium, gerade umgekehrt sehr klein bei Eisen und Kupfer. Es liegt nahe anzunehmen, diese Verschiedenheiten ständen in Zusammenhang mit den Verschiedenheiten der Lösungstension nach Nernst, insofern der osmotische Druck von Magnesiumionen $= 10^{44}$ Atm., derjenige von Kupferionen $= 10^{-19}$ Atm. angenommen werden muss (um

1) Vgl. O. Lehmann, Wied. Ann. 52. p. 458. 1894.

das Auftreten der electromotorischen Kräfte zu erklären[1]), doch erscheinen die vorliegenden Beobachtungen und Zahlen zu eingehenderen Rechnungen nicht geeignet.

Nicht immer endigt der Lichtbogen auf beiden Seiten in hellen Punkten und Metalldampfbüscheln (Fig. 3), vielmehr kann er bei genügend ausgedehnten kalten Electrodenflächen, z. B. bei Anwendung massiver messingener Halbkugeln von 6 cm Durchmesser, in Formen übergehen (Fig. 5 u. 6), welche nur auf der einen (entweder positiven oder negativen Seite) einen Metalldampfbüschel haben, auf der anderen Seite dagegen ausgedehntes Glimmlicht, welches nur das Gasspectrum zeigt. Diese Formen können als Uebergangsformen zur Gasentladung bezeichnet werden und thatsächlich entsteht diese zuweilen plötzlich aus dem Lichtbogen oder den Uebergangsformen, indem die Metalldampfbüschel vollständig verschwinden und nur das Gasglimmlicht übrig bleibt (Fig. 4).

Umgekehrt kann die Gasentladung plötzlich in Lichtbogen (Metallentladung) übergehen, indem sich die Glimmlichthüllen der Electroden momentan contrahiren und auf die hellen Lichtpunkte zusammenschrumpfen, welche die Enden des Lichtbogens bilden. Sind die Electrodenoberflächen klein, so ist mit diesem Uebergang eine bedeutende Vergrösserung der Stromstärke (z. B. von 0,1 auf 3 Amp.) und Verminderung der Spannung (z. B. von 1500 auf 500 Volt) verbunden, sind aber die Electrodenflächen genügend gross, so kann der Unterschied von Stromstärke und Spannung vor und nach der Bildung der Bogenentladung geringfügig sein.

Contrahirt sich mit zunehmendem Luftdruck und steigender Spannung der in zwei hellen Punkten endigende Lichtbogen auf einen schmalen Streifen, so hat man die gewöhnliche Funkenentladung. Die Uebergangsformen mit nur einem hellen Punkt entsprechen den halben Funken, welche z. B. beim Ueberspringen von Funken auf Flammen oder feuchte Körper entstehen.

Als Ursache des Uebergangs von Gasentladung in Bogenentladung darf man hiernach wohl die Entstehung der Metalldampfbüschel und den geringen Werth des Entladungspotentialgefälles in letzteren betrachten. Da die Bildung der Metall-

1) Vgl. W. Ostwald, Lehrb. d. allgem. Chemie. 2. (1). p. 948.

dampfbüschel nicht allein durch die Temperatur, sondern auch durch electrische Kräfte bedingt ist, erscheint es nicht unmöglich auch die Verschiedenheit des Potentialgefälles und der Wärmeentwickelung an beiden Electroden zu erklären, doch kann dies hier nur angedeutet werden. Reicht diese Wärmeentwickelung nicht mehr zu, die zur Aufrechterhaltung des Metalldampfbüschels nöthige Dampfmenge zu liefern, so muss die Bogenentladung unter Ansteigen der Spannung in Gasentladung übergehen.

Erfüllen die gebildeten Metalldämpfe den ganzen Entladungsraum, so contrahirt sich der Lichtbogen, je nach deren Natur und wird bald heller, bald dunkler.

Verwendet man z. B. Eisenelectroden, so ist die Aureole von erheblich geringerem Durchmesser als bei gleichdicken Kupferelectroden und von graugelber Farbe. Ist Jod zugegen, so bedecken sich die Wände des Recipienten bald mit einem undurchsichtigen Niederschlag von Eisenjodid. Quecksilberdämpfe bewirken eine starke Contraction des Lichtbogens, indess wird der Recipient bald undurchsichtig.

Bei Natrium und Kalium ist die Lichtentwickelung sehr gering und man kann z. B. bei Kalium Ströme von 2—3 Amp. Stärke durch den Dampf senden, während sich die Lichterscheinung auf zwei helle Punkte an den Electroden beschränkt, es kann sogar der eine Lichtpunkt verschwinden, doch ist, ebenfalls wegen Beschlagen des Recipienten, die Beobachtung schwierig.

Sehr helle Lichtbogen erhält man in Leuchtgas und Petroleumdampf infolge von Russabscheidung. Der Bogen erscheint stark zusammengezogen, vermuthlich weil die Dissociation des Kohlenwasserstoffes sehr viel Energie absorbirt.

IV. Die Stromlinien in der Aureole.

Nachdem durch die besprochenen Versuche erwiesen scheint, dass ein principieller Unterschied zwischen Lichtbogen und Gasentladungen nicht besteht, dass die Aureole in *allen* Fällen einen wesentlichen Bestandtheil der Lichterscheinung bildet, welcher neben dem sogenannten positiven und negativen Licht auftritt und in seiner Form durch vorhandene Luftströmungen nur unerheblich beeinflusst wird, können wir zu

der eingangs gestellten Frage zurückkehren: Ist die Aureole eine infolge chemischer Zersetzung unabhängig von der Strombahn phosphorescirende Gasmasse, oder ist ihr Leuchten direct durch den Strom veranlasst, so dass es nur da erscheint, wo auch Strom vorhanden ist und somit durch seine räumliche Ausdehnung die Ausbreitung der Stromlinien im Gase erkennen lässt?

Dass die Aureole nur während des Stromdurchganges leuchtet, können wir sofort constatiren, wenn wir den Strom unterbrechen. Im gleichen Momente verschwindet auch die Aureole. Uebrigens ist die Ausführung dieses Versuches ganz unnöthig, da uns schon die Beobachtung der Strömungserscheinungen lehrt, dass jedes Gastheilchen in dem Momente, wo es in das Gebiet, welches als Aureole erscheint, eintritt, leuchtend wird und sein Leuchtvermögen sofort wieder verliert, sobald es die Aureole verlässt.

Wäre das Leuchten eine Folge chemischer Veränderung des Gases, so wäre ganz unverständlich, warum die Aureole den Kern der Entladung als *geschlossene* Hülle umgiebt, es könnten die Gastheilchen nur in der oberen Hälfte der Bahn leuchtend erscheinen, die Aureole müsste unten offen sein.

Immerhin wäre denkbar, dass wenigstens für sehr kurze Zeit ein Nachleuchten möglich wäre, dass also die obere Hälfte der Aureole gegen die Grenze der Entladung mehr oder weniger verschoben wäre.

Somit entsteht die weitere Frage, auf welche Weise kann man den Verlauf der Stromlinien innerhalb der Aureole feststellen?

Bekanntlich kann man das Vorhandensein und die Richtung eines Stromes am einfachsten mit der Magnetnadel prüfen. Auf diesem Wege glaubte H. Hertz[1]) festgestellt zu haben, dass aus der Form der Lichterscheinungen keinerlei Schluss auf den Verlauf der Stromlinien gezogen werden könne, dass das Leuchten des Gases vielmehr nur ein Phosphoresciren unter dem Einflusse der durch den Strom erregten Kathodenstrahlen sei, da die von ihm bestimmten Stromlinien auch nicht

1) H. Hertz, Wied. Ann. **19.** p. 782. 1883.

annähernde Uebereinstimmung mit der Form der Lichterscheinungen zeigten.

Auf die besprochenen Versuche angewendet erscheint dieses Ergebniss der Hertz'schen Untersuchungen sehr sonderbar. Das negative Glimmlicht hat bei dem angewandten Drucke eine Dicke von etwa 2 mm, so dass gemäss der starken Absorption der Kathodenstrahlen in dichteren Gasen anzunehmen wäre, dass sie sich nicht merklich über 2 mm von der Electrode entfernen könnten, also für den weiteren Verlauf der Entladung ganz ausser Betracht kämen. Gleiches gilt aber auch für die Hertz'schen Versuche selbst und Hertz fügte deshalb die Bemerkung hinzu: „d. h. von Strahlen, welche ihrer Natur nach identisch sind mit den Kathodenstrahlen. Der Name wird offenbar unpassend, wenn er auch die Strahlen der positiven Schichten umfassen soll."

Wir müssten demnach die Existenz weiterer gekrümmter Strahlen annehmen, welche bei unseren Versuchen augenscheinlich ganz oder nahezu den Verlauf der Stromlinien haben müssten. Wozu aber diese Complication?

Nach meiner Ansicht rührt die ganze Schwierigkeit daher, dass die von Hertz bestimmten Stromlinien nicht die *wahren* Stromlinien sind, da sich die Bestimmung auf einen Satz über die Beziehung der Stromlinien und Magnetkraftlinien gründet, welcher im gegebenen Falle nicht zutreffend sein kann. Der Satz sagt aus, dass auf einer leitenden Platte die magnetischen Kraftlinien senkrecht stehen zu den Stromlinien, so dass sich diese construiren lassen, wenn erstere bekannt sind. Dieser Satz gilt aber nur für stationäre Ströme in homogenen Platten. Wenn nun auch Hertz viele Beweise dafür beigebracht hat, dass Entladungen unter Umständen anscheinend continuirlich werden können, so dürfte bisher doch nur bewiesen sein, dass die Zahl der Intermittenzen eine sehr hohe, experimentell nicht mehr bestimmbare sein kann. Aber nehmen wir selbst an, dass die Strömung thatsächlich stationär sei, so könnte der Satz doch aus dem zweiten Grunde keine Anwendung finden, weil nach Hittorf für stationäre Ströme in Gasen der specifische Widerstand der Stromdichte umgekehrt proportional ist und weil die Stromdichte, somit auch der specifische Widerstand des Gases in dem von Hertz benutzten plattenförmigen Ent-

ladungsgefäss an verschiedenen Punkten jedenfalls ausserordentlich verschieden war. Aehnliches gilt für die besprochenen Versuche über die Aureole.

Die Ablenkung einer Magnetnadel wird also unmöglich dazu dienen können den Stromverlauf in der Aureole festzustellen, weil die Stellung der Magnetnadel fast ausschliesslich durch den starken Strom in der Axe der Entladung bedingt wird und die schwachen Stromfäden, welche sich durch die Aureole abzweigen, kaum zur Geltung gelangen können.

Sind aber in der Aureole Ströme vorhanden, so muss ein genäherter Magnet dieselben beeinflussen und dies ist thatsächlich der Fall. Die Aureole ist sogar gegen Annäherung eines Magneten ausserordentlich empfindlich und verschiebt sich ganz so, wie wenn sie zusammengesetzt wäre aus einem Bündel äusserst biegsamer Stromfäden, welche den in Fig. 7 (rechts) dargestellten Verlauf nehmen.

Wäre nur die rothe Lichtsäule in der Mitte der Aureole oder nur ein Theil der Aureole an der Leitung des Stromes betheiligt, so wäre nicht verständlich, dass der Zusammenhang des Ganzen bei Annäherung eines Magneten völlig ungeändert bleibt und gleichmässige Verschiebung aller Theile des Lichtgebildes eintritt.

Eigenthümlich erscheint allerdings der Umstand, dass sich die Aureole mehrere Centimeter hoch dicht an der oberen Electrode hinaufzieht und dass sie beim gewöhnlichen Lichtbogen zuweilen die Form einer hoch aufflackernden, spitzen Flamme annehmen kann, so dass es schwer hält sich vorzustellen, dass in dieser Flamme der Strom auf der einen Seite hinauf-, auf der anderen hinuntersteigt.

Geht man aber von möglichst niedrigen Spannungen zu immer höheren über, so erkennt man leicht, dass sich die Aureole um so mehr in die Höhe zieht, je grösser die Stromarbeit, d. h. die erzeugte Temperatur des Gases, dass also die gute Leitungsfähigkeit des stark erhitzten Gases den Strom nöthigt der aufsteigenden heissen Luft nachzugehen und ebenso complicirte Wege zu beschreiben, wie wir sie ihm durch beliebig geknickte und verbogene Drähte aufzwingen können. Wie hiernach zu erwarten, ändert sich thatsächlich auch nichts an der Form der Aureole, wenn wir die obere Electrode mit

Glas umhüllen bis auf die Endfläche, sodass sicherlich nur aus *dieser* Strom austreten kann und nicht etwa Strom aus den Seitenflächen der Electrode Strom in die scheinbar dicht anliegende Aureole übergeht.

Dass in manchen Fällen, z. B. beim Fortblasen des Lichtbogens mittels eines Magneten, der Lichtbogen sich in feine Fäden ähnlich einer Löthrohrflamme zuzuspitzen scheint, rührt hauptsächlich daher, dass Staubpartikelchen etc., welche von der Luftströmung mitgerissen werden und im Lichtbogen in helles Glühen kommen, ihren Weg als leuchtende Linien verzeichnen und so den Eindruck scharfer Spitzen hervorbringen.

V. Umgehung von Hindernissen.

Wäre das Leuchten der Aureole eine Phosphorescenzerscheinung infolge von Kathodenstrahlen, so müsste man durch einen in den Weg der Strahlen gebrachten undurchlässigen Schirm darauf einen Schatten entwerfen können. Wäre es Phosphorescenz durch chemische Wirkung, so müsste man durch Einschalten passender Hindernisse in den aufsteigenden Luftstrom leuchtende Flammen, deren Form nicht durch mögliche Stromlinien bestimmt wird, abzweigen können. Ich habe deshalb weiter den Einfluss solcher Hindernisse untersucht.

Bringt man ein Stück Metall in den Weg der Entladung, so könnte man erwarten, dass sich dasselbe als Secundärelectrode verhalten werde, ebenso wie ein Metallstück, welches in eine von Strom durchflossene Flüssigkeit eingelegt wird. Dies ist indessen nur dann der Fall, wenn das Potentialgefälle in der der Länge des Metallstückes entsprechenden Länge der positiven Lichtsäule gleich dem Kathodengefälle an dem Metall ist. Ist es kleiner, so wird wohl Influenz in dem Metall eintreten, der Strom kann aber nicht durch dasselbe hindurchgehen, es werden lediglich an den Enden electrische Doppelschichten sich ausbilden, welche keine statische Wirkung nach aussen ausüben können, sodass sich das Metallstück genau ebenso wie ein Isolator verhält. Der Lichtbogen sammt der ihn umhüllenden Aureole biegt sich einfach um das Hinderniss herum, wenigstens wenn dasselbe genügend gross ist um keine nennenswerthe Temperaturerhöhung zu erfahren. Die Fig. 7 (linke Hälfte) zeigt z. B. die Aenderung der Aureole beim Ein-

schieben eines gekrümmten isolirten Eisenblechs. Die Aureole wird deformirt, wie es dem veränderten Lauf der Stromlinien (mit Rücksicht auf die gute Leitungsfähigkeit des erhitzten Gases) entspricht, eine Loslösung phosphorescirender Gasmassen findet nicht statt, ebensowenig eine Schattenbildung hinter dem Bleche.

Bringt man ein solches Blech mit einem Loch in der Mitte quer im Recipienten an, so ist die Aureole genöthigt sich durch das Loch hindurchzuzwängen, wie es dem Verlaufe der Linien entspricht und gleiches gilt für Schirme aus isolirenden Substanzen, wie Glimmer, Asbest und Backstein.

Sehr dünne Schirme werden an den Rändern der Oeffnung rasch bis zum Schmelzen erhitzt und der Lichtbogen bewirkt so ganz von selbst Erweiterung der Oeffnung bis zur Beseitigung des Hindernisses, mag es ein Leiter oder ein Isolator sein.

Dass auch die Stromlinien im Innern der Aureole der Deformation der äusseren Oberfläche folgen, ergiebt sich aus der Gestaltänderung der von der Aureole umschlossenen inneren gelblichen Lichtmasse, welche etwa die Hälfte des Durchmessers der Aureole besitzt, sowie der röthlichen, zuweilen geschichteten Lichtmasse in der Nähe der Axe. Letztere wird allerdings nur sehr wenig beeinflusst.

Ein Hinderniss eigenthümlicher Art, welches aber im Princip ebenso wirkt wie ein kalter fester Körper, ist ein kalter Strahl desselben oder eines anderen Gases. Um den Einfluss solcher Gasstrahlen zu untersuchen, habe ich durch eine enge Stahlcapillare Luft, Leuchtgas oder Oeldämpfe in den Lichtbogen (im Vacuum) eingeblasen, wobei die Capillare gegen die Einwirkung der intensiven Hitze durch umgeleitetes Wasser (in doppelter Stahlhülle) geschützt wurde.

Die Erscheinungen waren fast dieselben, welche man erhält, wenn man einen dünnen Luftstrahl durch eine Kerzenflamme bläst. Es bildete sich eine Art Löthrohrflamme, welche bei Verwendung von Leuchtgas oder Oeldampf auch thatsächlich eine Flamme war. In den Lichtbogen wurde gewissermaassen ein Loch gebohrt, dasselbe war aber nicht der Form des Luftstrahles entsprechend rund, sondern ein in der Richtung der Axe der Entladung verlängerter Schlitz. Der Luftstrahl bietet offenbar dem Durchgang der Entladung ein Hinderniss,

wie etwa ein Glasstab und bedingt deshalb Spaltung des Lichtbogens in zwei Theile, von welchen der eine rechts, der andere links an dem Luftstrom vorbeigeht. Erst in grösserer Entfernung von demselben findet wieder Vereinigung zu einem einzigen Strom (wohl auch infolge der electrodynamischen Anziehung) statt.

Würde hiernach die Entladung auf beiden Electroden in Glimmentladung endigen, so müsste, wenn die Electroden einander genügend nahe stehen, *auf beiden eine Art Schatten des Luftstromes* entstehen, wie ich dies bei früherer Gelegenheit in Luft von gewöhnlicher Dichte thatsächlich beobachtete.[1])

VI. Isotherme Flächen.

Laufen die Stromlinien in der Nähe der Oberfläche der Aureole derselben parallel und sind ausserhalb der Aureole keine Stromlinien vorhanden, so muss dies auch durch die Temperaturvertheilung zum Ausdruck kommen. Ich habe deshalb ein Thermometer in den Recipienten gestellt, sodass sich das Gefäss desselben zunächst ausserhalb der Aureole, aber dicht an deren Grenze befand. Die Temperatur stieg nur ganz langsam und wenig. Wurde es nun aber in den äussersten Saum der Aureole hineingerückt oder wurde diese durch Annäherung eines Magneten mit dem Thermometergefäss in Berührung gebracht, so stieg die Quecksilbersäule rapid und würde vermuthlich eine Höhe von etwa 400° erreicht haben, wenn die Scala (dieselbe reichte nur bis 360°) hinreichend ausgedehnt gewesen wäre. Dass die Temperatur nicht höher war, schliesse ich daraus, dass das Thermometer bei längerem Verweilen in der Aureole keinen Schaden nahm.

Allerdings gilt diese Temperatur von 400° nur für die äusserste Grenze der Aureole. Im Innern derselben sind wesentlich höhere Temperaturen vorhanden, wie ich durch Einbringen einer an einem Glasstabe befestigten Asbestfaser erkennen konnte. Schon etwa 3 cm vom Rande der Aureole kam die Faser deutlich zum Glühen und der Grad des Glühens wurde um so intensiver, je weiter dieselbe gegen die Axe der Entladung vorgeschoben wurde. Im axialen Theil ist die

1) O. Lehmann, Wied. Ann. **44.** p. 645. 1891.

Hitze so gross, dass Asbest geschmolzen wird, Glas zum Kochen kommt und alle Metalle sich verflüchtigen. Diesen Wärmegraden entspricht auch die rasche Erhitzung der grossen Recipienten, welche trotz ihrer Masse und ihrer grossen Oberfläche schon nach wenigen Minuten wieder mit Wasser gekühlt werden müssen.

Auch durch diese Versuche scheint mir sichergestellt, einestheils dass die Aureole thatsächlich von Stromlinien erfüllt ist und anderentheils, dass sie auch wirklich sämmtliche Stromlinien in sich enthält.

Allerdings ist nicht in allen Fällen die Entscheidung so einfach, wie bei dem besprochenen Falle, in welchem die Electroden dicke Kupferklötze und das Gas ein Gemisch von Luft mit Jod und dampfförmigem Talg war. Lässt man z. B. den Talg fort, so dass nur Luft mit Joddämpfen gemischt den Recipienten erfüllt, so ist die grüne Aureole weniger hell und weniger ausgedehnt, es zeigt sich aber ausserhalb derselben, scharf durch eine ganz dünne dunkele Schicht davon abgegrenzt, eine neue, intensiv blaue Aureole, deren Licht nicht wie das der grünen nach Aussen hin intensiver wird und dann an einer scharf gezeichneten Fläche aufhört, sondern sich nach und nach verliert, so dass man nicht genau angeben kann, wo die eigentliche Grenze ist. Die Temperatur dieser blauen Hülle ergab sich zu etwa 250°. Durch den Magneten wurde sie ebenso beeinflusst wie die grüne, sie ist also gleichfalls von Stromlinien durchsetzt. Die niedrige Temperatur spricht dagegen, dass sie glühender Joddampf sei; die Ablenkung durch den Magneten beweist, dass das Licht kein Fluorescenzlicht ist. Die einzige befriedigende Erklärung für das Auftreten dieser verschiedenfarbigen Schichten erhalten wir, wenn wir annehmen die Flächen gleicher Färbung seien Flächen gleicher Temperatur oder *isotherme Flächen*.

Da das Leuchten durch den Strom hervorgerufen wird und kein Glühen, sondern ein Phosphoresciren ist, kann man allerdings vermuthen, dass in erster Linie die Stromdichte für die Färbung maassgebend sein werde. Insofern indess die Wärmeentwickelung pro Raumeinheit der Stromdichte (nicht dem Quadrate der Stromstärke) proportional ist, dürften die Flächen gleicher Temperatur und gleicher Stromdichte nahezu zusam-

menfallen. Erstere werden etwas mehr nach oben ausgebogen sein.

Zweckmässiger als durch die Färbung lassen sich einzelne Temperaturflächen beobachten durch das Unsichtbarwerden von Dunstkügelchen in heissen Regionen (infolge von Verdampfung) und durch das Sichtbarwerden von Oeldämpfen infolge der Ausscheidung von Russ.

Ich brachte zu diesem Zwecke über dem Luftpumpenteller ein mit Oel gefülltes Porzellanschiffchen an, welches durch eine galvanisch glühende Eisendrahtspirale erhitzt werden konnte und zur Absonderung einzelner Dunstfäden mit einem gitterartig durchbrochenen Deckel aus Asbest bedeckt wurde. Einfacher kann man auch eine dünne Electrode verwenden, welche in einen Napf mit Oel eingesetzt ist und durch ihre eigene Wärme das Oel verdampft, auch kann man eine dickere Electrode napfartig aushöhlen und die Höhlung mit Talg ausgiessen.

Die Fläche, an welcher die aufsteigenden Dunstfäden verschwinden, ist die der Siedetemperatur des Oels entsprechende Fläche. Dieselbe liegt nahe der Grenze der Aureole, ausserhalb derselben. Die Fläche, an welcher die Dunstfäden als hellleuchtende gelbe Streifen wieder zum Vorschein kommen, in der Nähe der Grenze der rothgelben Lichtmasse gelegen, ist der geometrische Ort der Punkte, an welchen die Zersetzungstemperatur des Oels herrscht. Es scheidet sich hier, ebenso wie in einer Oel- oder Kerzenflamme, aus dem Kohlenwasserstoff feinzertheilter Kohlenstoff aus, welcher zur hellen Gelb- oder Weissgluth kommt.

Noch weiter aufsteigend verschwinden die Fäden wieder, da die feinzertheilten Kohlenpartikelchen verdampfen und erst beim Verlassen dieses Gebietes hoher Temperatur kommen sie von neuem als gelb leuchtende Streifen zum Vorschein, welche entweder zu farblosem Gas sich zurückbilden (oder verbrennen) oder aber weiterhin als schwarze Rauchstreifen ihren Weg fortsetzen, welche, in die Nähe der Wände des Recipienten kommend, offenbar infolge electrischer Ladung, von diesen angezogen werden und sich in Form scharf begrenzter, genau ihren Querschnitt darstellender, schwarzer Russflecke niederschlagen. Dieser Russ ist manchmal feinpulverig oder körnig,

besteht aber auch zuweilen, z. B. bei Anwendung von Naphtalin, aus verhältnissmässig harten Fäden.

Wird der Oeldampf der Entladung nicht in einzelnen Streifen, sondern in zusammenhängendem Strom zugeführt, so erscheint im Entladungsraume eine Art Flamme, welche auf den ersten Blick viel Aehnlichkeit mit einer gewöhnlichen mehr oder minder russenden leuchtenden Kerzenflamme hat.

Die nähere Beobachtung zeigt, dass die Flamme hohl ist und bei geringer Stromstärke einen an die positive Electrode sich anschliessenden geschlossenen Sack darstellt, der von der negativen Electrode durch einen mehr oder minder breiten Zwischenraum getrennt ist (Fig. 8). Das Auftreten dieses Sackes beweist, dass die Temperatur in der Axe der Entladung keineswegs gleichmässig ist, dass vielmehr in der Nähe der Kathode, etwa da, wo der dunkle Raum sich befindet, die Temperatur niedriger ist und dass dieses Gebiet niedriger Temperatur die ganze positive Lichtsäule in sich schliesst.

Bei vergrösserter Stromstärke nähert sich das geschlossene Ende des Sackes der Kathode und erhält ein Loch (Fig. 9). Offenbar wird nun durch die von unten aufsteigende oder die Kathode umgebende heisse Luft die Condensation des Kohlenstoffs unmöglich gemacht.

Das Auftreten dieser Oeffnung ist aber nicht die einzige Aenderung, welche der Sack in der Nähe der Kathode erleidet, vielmehr zeigen sich an demselben noch eigenartige Formänderungen, welche nur verständlich werden, wenn wir annehmen, dass dort zwei entgegengesetzte Luftströme zusammentreffen und einen Wirbelring bilden.

VII. Der Kathodenwirbel und die Schichtung.

Bereits oben wurde darauf hingewiesen, dass der von einem hellen Fleck an der Electrode ausgehende Metalldampf höchst wahrscheinlich durch electrische Kräfte vorwärts getrieben wird. Aus ähnlichen Gründen wie in anderen Fällen von electrischer Diffusion[1]) dürfte auch hier die Diffusion mit

1) Vgl. O. Lehmann, Wied. Ann. **52.** p. 458. 1894; Zeitschr. für phys. Chem. **14.** p. 301. 1894; F. Kohlrausch u. Heydweiller, Wied. Ann. **54.** p. 385. 1895; Warburg, l. c. p. 396.

Convection vereint auftreten, derart dass die Metallatome sich nicht nur zwischen den Luftmolecülen ausbreiten, sondern auch der ganzen Luftschicht einen Bewegungsimpuls geben, sodass diese von der Electrode fortströmt und, einen Wirbel bildend, in gebogenen Bahnen wieder dahin zurückkehrt.

Diese in unmittelbarer Nähe der Electrodenenden stattfindende Wirbelbewegung wird die allgemeine Luftströmung im Recipienten wenig beeinflussen und bei Anwendung der früher benutzten Mittel zur Sichtbarmachung dieser Strömung um so weniger hervortreten, als infolge der hohen Temperatur in der Nähe der Electroden alle Dunst- und Russpartikelchen sich daselbst sofort verflüssigen. Die früheren Resultate sprechen also nicht gegen das Vorhandensein einer solchen Wirbelbewegung.

Dass sie thatsächlich existirt, lässt sich aber leicht erkennen bei Anwendung dünnerer Eisenelectroden, von welchen gerade von der hellen stark erhitzten Stelle aus ein Feuerwerk von hellstrahlenden Funken ausgeht, welche durch ihre Bahnen den Bewegungszustand des Gases ebenfalls erkennen lassen.

Diese Bahnen verlaufen nun, speciell an der Kathode, wo sich vorwiegend Eisendampf bildet, so wie Fig. 10 andeutet; wenden sich also erst von der Kathode ab, kehren dann wieder zurück, um sich dann abermals abzuwenden, worauf sie ziemlich genau in gerader Richtung bis zur Wand des Recipienten weiter verlaufen und sodann dem Reflexionsgesetze entsprechend scharf gebrochen werden.

Die Kraft, mit welcher die Funken von der Electrode fortgeschleudert werden, ist augenscheinlich eine recht beträchtliche. Ueber die Natur derselben ist meines Wissens Näheres nicht bekannt, indess ist sie jedenfalls keine electrische, da das Funkensprühen bei jedem verbrennenden Eisendraht beobachtet werden kann.

Oefters beobachtete ich spiralig gewundene oder epicycloidische Bahnen der Fünkchen, gerade als ob die Fünkchen auf ihrer geradlinigen Bahn gleichzeitig eine Kreisbewegung mit kleinem Radius ausführten.

Die Ursache dieser auffälligen Erscheinung dürfte die Abweichung der Form der Eisenpartikelchen von der Kugel-

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

form im Verein mit dem Luftwiderstand sein, wie z. B. beim Bumerang. Auch könnten aus der Verbrennung der Theilchen resultirende Reactionskräfte, ähnlich wie bei steigenden Raketen, zur Wirkung gelangen.

Die Ablenkung der Funken beweist also deutlich das Vorhandensein einer von der Kathode ausgehenden wirbelnden Bewegung, welche ich kurz den *Kathodenwirbel* nennen will. Durch diesen Wirbel wird auch der ankommende Kohledampf zur Seite geblasen, sodass er nach der Condensation als ein dem Sack aufgesetzter Trichter erscheint (Fig. 11), welcher sich unter Umständen auch, der Form des Wirbels entsprechend, gegen die Kathode hin wieder verengen kann.

Der entsprechende Wirbel an der Anode scheint, wenigstens bei Eisenelectroden, der geringeren Menge von Metalldampf wegen, geringere Energie zu besitzen und sich mehr in die Länge zu ziehen. Es ist deshalb für die Formänderung, welche der Sack erleidet, ziemlich gleichgültig, welche der Electroden die obere ist, die Einschnürung erscheint stets an der Kathode.

Da, wo der von der Anode kommende Luftstrom mit dem Kathodenwirbel zusammentrifft, breitet er sich auf demselben aus und bildet ebenfalls einen Wirbel, welcher unter Umständen gleichfalls gelbleuchtend erscheint (Fig. 12).

Es kommt vor, dass von dem ganzen Sack nur dieser gelbe Wirbelring sichtbar ist, welcher frei inmitten der Aureole zu schweben scheint[1]) (Fig. 13). Häufiger sind aber einzelne Theile der Seitenwandung des Sackes allein vorhanden, sodass innerhalb der Aureole eigenthümlich eingeknickte gelbe Streifen zu schweben scheinen (Fig. 14).

Bei noch mehr gesteigerter Stromstärke nimmt die Höhe des gelben Sackes abermals zu und er erhält an beiden Enden Einstülpungen, welche die Electroden aufnehmen (Fig. 17). Die Einstülpung an der Anode schliesst sich eng an dieselbe an, diejenige an der Kathode ist dagegen viel weiter und nimmt den ganzen Kathodenwirbel auf.[2])

1) Auch bei Abwesenheit von Fettdampf kann derselbe als rothgelb leuchtende Gasmasse erscheinen.

2) Zuweilen zeigt sich auch eine der Glimmentladung entsprechende engere Hülle an der Kathode, auch wohl neben derselben eine zweite rothgelb leuchtende, vermuthlich durch Eisendampf verursachte.

Von der Einschnürung des Sackes steigen in der Regel, den allgemeinen Strömungslinien folgend, gelbleuchtende Fäden auf, welche schliesslich, sich abkühlend, in Russfäden endigen. Sie lassen erkennen, dass durch den Kathodenwirbel der Kohledampf gegen die Einschnürung des Sackes hingedrängt wird, sodass er dort in grösserer Dichtigkeit auftritt als an anderen Stellen.

Scheinbar sind diese Verhältnisse ausserordentlich einfach, indess lehrt die eingehende Untersuchung, dass weit complicirtere Fälle eintreten können, als der eben besprochene.

So kann sich unterhalb des ersten Wirbelringes ein zweiter ausbilden (Fig. 15), unter diesem wieder ein dritter etc., ja es kann sich der ganze Sack aus zehn bis zwanzig und noch mehr Wirbelringen zusammensetzen (Fig. 16), von welchen jeder nach aussen Russfäden in die Höhe sendet und nach innen eine Einschnürung des Sackes veranlasst, welche mit einer Schicht des positiven Lichtes sehr viel Aehnlichkeit zeigt und zuweilen nur durch die Oeffnung in der Mitte sich von einer solchen unterscheidet.

Treten solche Schichten des positiven Lichtes gleichzeitig mit den Wirbelringen auf, so zeigt sich in der Regel eine auffallende Beziehung zwischen beiden. Die gelben Einschnürungen des Sackes greifen zwischen die rothen[1]) Schichten hinein (Fig. 17), als ob sie durch diese veranlasst wären und ihre Entstehung lediglich dem Umstande verdankten, dass in dem dunkeln Raume zwischen zwei rothen Schichten die Temperatur niedriger ist als in den rothen Schichten selbst.

Nicht immer stimmt aber die Zahl der Einschnürungen des Sackes mit derjenigen der rothen Schichten überein, sie kann nur die Hälfte, ein Drittel oder noch weniger betragen, es können auch die Wirbelerscheinungen und Rauchfäden ganz fehlen und die Einschnürungen des Sackes nur als Rippungen auf der Innenseite erscheinen, ja es kann der Sack scheinbar aussen und innen glatt, aber durch papierdünne dunkle Scheidewände unterbrochen sein (Fig. 18), deren jede einer Gruppe Schichten des positiven Lichtes entspricht, gerade als ob sie

1) Richtiger müsste man graugrün sagen, indess ist die Farbe der positiven Schichten nach der Natur des Gases sehr veränderlich.

die Fortsetzung der ersten dieser Schichten wäre, während die übrigen zu geringe Ausdehnung besitzen, um den Sack noch beeinflussen zu können, oder als ob sie an den Rändern mit der ersten Schicht vereinigt wären.

Berücksichtigt man, dass in dem gelben Sack das Gas in gleichmässiger langsamer Strömung von unten nach oben sich befindet, so beweist dieser Versuch, dass die Schichtenbildung unmöglich auf Anhäufung besser und schlechter leitender Gasschichten beruhen kann, da ja die Gastheilchen, welche dieselben zusammensetzen, fortwährend wechseln.

Andererseits kann das plötzliche Verschwinden der Russtheilchen, sobald sie bei ihrer aufsteigenden Bewegung in eine leuchtende Schicht eintreten, nur in der Weise gedeutet werden, dass dort die Temperatur so hoch ist, dass sie verdampfen und erst nach dem Verlassen der Schicht sich wieder ausscheiden. Daraus folgt, dass die Stromwärme in den hellen und dunkeln Schichten eine wesentlich verschiedene ist.

Der Mangel einer Ausbiegung der Stromlinien um die dunkeln Schichten herum erscheint nun nur verständlich, wenn Spannungsdifferenz und Stromstärke, somit die Stromarbeit für beide dieselben sind. Das Resultat der Stromarbeit in den dunkeln Schichten, welche auch bei ruhendem Gas (wie in Geissler'schen Röhren) lange Zeit unverändert bleiben, kann aber nicht etwa etwas anderes sein als Wärme. Es dürfte also überhaupt unmöglich sein auf Grund der Annahme, die Entladung im Lichtbogen sei eine stationäre electrische Strömung, zu einer Erklärung der Schichtung zu gelangen, vielmehr dürfte es nothwendig sein anzunehmen, jede Schicht stelle eine gesonderte Partialentladung dar, wie ich schon gelegentlich einer früheren Untersuchung[2]) angenommen hatte.

Zu jener Annahme wurde ich geführt durch die Untersuchung des Entladungspotentialgefälles in electrodenlosen Vacuumröhren.[3]) Man denke sich in der Nähe eines isolirten kugelförmigen Conductors in radialer Richtung (in einer Reihe

1) Wie etwa Erzeugung chemischer Energie, wobei eine Anhäufung der Producte der chemischen Trennung eintreten musste.

2) O. Lehmann, Wied. Ann. 22. p. 340. 1884.

3) l. c. p. 342 und Wied. Ann. 47. p. 426. 1892.

hintereinander) eine Anzahl evacuirter Glaskugeln aufgestellt. Wird der Conductor plötzlich geladen, so wird zunächst die erste Kugel aufleuchten, indem in ihr Influenz eintritt, wie in einem isolirten metallischen Leiter; dadurch wird aber das electrische Feld derart geändert, dass nun auch in der zweiten Entladung eintreten muss, und diese wird wieder Entladung in der dritten veranlassen etc. Die zugewandten Seiten der Glasgefässe werden hierdurch entgegengesetzt electrisch werden. Man denke sich nun das Glas etwas leitend und die Zwischenräume der Glasgefässe durch schlecht leitende Stoffe überbrückt. Nach einiger Zeit werden sich die entgegengesetzten Ladungen ausgeglichen haben und es kann, falls die Spannung auf dem Conductor constant gehalten wird, von neuem Entladung eintreten. In regelmässigen Pausen wird sich dieser Vorgang wiederholen und dabei stellt jede Entladung in einer Kugel eine gesonderte Partialentladung dar.[1])

Auch bei dieser Annahme müssen wir also Sonderung des Gases in gut und schlecht leitenden Schichten annehmen, indess ist nicht nothwendig anzunehmen, dass dieselben dauernd bestehen, vielmehr würden dieselben in jedem Momente neu entstehen, da das Aufhören einer Partialentladung nicht durch das Vorhandensein einer schlecht leitenden Schicht bedingt ist, sondern durch die Langsamkeit der Zuströmung der Energie, welche nur mit der Geschwindigkeit $3 \cdot 10^8$ m pro Secunde zu wandern vermag, während das Verschwinden der Energie in der Schicht, in welcher Entladung stattfindet, fast momentan geschieht.[2]) Die Zahl der Partialentladungen pro Secunde wird natürlich eine sehr grosse sein müssen und den Hertz'schen Untersuchungen zufolge[3]) kann sie unter gewissen Umständen nicht kleiner sein als 1—2 Billionen.

Die durch eine Partialentladung fortgeführte Electricität wird sich an den Grenzen der Schicht in Form electrischer Atomladungen anhäufen, welche nur langsam convectiv weiter wandern und sich mit den von entgegengesetzter Seite kommenden ausgleichen können. Die erste Serie von Partialentladungen

1) Vgl. dagegen G. Wiedemann, Electr. **4.** (1) p. 581. § 756.
2) O. Lehmann, Wied. Ann. **22.** p. 344. 1884.
3) H. Hertz, Wied. Ann. **19.** p. 782. 1883.

wird sich also auf die Axe der Entladung beschränken. Die zweite Serie kann hier der angehäuften Electricitäten wegen nicht eintreten, wohl aber daneben und zwar nicht weit davon, da dort das Gas erhitzt, also besser leitend geworden ist.

Die Schichten, welche also zuerst nur Punkte auf der Axe waren, werden sich seitlich ausbreiten zu leuchtenden Flächen und zwar wird die Ausbreitungsrichtung übereinstimmen mit der Richtung, in welcher von aussen die Energie zuströmt, ebenso wie ein Krystall nach der Richtung am schnellsten wächst, von welcher ihm am meisten krystallisirbares Material zugeführt wird. Die Form der Schichten wird also der Form der Stromflächen der Energie, d. h. den Niveauflächen entsprechen müssen.

IX. Die Niveauflächen der Entladung.

In einem bezüglich des electrischen Widerstandes homogenen Körper verlaufen die Niveauflächen des Potentials bei stationärer Strömung bekanntlich senkrecht zu den Stromlinien. Dies gilt nicht mehr genau für einen Körper von ungleichmässigem specifischen Widerstand und für nicht stationäre Strömung.

Versucht man nun in Fig. 7 (rechte Hälfte) die Niveaulinien einzutragen, so erhält man eine Zeichnung (Fig. 19), welche in überraschender Weise die Schichtung darstellt, welche man thatsächlich beobachtet, wenn auch die Schichten sich in Wirklichkeit nicht bis zur äussersten Grenze der Aureole fortsetzen.

Die Uebereinstimmung ist allerdings keine ganz vollkommene, wie man aus den Fig. 20—24 erkennen kann, welche die Schichtung für die reine Lichtbogen- und Gasentladung und für die Fälle, bei welchen sich das eine oder beide Glimmlichter auf Punkte reducirt haben, darstellt.

Vollkommen wird aber die Uebereinstimmung, wenn man annimmt, der specifische Widerstand des Gases vermindere sich mit wachsender Stromdichte, was nach Hittorf nothwendig angenommen werden muss, und wenn man ausserdem Rücksicht nimmt auf die Thatsache, dass an der Kathode ein eigenthümlicher Widerstand auftritt, welcher die Entstehung

eines starken Potentialabfalls, des sogenannten Kathodengefälles, zur Folge hat.

Sehr merkwürdig ist der Verlauf der Schichten zwischen zwei dicken cylindrischen Electroden, welchen Fig. 24 darstellt. Man muss hier berücksichtigen, dass für den Verlauf der Niveaulinien an den Electroden nur die hellen Punkte maassgebend sind, an welchen die Electricität thatsächlich austritt. Die übrige Oberfläche der Electroden scheint sich mit einer ihre Ladung compensirenden electrischen Schicht zu bedecken, welche, wie bei einem leitenden Hinderniss (§ V), eine unwirksame Doppelschicht bildet. Aber auch in dieser Beziehung zeigt sich hier eine Anomalie, insofern da, wo die zurückgebogenen Schichten die Anode treffen, Glimmlicht auftritt. Vermuthlich ist die Strömung in demselben zu schwach, um den Verlauf der Schichten stören zu können.

Einen anderen sehr interessanten Verlauf der Schichtung beobachtete ich bei Annäherung dünner in grosse Blechscheiben eingesteckter Electroden. Das positive Licht, welches gewöhnlich vom negativen durch den sogenannten dunkeln Trennungsraum getrennt ist, sprang plötzlich auf dieses über, und zwar in dem Maasse, als man die Electroden näherte, eine Schicht nach der anderen, sodass auf das negative Glimmlicht conische rothe Ringe aufgesetzt erschienen; ja schliesslich ging das positive Licht selbst auf das auf der Platte ausgebreitete negative Licht über (Fig. 25) und zuweilen endete diese blaue Glimmlichtscheibe auf der Kathode in einem damit unmittelbar zusammenhängenden, der Platte ebenfalls ziemlich dicht anliegenden rothen Ring, sodass also die Kathode auf einer vielleicht ein Quadratdecimeter messenden Ringfläche mit positivem Licht bedeckt erschien, welches, wie auch das blaue Glimmlicht, etwas gegen die Anode zu aufgebogen war.

Der Verlauf der Schichtung bei Fig. 25 lässt deutlich erkennen, dass die von der Anode ausgehenden Stromlinien regelmässig bis zur leuchtenden Hülle der Kathode, d. h. bis zur Grenze des negativen Glimmlichtes verlaufen, dann aber scharf, nahezu in rechtem Winkel umbiegen, um in die Kathode einzutreten.

Eine solche scharfe Brechung der Stromlinien muss an der Grenze zweier Medien von verschiedenem Leitungsvermögen

eintreten und derart verschiedenes Leitungsvermögen, welches in der Verschiedenheit des Potentialgradienten zum Ausdruck kommt, zeigen thatsächlich das roth und das blau leuchtende Gas bei Entladungen. Die Beobachtung widerspricht also nicht der Annahme, dass die Schichten die Niveauflächen oder Stromflächen der Energie darstellen.

Karlsruhe, 20. April 1895.

9. *Ueber die Doppelbrechung der electrischen Strahlen; von A. Righi.*

Im zweiten Hefte des laufenden Jahrganges dieser Annalen befindet sich eine Abhandlung von Hrn. K. Mack, worin Versuche beschrieben sind, welche darthun, dass eine parallel zu den Fasern geschnittene Tannenholzplatte sich gegen die electrischen Strahlen ebenso verhält, wie eine doppelbrechende Platte gegenüber den Lichtstrahlen. Besagte Abhandlung ist vom November 1894 datirt.

Bereits am 27. Mai 1894 habe ich indessen der Akademie der Wissenschaften in Bologna eine Abhandlung[1]) vorgelegt, welche sich auch schon seit mehreren Monaten in den Händen des Publikums befindet und in welcher — und zwar in §§ 41, 42 und 48 — den Versuchen des Hrn. Mack gleichwerthige Experimente, sowie andere von analoger Bedeutung beschrieben sind. Durch diese Experimente habe ich nicht nur die Doppelbrechung der electrischen Strahlen im Holze und die verschiedene Absorption der letzteren, je nachdem ihre Schwingungen parallel oder senkrecht zu den Holzfasern stattfinden, constatirt, sondern ich erhielt auch im Holze die Erscheinungen der elliptischen und circularen Polarisation, die letztere mit Hülfe einer Holzplatte von solcher Dicke, dass sie sich wie eine $\lambda/_4$-Platte verhielt. Auch ich verglich, wie Hr. Mack, das Verhalten des Holzes mehr mit demjenigen des Turmalins als des Kalkspaths oder Quarzes.

Den Versuch des Hrn. Mack, welcher das Fehlen der Doppelbrechung in einer senkrecht zu den Fasern geschnittenen Holzplatte nachweist, habe ich — obschon auch mir natürlich

1) Ueber electrische Schwingungen von kleiner Wellenlänge, und über ihre Verwendung zur Hervorbringung von Erscheinungen, welche den hauptsächlichsten optischen Erscheinungen analog sind. — Mem. R. Acc. delle Scienze Bologna (4) **4**. p. 487. Ein Auszug dieser Abhandlung ist Nuov. Cim. (4) **1**. p. 25—40. 1895, ein anderer Beibl. **19**. p. 357 erschienen; eine Uebersetzung wird demnächst in der Zeitschrift L'Eclairage Electrique erscheinen.

die Idee desselben gekommen war — nicht ausgeführt, weil mir das Resultat, zu welchem derselbe führen musste, aus Gründen der Symmetrie a priori evident schien.

Ich bin überzeugt, dass Hr. Mack meine Abhandlung noch nicht kennt, oder sie wenigstens zur Zeit der Einsendung seiner Arbeit an die „Annalen" nicht kannte; und es freut mich, dass seine Versuche die von mir zuvor publicirten durchaus bestätigen. Ich muss jedoch hinzufügen, dass ich sein Vertrauen in die Möglichkeit, die Doppelbrechung electrischer Strahlen mit Hülfe einer Kalkspathplatte zu erhalten, nicht theile, und zwar aus den Gründen, die ich im § 48 meiner Abhandlung dargelegt habe. Jedenfalls beabsichtige ich demnächst meine Untersuchungen über diesen Gegenstand, von welchen ich eine Zeitlang durch andere Arbeiten abgehalten wurde, wieder aufzunehmen.

Bologna, Phys. Institut der Universität, März 1895.

10. *Ueber ein Normalbarometer für das Laboratorium; von K. R. Koch.*

Wenn für irgend welche Untersuchungen genauere Werthe des Luftdruckes nothwendig sind, so pflegen sich diese auf die Angaben eines sogenannten Normalbarometers zu stützen. Wohl einem jeden ist es hierbei schon peinlich gewesen, dass die Richtigkeit der Angaben desselben nur auf Treu und Glauben in den Namen des Verfertigers beruhen, da es nicht möglich ist, diese Angaben in anderer Weise zu verificiren. Wie wenig zuverlässig diese jedoch sind, geht wohl am besten aus der Zusammenstellung der Untersuchungen von Waldo, Sundell und Brounow, 1883—1887 von Hrn. Köppen[1]) hervor, indem sich hierbei Unterschiede der sogenannten Normalbarometer gegeneinander von über 0,6 mm ergaben, während die Ablesevorrichtungen der meisten dieser Barometer doch wohl eine Genauigkeit von 0,01 bis 0,02 mm gestatteten. Gewöhnlich wird man sich nun trotzdem mit den Angaben seines sogenannten Normalinstrumentes begnügen, unangenehm fühlbar wird jedoch diese Unsicherheit, wenn das betreffende Institut, wie das physikalische der hiesigen Technischen Hochschule zwei sogenannte Normale besitzt, die in ihren Angaben nicht unwesentlich voneinander abweichen. Beide stammen von berühmten Barometerfabrikanten, scheinbar ist das Vacuum bei beiden gut[2]), die Scala richtig; die Abweichungen beider sind zudem nicht constant, sondern ändern sich unregelmässig. Fasst man die möglichen Fehlerquellen ins Auge, so scheinen hauptsächlich die folgenden hierbei in Betracht zu kommen. Da das Mittel aus allen Beobachtungen für das Barometer *A* einen niedrigeren Stand ergiebt als für *B*, so müsste entweder in *A* das Vacuum nicht so vollkommen sein, wie in *B*, oder die specifischen Gewichte des Quecksilbers sind in den beiden

1) Köppen. Met. Zeitschr. 7. p. 241. 1890 ff.

2) In das eine ist bei einem Transport neuerdings Luft hereingekommen und es ist deshalb behufs erneuerter Füllung auseinandergenommen.

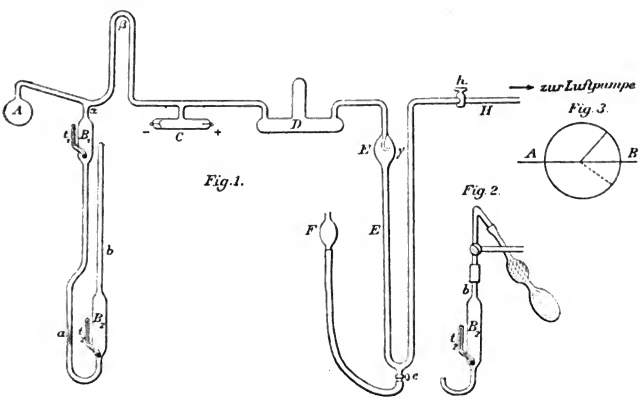
Barometern verschieden. Die Unregelmässigkeiten der Differenzen zwischen beiden erklären sich wohl einwurfsfrei einestheils aus Wirkungen von Capillaritätsfehlern des einen, dessen Lumen nur 12 mm betrug, anderentheils und wie ich glaube der Hauptsache nach daraus, dass die attachirten Thermometer nicht genau die Temperatur des Quecksilbers angeben. Die Untersuchungen mit dem zu beschreibenden Normalbarometer werden die Richtigkeit dieser letzten Behauptung bestätigen.

Ich bemühte mich deshalb ein verhältnissmässig einfaches Barometer zu construiren, dessen Vacuum sich jederzeit prüfen, bei dem die Temperatur der Quecksilbersäule sich einwurfsfrei messen lässt und das jederzeit, wenn nöthig, erlaubt, das specifische Gewicht seines Quecksilbers mit der nöthigen Präcision zu bestimmen; die Weite der Rohre, in denen die Beobachtung stattfand, wurde selbstverständlich so gross gewählt (25—30 mm), dass die Capillaritätsfehler verschwindend klein sind.

Zunächst wurde die grösste Sorgfalt auf möglichste Reinheit des Quecksilbers verwendet; diese Reinigung geschah folgendermaassen. Das mit verdünnter Salpetersäure geschüttelte, dann gewaschene und getrocknete Quecksilber fiel (durch die eigene Schwere durch Waschleder gepresst) in äusserst feinen Tropfen durch ein ca. $1^1/_2$ m langes Rohr, das mit Eisenchloridlösung gefüllt war; nachdem es unter verdünnter Salzsäure gesammelt war, wurde es gewaschen, getrocknet und alsdann nochmals in derselben Weise behandelt, darauf passirte es wiederum in feinen Tröpfchen ein ebensolches Rohr, das mit Kalilauge gefüllt war, dies geschah so oft, bis eine Probe mit *reinstem* Aether geschüttelt keine Trübung mehr hervorbrachte. Auf diese Weise glaube ich das Quecksilber von Leichtmetallen und Fett nach Möglichkeit gereinigt zu haben. Das wiederum mit destillirtem Wasser gewaschene und dann getrocknete Quecksilber wurde alsdann zweimal im Vacuum destillirt und wurde beim Einfüllen in das Barometerrohr, da dies durch Ueberdestilliren geschah, noch einer dritten Destillation unterworfen, sodass hierdurch das Quecksilber auch von Schwermetallen als gereinigt anzusehen ist.

Das Barometer war nun folgendermaassen construirt.

An ein Gefäss *A* (vgl. Fig. 1) zur Aufnahme des zur Füllung bestimmten Quecksilbers schliesst sich ein horizontales Rohrstück an, bei dem bei α **T**förmig das Barometer B_1 B_2 b angeschmolzen ist; bei der Füllung ist dies Rohr b oben geschlossen. Zur genaueren Bestimmung der Temperatur des Quecksilbers im Barometer sind in B_1 und B_2 in $^1/_{10}$ Grad getheilte Thermometer eingeschmolzen, die mithin *direct* in das Quecksilber des Barometers tauchen, bei a ist eine Bunte'sche Spitze angebracht. Von α aus setzt sich das horizontale Rohr weiter fort, bildet bei β einen ca. 40 cm



hohen Bogen, um zu verhindern, dass Quecksilber bei dem Ueberdestilliren in die anderen Theile des Apparates gelangt; weiter schliesst sich dann das Rohr *C* an, in das zwei Electroden eingeschmolzen sind, um die Güte des Vacuums des Apparates nach Hrn. Grumnach's Vorschlag [1]) zu prüfen; darauf folgt bei *D* ein längliches weites Rohr, das mit Phosphorsäureanhydrit gefüllt ist, um die Feuchtigkeit zu beseitigen; endlich befindet sich bei *E* ein längeres **U**förmiges Rohr, bei γ mit einem Quecksilberfang versehen, das einen Barometerabschluss gegen die Luft bildet. Das Rohr hat an seiner tiefsten Stelle einen mit Hahn versehenen Ansatz *e*, der durch

1) Grumnach, Zeitschr. f. Instr. 1. p. 248. 1886.

einen Schlauch mit dem Quecksilberreservoir F in Verbindung steht; das Stück H des Rohres mit dem Hahne h dient zum Anschluss an die Quecksilberluftpumpe.

Die Füllung des Barometers geschah in der Weise, dass man durch die Quecksilberluftpumpe in dem ganzen Apparat, nachdem durch Senken des mit Quecksilber gefüllten Reservoirs F die Verbindung mit der an H angeschmolzenen Quecksilberluftpumpe hergestellt war, ein gutes Vacuum herstellte, sodass in dem Rohr C die Kathodenstrahlen durch das ganze Rohr hindurch auftraten; die benutzte Luftpumpe war eine selbstthätige Kahlbaum'scher Construction.[1]) Das Barometer blieb zwei Tage lang bei dauernder Functionirung der Pumpe mit derselben verbunden; dann wurde, während die Luftpumpe dauernd in Thätigkeit gehalten wurde, das Quecksilber in A erwärmt und langsam nach B_1 B_2 überdestillirt. Luft, die etwa im Quecksilber noch vorhanden ist, wird durch das ständige Wirken der Luftpumpe fortgeschafft und da vorher lange Zeit Entladungen durch den ganzen Apparat geschickt waren, ist anzunehmen, dass auch die an den Glaswänden haftende Luft und Wasserschicht[2]) nach Möglichkeit entfernt war. Nachdem hinreichend Quecksilber überdestillirt war, kann entweder das Gefäss A nach Unterbrechung der Destillation an einer verengten Stelle vor a abgeschmolzen werden, oder man lässt A an dem Apparat, um nach einer Entnahme von Quecksilber aus B_2 zum Zwecke einer Bestimmung des specifischen Gewichtes des Quecksilbers die nöthige Menge von A aus wieder ergänzen zu können. Es wäre so möglich zu constatiren, ob sich das specifische Gewicht des Quecksilbers eventuell im Laufe der Zeit durch irgend welche Ursachen ändern würde. Es ist nun noch b vorsichtig zu öffnen, was am besten durch Anfeilen der Spitze und Abbrechen derselben in einem darüber gezogenen mit Hahnen verschlossenen Stücks Kautschukschlauch geschieht. Durch Oeffnen des Hahnes bei e und Heben des Quecksilbergefässes F wird dann der Barometerverschluss hergestellt; alsdann kann das Barometer bei H von der Quecksilberluftpumpe

1) Kahlbaum, Wied. Ann. **53.** p. 192 ff. 1894.
1) Frick, Phys. Technik, 6. Aufl. ed. Lehmann **1.** p. 384.

abgesprengt werden, man lässt dann durch *h* vorsichtig Luft eintreten und schliesst darauf *e* und *h*. Hierbei bemerkt man an dem Crookes'schen Rohr, nachdem das Quecksilber in *E* eingetreten, dass das Vacuum schlechter geworden ist — direct durch Messung ist jedoch diese kleine Druckzunahme nicht zu constatiren. — Nach einiger Zeit hat sich das Vacuum jedoch wieder gebessert; es scheint mithin die Verschlechterung hauptsächlich von Feuchtigkeit, die dem Quecksilber in *E* und *F* anhaftet, herzurühren. Mit einem durch *b* eingeführten Heber wurde dann soviel Quecksilber aus B_2 entnommen, dass bei mittlerem Barometerstand das Quecksilber in beiden Gefässen B_1 und B_2 einen mittleren Stand einnimmt, dieses Quecksilber wurde zugleich zur Feststellung des specifischen Gewichtes des Quecksilbers des Barometers benutzt. An das Rohr *b* wurde vermittelst Kautschukverbindung ein Dreiweghahn angesetzt, dessen einer Schenkel (vgl. Fig. 2) mit einem kleinen Handgebläse communicirte, um das Quecksilber im offenen Schenkel nach stattgehabter Beobachtung jeweils herunterdrücken zu können. Vor dem Gebrauche dreht man den Dreiweghahn um 90°, sodass B_2 mit der äusseren Luft in Verbindung gesetzt ist; man beobachtet auf diese Weise immer an einer reinen Quecksilberoberfläche. Da die Röhren B_1 und B_2 mindestens 25 mm lichte Weite besitzen sollen, so ist ein messbarer Capillaritätsfehler wegen des Steigens in dem einen Rohr und des Sinkens in dem anderen nicht zu befürchten. Der ganze Apparat war auf einem eichenen Rahmen montirt und dieser an der Hauswand befestigt.

Die Ablesungen wurden anfänglich mit einem fest aufgestellten Kathetometer gemacht, doch verliess ich bald diese Methode, da die scheinbare Genauigkeit der Ablesung durch die Unsicherheit der Einstellung auf die Quecksilberoberflächen in den weiten Röhren illusorisch wird. Ich führte vielmehr sowohl am oberen wie am unteren Meniscus die Marek'sche Ablesungsmethode ein, mit folgender Vereinfachung. Bei der Marek'schen Methode stellt man bekanntlich auf das reelle Bild eines Fadenkreuzes *und* auf das Spiegelbild desselben ein und nimmt als Ort der Oberfläche das Mittel aus beiden Ablesungen; ich benutze einfach (vgl. Fig. 3) einen schrägstehenden Faden; ist *AB* die spiegelnde Oberfläche, so wird

sich der schrägstehende Faden in der in der Figur angegebenen Weise spiegeln, der scheinbare Schnittpunkt beider liegt in der Oberfläche. Die Einstellung des horizotalen Fadens im Ocular auf diesen Schnittpunkt liess sich mit grosser Schärfe ausführen.

Das specifische Gewicht des aus dem Gefäss B_2 entnommenen Quecksilbers wurde in einem **U**förmigen Pyknometer Sprengel'scher Form [1]) in bekannter Weise unter sorgfältiger Rücksichtnahme auf die von Hrn. Volkmann [2]) beobachteten störenden Nachwirkungsdilatationen bestimmt und übereinstimmend das specifische Gewicht des Quecksilbers reducirt auf 0° im Mittel gefunden

13,59535.

Das früher einmal von mir bestimmte specifische Gewicht des Quecksilbers eines anderen Barometers war bedeutend höher nämlich 13,5971 gefunden. Da diese Differenz im specifischen Gewicht die Höhe der Quecksilbersäule um ca. 0,1 mm ändern würde, so leuchtet ein, wie nothwendig unter Umständen die specifische Gewichtsbestimmung sein kann.

Wie wenig ferner die Angaben des attachirten äusseren Thermometers mit der wahren Temperatur des Quecksilbers übereinstimmen, mag folgende kleine Tabelle zeigen.

Datum	attachirtes Thermometer	Inneres Thermometer oben	Inneres Thermometer unten	Mittel	Differenz, attach.—inn. Thermometer	Bemerkungen
1895. 2. 13.						Das Zimmer hat Luftheiz.; um ca. 4h p. m. wird die Heizung abgestellt.
11h a. m.	18,50	18,60	17,70	18,15	+ 0,35	
1 p. m.	20,80	21,30	19,75	20,53	+ 0,27	
3 p. m.	18,50	19,75	18,65	19,20	− 0,70	
1895. 4. 8.						
10h a. m.	13,0	12,5	12,20	12,35	+ 0,63	Das Zimmer war ungeheizt
3h p. m.	16,2	15,8	15,0	15,40	+ 0,80	

Sämmtliche Thermometer waren selbstverständlich calibrirt und ihre Correctionen bekannt.

Sollte nun aus irgend welchen Ursachen das Vacuum sich verschlechtert haben, so lässt sich bei H die Verbindung

1) Sprengel, Pogg. Ann. **150.** p. 459. Taf. VI. Fig. 21. 1873.
2) Volkmann, Wied. Ann. **13.** p. 209. 1881.

mit der Quecksilberluftpumpe leicht wiederherstellen und nach Senken des Reservoirs *F* das Barometer von neuem evacuiren.

In der Mitte der Messingscala ist ein kleines eisernes mit Quecksilber gefülltes Gefäss angebracht, in das ein Thermometer quecksilberdicht eingesetzt ist, um die Temperatur der Scala bestimmen zu können.

Auf diese Weise waren folgende Vortheile erreicht:

1. Das Vacuum ist durch die eingeschaltete Geissler'sche Röhre immer controllirbar und kann leicht durch Anschluss bei *H* an die Quecksilberluftpumpe, falls irgend eine Beschädigung eingetreten ist, wieder hergestellt werden.

2. Die modificirte Marek'sche Ablesung erlaubt sowohl am oberen wie am unteren Meniscus die gleiche Einstellungsgenauigkeit von 0,01 mm und erfordert oben wie unten nur je eine Einstellung und Ablesung.

3. Durch Entnahme von Quecksilber aus dem offenen Schenkel lässt sich eine specifische Gewichtsbestimmung des Quecksilbers des Barometers vornehmen und dass zu diesem Zwecke herausgenommene Quecksilber durch erneute Destillation durch reines, trockenes und luftfreies aus der Kugel *A* ersetzen.

4. Die in das Quecksilber des Barometers selbst eintauchenden Thermometer erlauben eine einwurfsfreie Bestimmung der mittleren Temperatur der Quecksilbersäule.

5. Die mittlere Temperatur der Scala wird durch das attachirte Thermometer ebenfalls mit der nöthigen Genauigkeit bestimmt.

Stuttgart, Phys. Inst. d. techn. Hochschule, 5. April 1895.

11. *Notiz über den Magnetismus des Asbests; von L. Bleekrode.*

In dem in London erscheinenden „Electrical Review" theilt Hr. A. S. C. Swinton[1]) mit, dass der Asbest ziemlich stark magnetisch sei. Da diese Thatsache bei der Herstellung gewisser Messapparate berücksichtigt werden muss, so habe ich die betreffenden Versuche wiederholt; und habe ich dabei gefunden, dass bei dem mir zur Verfügung stehenden Material[2]) die magnetische Kraft sogar noch stärker ausgebildet ist, als Swinton erwähnt, insofern nicht starke Electromagnete nöthig waren, sondern schon ein gewöhnlicher guter Stahlmagnet zur Demonstration ausreichte. Man muss sich darüber wundern, dass diese Eigenschaft, welche dem Asbest in höherem Maasse zukommt, als den meisten magnetischen Metallen (mit Ausnahme von Nickel und Kobalt) so lange unbeachtet geblieben ist, trotzdem dieses Material namentlich in den letzten Decennien in die Hände vieler gekommen ist.

Faraday in seinen allbekannten Untersuchungen über das magnetische Verhalten verschiedener Substanzen zählt den Asbest unter die *schwach* magnetischen Körper, was auffallend ist, da er mit einem sehr starken Electromagneten gearbeitet hat. Schon viel früher, im Jahre 1778, hat mein Landsmann Brugmans, der bekanntlich zuerst den Diamagnetismus des Wismuths entdeckte, bei seinen äusserst zahlreichen Versuchen über den Magnetismus verschiedener Körper, den Asbest als ein ziemlich stark magnetisches Mineral bezeichnet.[3]) Er erwähnt, dass der Stahlmagnet, welcher bei den Versuchen benutzt wurde, an jedem Pol etwa 1,5 kg tragen konnte und dass das untersuchte Material auf einer Quecksilberoberfläche sehr beweglich war. Er erkannte auch,

1) Swinton, Electric. Rev. **34.** Nr. 880. 5 Oct. 1894.

2) Das Material stammt her von der Bell asbest Cy. in London.

3) Brugmans, Magnetismus seu de affinitatis magneticis observationes; ins Deutsche übersetzt von G. Eschenbach. Leipzig, 1781. p. 138.

dass die verschiedenen Arten des Asbest nicht in gleichem Grade sich magnetisch verhielten. Er unterscheidet „reifen" Asbest, welcher aus kurzen, gleichlaufenden Fasern besteht mit strohgelber Farbe; derselbe ist stark magnetisch und hängt sich an den Polen an. Eine andere Art, welche er als „unreif" bezeichnet, von grösserer Festigkeit und von prismatischer, oft balkenartiger Gestalt, ist schwach magnetisch.

Ich benutzte einen Stahlmagnet, der 3 kg an beiden Polen zusammen tragen konnte und fand, das eine Asbestvarietät mit grünlicher Farbe und grosser Consistenz nur spurenweise angezogen wurde, wenn er in beweglicher Lage gegenüber den Polen des Magnetismus gebracht wurde; dagegen wurde ein Drahtgewebe (ohne Bindemittel zusammengeflochten) aus einer grauen Asbestsorte in geringer Entfernung zu beiden Polen angezogen und festgehalten, wie ein dünner Eisendraht. In noch auffallender Weise zeigte sich dieses an sehr dünnen Streifen, die aus dem sogenannten Asbestpapier geschnitten waren, z. B. von 40 mm Länge und 3 mm Breite. Diese hüpften bereits aus 1 cm Entfernung zu den Polen eines kleinen Electromagneten, mit 5 kg Tragkraft. Dieser Streifen zeigte nachher (wie auch schon von Brugmans nachgewiesen wurde) eine geringe Polarität; wenigstens konnte ich bemerken, dass die Pole einer Declinationsnadel von den betreffenden Enden des Streifens nachher ungleich stark angezogen wurden. Mit einem Electromagneten von ca. 100 kg Tragkraft konnte der Streifen am vom Pole abgewendeten Ende auch deutlich feines Eisenpulver anziehen.

Eine quadratische Platte von Asbestpapier (Länge und Breite 15 cm), bewegte sich aus geringer Entfernung nach den Polen und konnte mit einem kleinen Uebergewicht noch daran befestigt bleiben. Selbstverständlich benehmen sich kleine Asbestfaser und Splitter dabei als feine Eisenspähne und kommen schon aus 8 cm Entfernung in Berührung mit den Polen. Allerdings sind die meisten Asbestpräparate für technische Zwecke mit einem Bindemittel, dessen Zusammensetzung ich nicht kenne, angefertigt, ich glaube jedoch, dass, wenn auch Eisen zu den Bestandtheilen gehören sollte, es hier, wie in dem Minerale selber, in chemischer Verbindung mit anderen Elementen vorkommt und deshalb nicht als die

Ursache des auffallend starken Magnetismus betrachtet werden kann; es gibt ja viele Eisenverbindungen, die mit gewöhnlichen Magneten keine Anziehung zeigen, und wie schon bemerkt, ein Präparat ohne Bindemittel war ebenfalls stark magnetisch.[1])

Jedenfalls darf man in der Praxis die Bemerkung Swinton's nicht ausser Betracht lassen, da die Anwendung von Asbestplatten in empfindlichen magnetischen Instrumenten Fehlerquellen veranlassen kann.

Haag, November 1894.

1) Ich habe den sich stark magnetisch zeigenden grauen Asbest auch während ein paar Stunden mit concentrirter Schwefelsäure gekocht; derselbe war dann vollständig weiss geworden und hatte die magnetische Eigenschaft beibehalten.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1895. ANNALEN № 7.
DER
PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND 55.

1. *Ueber das Absorptionsspectrum des flüssigen Wassers und über die Durchlässigkeit der Augenmedien für rothe und ultrarothe Strahlen; von E. Aschkinass.*

(Hierzu Taf. IV Fig. 1—8.)

Erster Theil.

Ueber das Absorptionsspectrum des flüssigen Wassers.

1. Einleitung.

Die spectrale Vertheilung des Absorptionsvermögens des Wassers für Licht- und Wärmestrahlen ist bereits mehrfach der Gegenstand eingehender Untersuchungen gewesen. Photometrisch ist dieses Thema in exacter Weise zum erstenmale von Hüfner und Albrecht[1]) im Jahre 1891 behandelt worden. Abney und Festing[2]), welche das Spectrum des Wassers photographierten, und H. Becquerel[3]), der das Phänomen der Phosphorescenz als Beobachtungsmethode verwerthete, gelangten bereits in den Anfang des ultrarothen Spectralgebietes. Ausschliesslich in diesem Bereiche haben endlich in neuester Zeit die Herren W. H. Julius[4]) und F. Paschen[5]) die Absorption des Wassers untersucht.

Hüfner und Albrecht haben in ihrer oben erwähnten Arbeit im sichtbaren Gebiet, und zwar innerhalb der Wellenlängen 446 und 671 $\mu\mu$ an zehn verschiedenen Stellen des Spectrums Beobachtungen angestellt, und ihre Messungen haben auch für die absoluten Werthe der Absorptionscoefficienten zu einigermaassen zuverlässigen Zahlen geführt. Ueber diese Grössen finden sich aber in den übrigen der genannten Arbeiten

1) G. Hüfner und E. Albrecht, Wied. Ann. **42.** p. 1. 1891.

2) Abney und Festing, Philos. Transact. **172.** p. 887. 1881.

3) H. Becquerel, Ann. d. chim. et d. phys. **30.** p. 1. 1883.

4) W. H. Julius, Verhandl. d. K. Academie v. Wetenschappen te Amsterdam, 1. Sect., Deel I, No. 1. 1892. Verhandl. d. Vereins z. Bef. d. Gewerbefl. p. 232. 1893.

5) F. Paschen, Wied. Ann. **51.** p. 21. **52.** p. 216. **53.** p. 334. 1894.

keinerlei direkte Angaben. Bei Abney und Festing und H. Becquerel war eine exacte zahlenmässige Bestimmung der Absorptionsvertheilung schon durch die Natur ihrer Beobachtungsmethoden ausgeschlossen. Julius andererseits hat insofern unter ungünstigen Bedingungen gearbeitet, als er eine zu dicke Wasserschicht benutzte, sodass aus den Resultaten seiner diesbezüglichen Messungen schon in qualitativer Hinsicht nicht viel zu ersehen ist. In dünnerer Schicht hat Hr. Julius zwar noch das Spectrum einer wässrigen Kochsalzlösung festgestellt, und seine Ansicht, dass die in demselben auftretenden Banden vom Wasser herrührten, ist später von Hrn. Paschen bestätigt worden; indessen ist es doch wohl nicht ohne weiteres zulässig, darum auch quantitativ dieses Spectrum für identisch mit dem des reinen Wassers anzusehen. Endlich hat auch Hr. Paschen, der Wasserschichten von vier verschiedenen Dicken benutzte, offenbar nur auf die Ermittelung der örtlichen Lagen der Banden im Spectrum zwischen 1,3 und 8,5 μ Werth gelegt, da er nur Energiecurven mittheilt und — mit einer einzigen Ausnahme — nicht alternierend beobachtet hat.

Die Kenntniss der Absorptionsspectra hat in neuerer Zeit ein erhöhtes Interesse gewonnen infolge der Erschliessung des ultrarothen Spectralbereiches durch Ausbildung der bolometrischen Methode. Julius hat (l. c.) gezeigt, dass uns durch exacte Forschungen auf diesem Gebiete ein tieferer Einblick in intramoleculare Verhältnisse gewährt werden kann. In dieser Beziehung haben wir sicherlich weitere interessante Aufschlüsse zu erwarten durch die Untersuchung der Absorptionsspectra von Salzlösungen. Es ist daher wünschenswerth, dass sowohl qualitativ wie quantitativ zunächst die spectrale Vertheilung der Absorption des Wassers als des wichtigsten Lösungsmittels mit möglichster Genauigkeit festgestellt werde. Dies ist der Zweck der im folgenden mitgetheilten Untersuchungen, welche sich über den Spectralbereich von 0,45 bis 8,5 μ erstrecken unter Variation der Dicke der Wasserschichten im Verhältniss von 1 zu 100000.[1]) Es wurde dabei ausschliesslich die bolometrische Beobachtungsmethode benutzt.

1) Im ultravioletten Spectralgebiet ist Wasser bekanntlich einer der durchlässigsten Körper und beginnt erst bei ca. 0,2 μ merklich zu absorbiren. Vgl. H. Th. Simon, Wied. Ann. **53**, p. 542. 1894.

2) Allgemeine Versuchsanordnung.

Ich gehe zunächst an die Beschreibung der Versuchsanordnung, deren ich mich innerhalb des Bereiches von 0,7 bis 8,5 μ bediente. Die Abänderungen, die für das Gebiet kürzerer Wellen getroffen wurden, sollen weiter unten an geeigneter Stelle mitgetheilt werden.

Von dem glühenden Zirkonplättchen Z (s. Fig. 1) eines Linnemann'schen Brenners wurde mittels einer Steinsalzlinse L ein reelles Bild auf den Spalt S des Spectralapparates geworfen, sobald ein im Wege der Strahlung befindlicher Fallschirm F aufgezogen war. Das Oeffnen und Schliessen dieses Schirmes konnte vom Beobachtungsplatze am Fernrohr aus besorgt werden. Vor dem Spalt befand sich ein Stativ mit vertikalen Führungen VV. Zwischen den letzteren war eine geschwärzte Messingplatte verschiebbar, die in der Mitte einen kreisrunden Ausschnitt hatte und zu beiden Seiten desselben mit Metallfedern versehen war. Es konnte nun eine zweite mit Ausschnitt versehene Messingplatte, die ihrerseits das Absorptionsgefäss A trug, in der Weise eingeschaltet werden, dass sie von den Federn fest gegen die erste Platte gepresst wurde und daher mit dieser zusammen auf- und niedergleiten konnte. Das eigentliche Absorptionsgefäss befand sich dann gerade vor dem Ausschnitt der Platte, und das Ganze war so justiert, dass, wenn die letztere vollständig herabgelassen war, die Axe des ankommenden Strahlenbündels mit der Mittellinie des Absorptionsgefässes zusammenfiel. Von der verschiebbaren Messingplatte führte eine Schnur über leichtbewegliche Rollen nach dem Beobachtungsplatze, mit deren Hülfe von hier aus die zu untersuchenden Wasserschichten nach Belieben in den Strahlengang ein- und ausgeschaltet werden konnten. Vor dem Collimator-

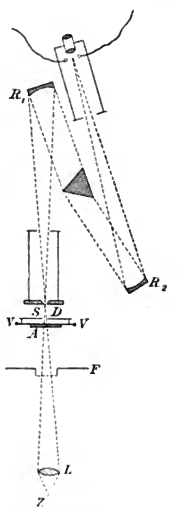


Fig. 1.

spalte befand sich schliesslich noch ein Diaphragma D von passender Grösse, damit nach Einschaltung des Absorptionsgefässes auch wirklich ein Strahlenbündel von gleichem Durchmesser wie vorher auf den Spalt gelangte.

Das Spectrometer (von Schmidt und Hänsch) war mit Spiegeleinrichtung R_1, R_2 versehen und ebenso wie die übrigen schon genannten Apparate auf einem gemauerten Pfeiler justiert. Das Bolometer bestand aus drei berussten, flach gehämmerten Eisendrähten von je 1,5 cm Länge, die nebeneinander ausgespannt waren, und hatte einen Widerstand von 13 Ohm; seine scheinbare Breite im Spectrum betrug 3 Minuten. Das von mir benutzte Galvanometer Du Bois-Rubens'scher Construction [1]) hatte eine Empfindlichkeit von $6 \cdot 10^{-11}$ Ampère pro Scalentheil bei einer Schwingungsdauer von 10 Secunden. Die Scala befand sich in 4 m Abstand vom Galvanometer. Die Empfindlichkeit des Bolometers wurde im allgemeinen so geregelt, dass ein Galvanometerausschlag von 1 Scalentheil einer Temperaturänderung um $3 \cdot 10^{-5}$ Grad Celsius entsprach, wobei die Intensität des Hauptstromes 0,04 Ampère betrug. Durch Einfügung von Widerstand in den Galvanometerzweig konnte die Empfindlichkeit, wo es erforderlich war, herabgesetzt werden, um die Ausschläge auf ein brauchbares Maas zu reducieren. Spectrometer sowie Stromzuführungen waren durch Metallschirme und Watteumhüllungen gegen äussere Temperaturschwankungen geschützt.

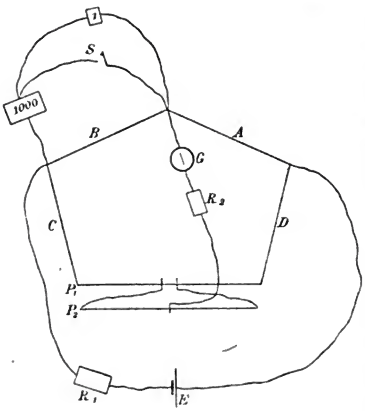


Fig. 2.

1) H. E. J. G. du Bois u. H. Rubens, Wied. Ann. 48. p. 236. 1893.

Die Anordnung der Stromleitungen ist in Fig. 2 schematisch dargestellt. Hinter dem Accumulator E ist ein Stöpselrheostat R_1 behufs Regulierung der Stromintensität eingeschaltet Die vier Zweige A, B, C, D der Wheatstone'schen Combination haben alle den gleichen Widerstand von 13 Ohm. Der Zweig A ist in derselben Weise hergestellt wie das Bolometer B und in üblicher Weise in eine Dose eingeschlossen, die in der Mitte einen Ausschnitt enthält zur Aufnahme des Bolometers selbst. Die beiden Abgleichungsdrähte P_1 und P_2 befinden sich sammt den Widerständen C und D in einem Holzkasten. Die Einstellung der Brücke erfolgt mittels einer Schnur von aussen her. An dem Bolometer ist noch eine Nebenschaltung von 1000 Ohm Widerstand angebracht, um die Empfindlichkeit jederzeit controlliren zu können [1]); zu dem Ende kann der Widerstand dieses Nebenschlusses mit Hülfe des Schlüssels S noch um 1 Ohm variirt werden.

Was die Prismen betrifft, so bediente ich mich für das langwellige Spectrum eines solchen aus Flussspath, dessen Einstellungen ich die neuesten Dispersionsbestimmungen von Hrn. Paschen [2]) zu Grunde legte. Für den Bereich von 0,7 bis 2,7 μ benutzte ich ein Flintglasprisma, dessen Dispersion kürzlich von Hrn. Rubens [3]) festgestellt worden ist. In den beiden eben genannten Arbeiten sind die Brechungsexponenten als Functionen der Wellenlängen und Minimalablenkungen gegeben. Da sich an meinem Spectrometer aber keine Vorrichtung befand, die das Prisma selbstthätig immer in die Minimumstellung brachte, so konnte ich für meine Einstellungen von jenen Angaben diejenigen der Ablenkungen nicht verwerthen.

Beim Beginn einer jeden Versuchsreihe wurde das Bolometer mittels des Oculars so eingestellt, dass die D-Linie in der Minimumstellung auf den Bolometerstreifen fiel, wobei der Collimatorspalt so weit geöffnet wurde, dass beide sich vollkommen deckten, die D-Linie also auch in einer scheinbaren Breite von 3 Minuten erschien. Bei $\lambda = 6{,}4\ \mu$ wurde dann allerdings die Energie der Strahlung zu gering, so dass ich

1) Vgl. H. Rubens u. R. Ritter, Wied. Ann. **40.** p. 62. 1890.
2) F. Paschen, Wied. Ann. **53.** p. 324. 1894.
3) H. Rubens, Wied. Ann. **53.** p. 267. 1894.

von hier an die Spaltbreite vergrössern musste. Da nun die D-Linie in der Minimumstellung fixiert wurde, so berechnete sich der Austrittswinkel aus dem Prisma für Strahlen von der Wellenlänge λ_D und zugleich der Einfallswinkel für sämmtliche Strahlen aus der bekannten Gleichung

$$i = \text{arc sin}\left(n_D \sin \frac{\varphi}{2}\right),$$

worin unter φ der brechende Winkel des Prismas und unter n_D der Brechungsexponent der Natriumlinie zu verstehen ist. Nun besteht zwischen dem Einfallswinkel i, dem Austrittswinkel i', dem brechenden Winkel φ und dem Brechungsexponenten n für einen Strahl beliebiger Wellenlänge die Beziehung

$$i' = \text{arc sin}\left(\sin\varphi\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos\varphi \sin i\right).$$

Nach dieser Formel wurde i' mit Hülfe der Paschen'schen und Rubens'schen Dispersionsbestimmungen als Function der Wellenlänge berechnet. Unter der Ablenkung δ ist im folgenden immer die Differenz $i - i'$ zu verstehen, d. i. also die Ablenkung von der in Minimalstellung befindlichen D-Linie.

Sämmtliche Messungen wurden alternierend ausgeführt, und zwar derart, dass zuerst für die direkte Strahlung, dann zweimal nach Einschaltung des Absorptionsgefässes und schliesslich nochmals für die direkte Strahlung der Ausschlag abgelesen wurde. Aus je zwei zusammengehörigen Werthen wurde dann das Mittel genommen. Im folgenden sollen nun die verschiedenen Absorptionsspectra der von mir untersuchten Wasserschichten einzeln mitgetheilt werden. Es ist noch zu bemerken, dass ausschliesslich destillirtes Wasser von etwa 18° C. verwandt wurde.

3. Spectra einiger Wasserschichten von verschiedener Dicke.

a) Schichtdicke $d = 0{,}001$ cm.

Mit der dünnsten Schicht von $^1/_{1000}$ cm wurde das Gebiet von $\lambda = 1{,}6 - 8{,}5\ \mu$ untersucht. Es wurde also zur Erzeugung des Spectrums das Flussspathprisma in Anwendung gebracht. Das Absorptionsgefäss war folgendermaassen einge-

richtet (s. Fig. 3): Eine geschwärzte Messingplatte P mit kreisendem Ausschnitt von 24 mm Durchmesser trug oberhalb des letzteren ein ringförmiges Ansatzstück R, das eine lichte Weite von 27 mm besass und aussen mit einem Gewinde versehen war. So entstand im Innern der Bohrung eine kreisrunde Auflage für eine 4 mm dicke Flussspathplatte a, auf welcher ein Staniolring von 0,001 cm Dicke lag. Auf die Fluoritplatte a wurde nun ein Wassertropfen gebracht, dann eine zweite ebensolche Platte b von gleichen Dimensionen darüber gelegt, und das Ganze schliesslich durch eine Mutter M verschraubt. Zwischen den Flussspathplatten und den Metallauflagen befanden sich noch Kautschukringe, um das System so fest als möglich aneinander pressen zu können, ohne die Platten zu verletzen. Die letzteren waren von tadelloser Klarheit und in der Werkstätte von Zeiss in Jena vollkommen eben geschliffen.

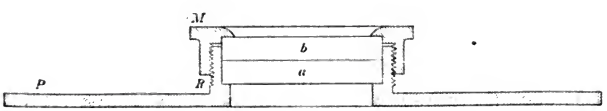


Fig. 3.

Die Dicke des sorgfältig geglätteten Stanniolringes war durch Wägung verschiedener Stücke eines grösseren Blattes, aus welchem derselbe herausgeschnitten war, festgestellt, wobei sich für alle eine gleiche Dicke ergab. Die Beobachtungen, die nach Erneuerung des Stanniolringes wiederholt wurden, zeigten daher auch vollkommene Uebereinstimmung mit den vorangegangenen Messungen. Ich konnte mich nun also wohl darauf verlassen, thatsächlich eine gleichmässige Wasserschicht von 0,001 cm zwischen den Flussspathplatten erhalten zu haben. Das Wasser hielt sich dort mehrere Tage lang, und während einer Versuchsreihe wurde immer von Zeit zu Zeit controllirt, ob auch das ganze Quantum noch vorhanden war, was sich im reflectierten Licht sofort zu erkennen gab.

Die Messung des Intensitätsverlustes durch das leere Absorptionsgefäss ergab bis etwa 7,5 μ den aus der Formel

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$$

für die Schwächung infolge viermaliger Reflexion an den Grenzflächen zwischen Flussspath und Luft zu erwartenden Werth. Hiernach wurden die beobachteten Werthe corrigiert, selbstverständlich unter Berücksichtigung des Umstandes, dass für das gefüllte Gefäss lediglich zwei Reflexionen in Betracht kommen, da die Brechungsexponenten von Fluorit und von Wasser nur sehr wenig von einander abweichen. Von ca. 7,5 μ an zeigte sich noch eine geringe mit wachsender Wellenlänge zunehmende Absorption des Flussspaths[1]), die bei der Correction dann gleichfalls in Rechnung gezogen wurde.

Es wurde hier, ebenso wie in den drei folgenden Versuchsreihen, immer von zwei zu zwei Minuten, vielfach auch von Minute zu Minute beobachtet. In dieser Weise wurde das ganze Spectrum von 1,6 — 8,5 μ dreimal durchlaufen, derart, dass schliesslich in Abständen von einer Minute an allen Punkten — zum grössten Theil mehrfach — Messungen stattgefunden hatten. Die drei Beobachtungsreihen wurden nun — soweit wiederholte Beobachtungen vorlagen, unter Benutzung des arithmetischen Mittels — zu einer Reihe zusammengefasst. Waren die Beobachtungen in den einzelnen Versuchsreihen nicht genau an den gleichen Stellen des Spectrums vorgenommen, so bediente ich mich, um dennoch für dieselben Punkte vergleichbare Messungen zu haben, der graphischen Interpolation. Aus den so erhaltenen Zahlen ging dann die endgültige Reihe hervor, deren numerische Werthe für die *procentischen Absorptionen A* in der Tabelle I bis auf halbe Procente wiedergegeben sind.

Die Zahlen A ergeben sich aus den direct beobachteten Ausschlägen in folgender Weise: Wenn das Gefäss mit dem absorbirendenMedium sich nicht in dem Wege der Strahlung befindet, so fällt die Intensität i auf den Spalt des Collimators; ist es dagegen in den Strahlengang eingeschaltet, so gelangt nur noch die geringere Intensität i' an die gleiche Stelle. Zum Bolometer gelangen in beiden Fällen die bez. Intensitäten ki und ki', wenn unter k ein besimmter echter Bruch verstanden wird, da ja innerhalb des Apparates, z. B. durch Reflexion

1) Vgl. auch W. H. Julius, l. c., F, Paschen, Wied. Ann. **53.** p. 333. 1894.

an dem Prisma ein gewisser Verlust stattfindet. Die entsprechenden, den Intensitäten proportionalen Galvanometerausschläge seien bez. α und α'. Dann ist

(1) $$ki = c\alpha \quad \text{und} \quad ki' = c\alpha'$$

also

(2) $$i = C\alpha \quad \text{und} \quad i' = C\alpha'.$$

Durch Einschaltung des gefüllten Absorptionsgefässes findet ein Intensitätsverlust statt, der sich in Procenten aus der Formel

(3) $$p = 100\frac{i - i'}{i}$$

ergiebt und direct aus den Galvanometerausschlägen zu entnehmen ist. Denn es folgt aus (3) und (2):

(4) $$p = 100\frac{C\alpha - C\alpha'}{C\alpha}$$

also

(5) $$p = 100\frac{\alpha - \alpha'}{\alpha}$$

An den so berechneten Grössen p wurden jetzt nur noch die nöthigen Correctionen angebracht, von denen vorher (p. 408) Rede war; dann ergaben sich die im Folgenden unter A verzeichneten Werthe für die procentischen Absorptionen.

Die Genauigkeit ist natürlich entsprechend der variabeln Energie der Strahlung an den verschiedenen Stellen des Spectrums eine verschiedene. Doch dürfte der Fehler an den Stellen der starken Absorptionsmaxima $^1/_2$ Proc. nicht übersteigen. Auf Tafel VI, Fig. 1 ist die Absorption A als Function der Ablenkung δ und auf Taf. IV, Fig. 2 Curve a als Function der Wellenlänge λ (μ) dargestellt.

Tabelle I.

δ	λ	A	δ	λ	A
0° 40′	1,64	2	1° 1°	2,47	11
43	1,77	2	4	2,58	15
46	1,88	6,5	7	2,68	29,5
49	2,005	9,5	10	2,77	62
52	2,13	6	13	2,86	86,5
55	2,25	6	16	2,94	92,5
58	2,36	7	19	3,02	93,5

δ	λ	A	δ	λ	A
1° 22′	3,105	93	4° 1′	6,135	91
25	3,19	92,5	4	6,18	88,5
28	3,27	88	7	6,22	86
31	3,35	74,5	10	6,265	83
34	3,425	56,5	13	6,31	79,5
37	3,50	39	16	6,35	77,5
40	3,58	28	19	6,39	74,5
43	3,65	23	22	6,43	70
46	3,72	19	25	6,47	66
49	3,79	19	28	6,505	64,5
52	3,86	19	31	6,54	62
55	3,93	18,5	34	6,58	62
58	4,00	20	37	6,62	61
2 1	4,07	21	40	6,66	60
4	4,14	22	43	6,695	59,5
7	4,21	22,5	46	6,73	58
10	4,28	25	49	6,765	58,5
13	4,34	28,5	52	6,80	58
16	4,40	33	55	6,84	57,5
19	4,46	34,5	58	6,88	57,5
22	4,52	37,5	5 1	6,92	56
25	4,58	40,5	4	6,955	56,5
28	4,64	41,5	7	6,99	56
31	4,70	42	10	7,025	56
34	4,75	41,5	13	7,06	56
37	4,80	41	16	7,10	56
40	4,86	39	19	7,135	56
43	4,92	37,5	22	7,17	56
46	4,97	35,5	25	7,205	56
49	5,02	34,5	28	7,24	56
52	5,07	30	31	7,275	57
55	5,12	29	34	7,31	56,5
58	5,17	29	37	7,345	56
3 1	5,22	28	40	7,38	55,5
4	5,27	26,5	43	7,41	54,5
7	5,32	27,5	46	7,44	55,5
10	5,37	28,5	49	7,475	55
13	5,42	29	52	7,51	55
16	5,47	28,5	55	7,545	55,5
19	5,515	30,5	58	7,58	54,5
22	5,56	33	6 1	7,615	54
25	5,605	34,5	4	7,65	53,5
28	5,65	36	7	7,68	54,5
31	5,695	43	10	7,71	54,5
34	5,74	49,5	13	7,745	54
37	5,78	56	16	7,78	54
40	5,825	64,5	17	7,81	53,5
43	5,87	72,5	22	7,845	53,5
46	5,915	79	25	7,88	54
49	5,96	83,5	28	7,91	53,5
52	6,005	88	31	7,94	50
55	6,05	90,5	34	7,97	52
58	6,09	92	37	8,00	53,5

δ	λ	A	δ	λ	A
6° 40′	8,03	54	7° 4′	8,28	53,5
43	8,065	54,5	7	8,31	53
46	8,10	54	10	8,34	52
49	8,13	53,5	13	8,37	50
52	8,16	54,5	16	8,40	50
55	8,19	52	19	8,43	53
58	8,22	51	22	8,46	52,5
7 1	8,25	52	25	8,49	51,5

Es zeigen sich im ganzen vier Maxima der Absorption. Das wenig intensive in der Gegend von $\delta = 0^0 49'$ möge erst später genau fixiert werden. Die erste sehr starke breite Bande hat ihr Maximum bei 3,06 μ, d. h. sicherlich zwischen 3,02 und 3,10 μ. Hr. Paschen fand diese Bande bei 2,916, 2,975, 3,024 μ mit Wasserschichten von ungefähr 0,001—0,002, 0,003 und 0,008 cm Dicke. Eine schwächere Bande findet sich bei 4,70 μ — nach Paschen 4,741, 4,729, 4,684 — und endlich noch eine starke schmale Bande bei 6,10 μ. Die Lage der letzteren gibt Hr. Paschen bei 6,061 μ an. Bei 3,89 und 5,27 μ liegen Minima der Curve, und von ca. 6,7 μ an tritt eine allgemeine Absorption von 50—60 Proc. ein. Nahe bei 8 μ liegen möglicherweise noch einige schwache Maxima. Indessen sind hier die Beobachtungsfehler schon recht gross, da die Energie sehr schnell abnimmt, so dass die Ausschläge nur noch bis 8,5 μ eine zur Messung brauchbare Grösse behalten.

In der Gegend des zweiten und vierten Maximums beträgt die Schwächung der Intensität mehr als 90 Proc. In Anbetracht der geringen Schichtdicke von $^1/_{1000}$ cm ergeben sich daher für die entsprechenden Wellenlängen schon ziemlich hohe Werthe der Absorptionscoefficienten. Man könnte deswegen vielleicht vermuthen, dass hierin noch eine Fehlerquelle enthalten sei. Für stark absorbirende Medien ist nämlich die relative Intensität der reflectirten Strahlung bei senkrechter Incidenz durch die Beer'sche Gleichung gegeben:

$$\frac{(n-1)^2 + \varkappa^2}{(n+1)^2 + \varkappa^2},$$

worin $\varkappa$ das Absorptionsvermögen der betreffenden Substanz für eine bestimmte Wellenlänge charakterisirt. Würde nun an der Oberfläche des Wassers für die in Frage kommenden

Schwingungen bereits eine metallische Reflexion stattfinden, so hätte dies zur Folge, dass die wahren Absorptionswerthe etwas geringer wären, als oben angegeben. Die zahlenmässige Berechnung der Coefficienten $\varkappa$ ergiebt indessen, dass man in unserem Falle $\varkappa^2$ gegen $(n-1)^2$, bez. $(n+1)^2$ überall vernachlässigen kann.

Mit diesen Ergebnissen der Theorie standen auch einige diesbezügliche Versuche im Einklang: Ich liess die Strahlung des Linnemann'schen Brenners zunächst von einem Silberspiegel reflectiren und auf diesem Umwege erst auf den Collimatorspalt gelangen. Für diese reflectirte Strahlung wurde nun die vollständige Energiecurve festgestellt. Hierauf wurde der Silberspiegel durch ein mittels meiner Flussspathplatten verschlossenes Gefäss ersetzt, dass mit Wasser gefüllt war und eine Länge von 1 cm hatte, sodass durch Reflexion an den hinteren Grenzflächen keine Strahlen der hier in Betracht kommenden Wellenlängen zum Spectrometer gelangen konnten. Wiederum wurde die Curve der reflectirten Energie aufgenommen. Aus dem Vergleich der beiden Beobachtungsreihen ging nun hervor, dass im zweiten Falle eine merkliche Reflexion an allen Stellen des Spectrums nur an der vorderen Flussspathplatte stattgefunden hatte, da die beiden Curven einen vollkommen parallelen Verlauf zeigten.

b) Schichtdicke $d = 0{,}005$ cm.

Da die Untersuchung einer 0,005 cm dicken Wasserschicht nach Ermittelung des soeben beschriebenen Spectrums nur für den Bereich kürzerer Wellenlängen von Interesse war, so benutzte ich hier bereits das obenerwähnte Prisma aus schwerem Silicatflint in Rücksicht auf die starke Dispersion desselben in jenem Gebiete. Das von ihm entworfene Spectrum erstreckt sich von $0{,}7-2{,}7\ \mu$ über einen Bereich von $4^\circ 32'$. In Anbetracht dessen gebe ich hier in Tabelle II, wie auch in den beiden nächstfolgenden Beobachtungsreihen, um die Zahlen nicht zu häufen, die Absorptionswerthe im allgemeinen nur von 5 zu 5 Minuten an, wiewohl die Messungen in geringeren Intervallen stattfanden. Die mitgetheilten Zahlen sind aus sämmtlichen beobachteten in analoger Weise hervorgegangen wie bei den Beobachtungen mit der 0,001 cm dicken

Schicht. Die negativen Zahlen sind natürlich auf Beobachtungsfehler zurückzuführen; sie ergaben sich in der Weise, dass an jenen Stellen von dem gemessenen procentischen Intensitätsverlust die Anzahl Procente abgezogen sind, die infolge der Reflexion subtrahirt werden müssen, wenn die thatsächliche Wasserabsorption gleich Null ist.

Das Absorptionsgefäss war das frühere mit der einzigen Abänderung, dass zwischen den beiden Flussspathplatten jetzt fünf Stanniolringe von je 0,001 cm Dicke übereinanderlagen.

In der Tabelle II sind ausser den hier bereits in Betracht kommenden auch diejenigen Angaben für die Dispersion des Flintglasprismas enthalten, welche erst später gebraucht werden. Die graphische Darstellung des Absorptionsverlaufes findet sich auf Taf. IV, Fig. 2, Curve *a* und auf Taf. IV, Fig. 4, Curve *b*.

Tabelle II.

δ	λ	A	δ	λ	A
1° 0′	0,670	—	2° 55′	1,008	−0,5
12	0,690	—	56	1,014	—
20	0,705	—	58	1,023	—
23	0,710	—	3 0	1,035	1,5
25	0,715	—	5	1,063	0,5
30	0,723	—	10	1,095	−0,5
34	0,730	—	15	1,127	−1
35	0,732	—	20	1,162	−0,5
40	0,742	—	25	1,205	−1
44	0,750	—	27	1,224	—
45	0,753	—	29	1,243	—
50	0,766	—	30	1,252	1
52	0,770	—	31	1,262	—
55	0,780	—	33	1,281	—
59	0,790	—	35	1,300	−0,5
2 0	0,793	−0,5	40	1,350	0,5
5	0,806	−0,5	45	1,400	11
6	0,810	—	49	1,440	14,5
10	0,822	−1	50	1,450	16,5
12,5	0,830	—	52	1,470	17
15	0,838	1	55	1,500	17,5
18,5	0,850	—	57	1,520	16
20	0,855	−0,5	4 0	1,550	12,5
25	0,872	−1	5	1,602	10
30	0,890	−0,5	10	1,655	7,5
35	0,912	1,5	15	1,708	5,5
40	0,935	1	20	1,762	8
45	0,958	1	25	1,816	11,5
50	0,980	0	30	1,870	29
52	0,990	—	32	1,891	39
54	1,002	—	35	1,924	45

δ	λ	A	δ	λ	A
4° 38′	1,956	46	5° 15′	2,368	26,5
40	1,978	42,5	20	2,420	36
45	2,034	27,5	25	2,470	43,5
50	2,090	19	30	2,520	46
55	2,147	13	35	2,570	53
5° 0	2,203	14	40	2,618	66,5
5	2,259	15,5	45	2,665	83
10	2,315	19	50	2,711	88

Wie man sieht, ist hier bis 1,35 μ von einer merklichen Absorption noch nichts wahrzunehmen. Bei 1,50 μ findet sich eine breitere und bei 1,94 eine schmalere Bande. Die letztere trat mit geringerer Deutlichkeit schon in der Curve der 0,001 cm dicken Schicht auf. Hr. Paschen gibt für die Lagen dieser beiden Banden die Wellenlängen 1,513 und 2,055 μ an. Meine Curve zeigt bei 2,5 μ noch einen schwachen Knick, der bei mehrmaliger Wiederholung der Beobachtungen in dieser Gegend stets wieder erschien.

c) Schichtdicke $d = 1$ cm.

Das Absorptionsgefäss bestand aus einem Glasrohr von 1 cm Länge, dessen Enden vollkommen eben abgeschliffen waren und welches durch zwei Glasplatten verschlossen wurde. Das Ganze wurde auf eine geschwärzte, mit kreisförmigen Ausschnitt versehene Messingplatte aufgekittet. Die Untersuchung des leeren Gefässes ergab in dem hier untersuchten Spectralbereiche wegen einer geringen Absorption des Glases einen etwas grösseren Intensitätsverlust, als infolge der Reflexion allein zu erwarten war. Hiernach sind die beobachteten Werthe corrigirt unter Berücksichtigung der Differenz des Betrages, der sich für die Schwächung infolge der Reflexion ergeben muss, wenn das Gefäss mit Wasser statt mit Luft gefüllt ist.

Die Ergebnisse der Messungen sind in der Tabelle III. in Fig. 2, Curve *b*, Taf. IV und auf Taf. IV, Fig. 4, Curve *c* wiedergegeben. Die zu den Ablenkungen gehörigen Wellenlängen sind für die Tabellen III und IV aus der Tabelle II zu entnehmen.

Tabelle III.

δ	A	δ	A	δ	A	δ	A
1° 20′	2	2° 10′	1,5	2° 54′	34,5	3° 27′	69,5
25	2,5	15	2,5	55	34	29	70,5
30	1,5	20	4	56	32,5	31	70
35	2,5	25	5,5	58	30	33	69
40	3,5	30	6	3 0	27	35	70
45	4	35	7,5	5	17,5	40	80
50	4	40	10,5	10	16,5	45	95,5
55	3,5	45	21,5	15	26,5	50	100
2 0	3	50	33	20	52		
5	1,5	52	34	25	68,5		

Wir finden hier drei Maxima: bei 0,77, 1,00 und 1.25 μ. Nach der letzten dieser drei Erhebungen senkt sich die Curve nur um einen sehr geringen Betrag wieder herab, um dann entsprechend dem Absorptionsverlauf der 0,005 cm dicken Schicht rasch bis 100 Proc. anzusteigen. In dem hier untersuchten Spectralgebiete können von älteren Arbeiten nur die Beobachtungen H. Becquerel's zum Vergleiche herangezogen werden. Von den drei von ihm mit A', A'', A''' bezeichneten Absorptionsstreifen stimmt die Lage der beiden letzteren einigermaassen mit den Banden bei 1,00 und 1,25 μ überein.

d) Schichtdicke $d = 5$ cm.

Die Einrichtung des Absorptionsgefässes war die nämliche wie im zuletzt beschriebenen Falle; nur war das Glasrohr von 1 cm Länge durch ein solches von 5 cm ersetzt.

Tabelle IV, Curve *c*, Fig. 2, Taf. IV sowie Curve *d*, Fig. 4, Taf. IV enthalten die Resultate meiner Beobachtungen.

Tabelle IV.

δ	A	δ	A	δ	A	δ	A
1° 0′	2	2° 6′	11	2° 45′	71	3° 0′	75,5
12	3	12,5	17,5	50	86,5	5	62,5
23	6	18,5	17,5	52	87,5	10	61
34	10,5	25	22	54	87,5	15	76,5
44	13	30	25,5	55	87	20	95
52	14	35	33	56	85,5	25	100
59	10,5	40	45,5	58	81		

Wie zu erwarten war, zeigt die Absorption hier den gleichen Verlauf wie bei der Wasserschicht von 1 cm. Zufolge der grösseren Schichtdicke besitzen natürlich die entsprechenden Zahlen sämmtlich wesentlich höhere Werthe und die Curve

erreicht demgemäss auch früher ihr Ende. Zum Vergleich sind auf Taf. IV in die Curve *b* der Fig. 2 der vorhergehenden Beobachtungsreihe diejenigen Werthe hineingezeichnet, welche sich durch Rechnung aus den mit der 5 cm dicken Wasserschicht gefundenen Zahlen für die Absorption der Schicht von 1 cm ergeben. Absorbirt ein Körper nämlich in einer Schicht von der Dickeneinheit von der ankommenden Strahlung J die Menge qJ, so absorbirt eine Schicht desselben Körpers von der Dicke d die Intensität QJ, wobei

$$Q = 1 - (1 - q)^d$$

ist. Setzt man nun $Q = A/100$ und $q = a/100$, so sind unter A und a die absorbirten Procente zu verstehen, und es ist

$$a = 100\left(1 - \sqrt[d]{1 - \frac{A}{100}}\right).$$

Nach dieser Formel sind die betreffenden Grössen berechnet, indem $d = 5$ gesetzt wurde. Diese Werthe sind in der Curve *b*, Fig. 2, Taf. IV durch kleine Kreise dargestellt zum Unterschiede von den beobachteten Werthen. Die Uebereinstimmung zwischen beiden ist eine vollkommen befriedigende.

e) Schichtdicke $d = 100$ cm.

Zur bolometrischen Untersuchung der Absorption im Bereiche kürzerer Wellenlängen reichte die bisher von mir benutzte Spectraleinrichtung nicht mehr aus, da die zum Bolometer gelangende Energie hier zu gering wurde. Hr. Rubens stellte mir daher in liebenswürdigster Weise ein in seinem Besitze befindliches Spectrometer von erheblich grösseren Dimensionen zur Verfügung. Dasselbe besass Objective von 5,3 cm Durchmesser bei einer relativ kurzen Brennweite von 35 cm. Zur Erzeugung des Spectrums wurde ein grosses Flintglasprisma von 7,5 cm Seite benutzt, dessen Dispersion durch Aufsuchen einer Anzahl sichtbarer Spectrallinien sowie des in den beiden vorhergehenden Beobachtungsreihen bei 1,00 μ constatirten Wasserabsorptionsstreifens festgestellt wurde. Das Bolometer war ebenfalls ein anderes, und zwar bestand es aus einem einzigen flach gehämmerten Eisendraht. Es nahm im Spectrum einen Raum von nur 30 Sec. ein.

Der Collimatorspalt des Spectrometers war bilateral regulirbar. Seine Breite betrug 0,2—1 mm, je nachdem im rothen oder blauen Spectralgebiete beobachtet wurde.

Das Absorptionsgefäss bestand aus einer Glasröhre von 1 m Länge und 6 cm Weite, die an den Enden durch ebene Glasplatten verschlossen und in der Mitte mit einem Ansatzrohr zum Einfüllen des Wassers versehen war. Die Absorptionsröhre ruhte auf zwei gabelförmigen Stützen, während das Ansatzrohr sich gegen ein ebenso geformtes Widerlager lehnte. Auf diese Weise war auch hier die Möglichkeit gegeben, alternirend zu beobachten, da man auch bei dieser Anordnung sich daranf verlassen konnte, dass sich das Gefäss jedesmal an der gleichen Stelle befand, wenn man es nach der Entfernung aus dem Strahlengange wieder in denselben einschaltete. Um die Reflexionen an den Rohrwänden zu vermeiden, wurden die Strahlen, bevor sie die Wasserschicht durchliefen, durch eine Linse parallel gemacht und nach ihrem Austritt durch eine zweite Linse, vor der sich noch ein Diaphragma von ca. 3 cm Durchmesser befand, auf dem Collimatorspalte zur Vereinigung gebracht. Durch diese Art der Concentration wurde ferner bewirkt, dass das Einschalten der 100 cm dicken Wasserschicht den Strahlengang in keiner Weise störte.

Die Strahlen hatten vor ihrer Vereinigung auf dem Collimatorspalte noch ein kleines Gefäss zu passiren, welches aus planparallelen Crownglaswänden bestand und gleichfalls mit Wasser gefüllt war. Dieses Gefäss hatte den Zweck, die ungemein starke ultrarothe Strahlung der Zirkonlampe zu beseitigen, welche leicht durch diffuse Reflexion im Innern des Spectrometers eine Verunreinigung des relativ schwachen sichtbaren Spectralbereichs herbeiführen kann. Da das Gefäss permanent in den Strahlengang eingeschaltet war, so war seine selective Absorption innerhalb des durchmessenen Spectrums ohne Einfluss auf die Versuchsergebnisse, wie aus den auf p. 409 entwickelten Formeln zu ersehen ist.

Das Absorptionsspectrum ist in Tabelle V, Fig. 3, Taf. IV und auf Taf. IV, Fig. 4, Curve *e* wiedergegeben. Eine zweite, mit etwas veränderter Justirung ausgeführte Versuchsreihe ergab bis auf ca. 1 Proc. die nämlichen Resultate.

Die Ablenkungen δ sind hier von der Einstellung auf $\lambda = 0{,}450\ \mu$ an gezählt. Die Beobachtungen geschahen im allgemeinen in Intervallen von $0{,}0125\ \mu$. Auch hier sind die gemessenen Intensitätsverluste nach Beobachtungen mit leerem Rohre corrigirt.

Tabelle V.

δ	λ	A	δ	λ	A
0° 0′	0,4500	2	2° 36,5′	0,6375	20,5
33	0,4750	2	43	0,6500	22,5
1 1,5	0,5000	2	48,5	0,6625	24,5
15	0,5125	2,5	53,5	0,6750	28
26,5	0,5250	1,5	58,5	0,6875	31
36,5	0,5375	0,5	3 2,5	0,7000	42,5
47,5	0,5500	3,5	7	0,7125	57
57	0,5625	3	11	0,7250	75
2 4,5	0,5750	2	14,5	0,7375	89
11,5	0,5875	5	18,5	0,7500	91
18,5	0,6000	15	24,5	0,7750	91
25	0,6125	17,5	29,5	0,8000	87
31,5	0,6250	20			

Bis $\lambda = 0{,}5750\ \mu$ ist die Absorption nur unbedeutend; von 0,5750—0,6000 μ nimmt sie bis 15 Proc. zu, steigt hierauf etwas langsamer, beginnt aber von $0{,}6875\ \mu$ an sehr schnell zu wachsen. Bei $0{,}77\ \mu$ zeigt sich wieder das bereits mit den Schichten von 5 und 1 cm Dicke constatirte Maximum.

Der grösste Theil des hier untersuchten Gebietes fällt mit dem von Hüfner und Albrecht mittels einer Wasserschicht von 180 cm photometrisch durchmessenen Bereiche zusammen. Nach ihren Zahlen habe ich die entsprechenden Werthe für eine Schicht von 100 cm nach der Formel

$$a = 100\left(1 - \sqrt[1,8]{1 - \frac{A}{100}}\right)$$

(vgl. p. 416) berechnet und zum Vergleich als Kreise in Fig. 3, Taf. IV hineingezeichnet. Die so berechneten Grössen liegen sämmtlich etwas höher als die von mir beobachteten Werthe.[1]) Der Gang ist jedoch in beiden Fällen nahezu der gleiche.

1) Der Grund für diese Discrepanz ist vielleicht in dem Umstande zu suchen, dass die Hrn. Hüfner und Albrecht bei ihren Versuchen als Absorptionsgefässe Messingröhren in Anwendung brachten, in welchen sich das Wasser jedenfalls nicht so rein und frei von jeder Trübung erhalten lässt, wie in Glasgefässen. Sehr geringe Trübungen sind aber in so grossen Schichtdicken schon von erheblichem Einfluss.

4. Uebersicht der Extinctionscoefficienten.

Ich fasse nunmehr sämmtliche Ergebnisse meiner bisher mitgetheilten Beobachtungen zusammen durch Angabe der Extinctionscoefficienten für das ganze von mir untersuchte Spectralgebiet (vgl. Tab. VI). Unter dieser Grösse verstehe ich den reciproken Werth der Schichtdicke in Centimetern, die ein Strahl bestimmter Wellenlänge durchlaufen muss, um auf $1/e$ seiner ursprünglichen Intensität geschwächt zu werden. Nach dieser Definition besteht zwischen dem Extinctionscoefficienten ε, der ankommenden Intensität J, der durchgelassenen Intensität J' und der Dicke d der an der betreffenden Spectralstelle untersuchten Wasserschicht die bekannte Beziehung

$$J' = J e^{-\varepsilon d},$$

woraus sich zur Berechnung von ε die Formel

$$\varepsilon = \frac{1}{d} \log \text{nat} \frac{J}{J'}$$

ergiebt. Da sich aber die procentische Absorption A allgemein zu

$$A = 100 \frac{J - J'}{J}$$

berechnet, so ergeben die früheren Tabellen die Quotienten J/J' nach der Gleichung

$$\frac{J}{J'} = \frac{100}{100 - A}.$$

Hüfner und Albrecht haben einige Werthe für den Extinctionscoefficienten nach der Definition

$$\varepsilon' = \frac{1}{d} \log \text{brigg} \frac{J}{J'}$$

angegeben. Diese Zahlen habe ich für die von mir gewählte Definition umgerechnet und zum Vergleich in der Tabelle VI mit angeführt.

Tabelle VI.

		Hüfner und Albrecht	
λ	ε	λ	ε
0,4500	0,00020	0,446 — 0,452	0,00028
0,4750	0,00020	0,465 — 0,471	0,00027
0,5000	0,00020	0,483 — 0,491	0,00037
0,5125	0,00025	0,502 — 0,510	0,00043
0,5250	0,00015	0,523 — 0,531	0,00045
0,5375	0,00005		
0,5500	0,00036	0,546 — 0,557	0,00075
0,5625	0,00030		
0,5750	0,00020	0,571 — 0,582	0,00114
0,5875	0,00051		
0,6000	0,00163	0,593 — 0,611	0,00250
0,6125	0,00192		
0,6250	0,00223	0,622 — 0,640	0,00282
0,6375	0,00229		
0,6500	0,00255		
0,6625	0,00281	0,658 — 0,671	0,00393
0,6750	0,00329		
0,6875	0,00371		
0,7000	0,00553		
0,7125	0,00844		
0,7250	0,0139		
0,7375	0,0221		
0,7500	0,0241		
0,7750	0,0241		
0,7900	0,0222		
0,8000	0,0204		
0,8100	0,0234		
0,830	0,0384		
0,850	0,0384		
0,872	0,0496		
0,890	0,0588		
0,912	0,080		
0,935	0,121		
0,958	0,248		
0,980	0,400		
0,990	0,416		
1,002	0,416		
1,008	0,408		
1,014	0,386		
1,023	0,332		
1,035	0,281		
1,063	0,196		
1,095	0,188		
1,127	0,290		
1,162	0,734		
1,205	1,155		
1,224	1,187		
1,243	1,221		
1,262	1,204		
1,281	1,171		

λ	ε	λ	ε	λ	ε
1,300	1,204	4,28	288	6,765	879
1,350	1,609	4,34	335	6,80	867
1,400	23,4	4,40	400	6,84	856
1,440	31,4	4,46	423	6,88	856
1,450	36,0	4,52	470	6,92	821
1,470	37,2	4,58	519	6,955	832
1,500	38,4	4,64	536	6,99	821
1,520	34,8	4,70	545	7,025	821
1,550	26,8	4,75	536	7,06	821
1,602	21,0	4,80	528	7,10	821
1,655	15,6	4,86	494	7,135	821
1,708	11,4	4,92	470	7,17	821
1,762	16,6	4,97	439	7,205	821
1,816	24,4	5,02	416	7,24	821
1,870	68,4	5,07	357	7,275	844
1,891	98,8	5,12	342	7,31	832
1,924	119,6	5,17	342	7,345	821
1,956	123,2	5,22	329	7,38	810
1,978	110,6	5,27	308	7,41	787
2,034	64,4	5,32	322	7,44	810
2,090	42,0	5,37	335	7,475	799
2,147	27,8	5,42	342	7,51	799
2,203	30,2	5,47	335	7,545	810
2,259	33,6	5,515	364	7,58	787
2,315	42,0	5,56	400	7,615	777
2,368	61,6	5,605	423	7,65	766
2,420	89,2	5,65	446	7,68	787
2,47	117	5,695	562	7,71	787
2,52	123	5,74	683	7,745	777
2,57	151	5,78	821	7,78	777
2,58	163	5,825	1036	7,81	766
2,62	219	5,87	1291	7,845	766
2,68	350	5,915	1561	7,88	777
2,77	968	5,96	1802	7,91	766
2,86	2002	6,005	2120	7,94	693
2,94	2590	6,05	2354	7,97	734
3,02	2733	6,09	2526	8,00	766
3,105	2659	6,135	2408	8,03	777
3,19	2590	6,18	2163	8,065	787
3,27	2120	6,22	1966	8,10	777
3,35	1366	6,265	1772	8,13	766
3,425	832	6,31	1585	8,16	787
3,50	494	6,35	1492	8,19	734
3,58	329	6,39	1366	8,22	713
3,65	261	6,43	1204	8,25	734
3,72	210	6,47	1079	8,28	766
3,79	210	6,505	1036	8,31	755
3,86	210	6,54	968	8,34	734
3,93	204	6,58	968	8,37	693
4,00	223	6,62	942	8,40	693
4,07	236	6,66	916	8,43	755
4,14	248	6,695	904	8,46	744
4,21	255	6,73	867	8,49	724

Zur Beurtheilung der Genauigkeit der in vorstehender Tabelle enthaltenen Angaben sei Folgendes bemerkt: Wenn man die Grössen A der früheren Tabellen, die der Berechnung der Extinctionscoefficienten zu Grunde gelegt sind, um 0,5 variirt, so ändern sich die Zahlen für ε überall in der Weise, dass höchstens die vorletzte Ziffernstelle um 1—2 Einheiten grösser oder kleiner wird. Nur für die Werthe von ε, die grösser sind als 1500, ist diese Aenderung etwas bedeutender und beträgt für den grössten Werth, nämlich $\varepsilon = 2733$, 8 Einheiten der vorletzten Stelle. Uebrigens variirt ε mit A um so schneller, je grösser A ist; dafür sind dann aber ceteris paribus die Beobachtungsfehler um so kleiner.

Wollte man den spectralen Verlauf der Extinctionscoefficienten nach der Tabelle VI graphisch darstellen und gäbe man in dieser Zeichnung dem kleinsten Werthe von ε (bei 0,5375 μ) die Länge von *1 Millimeter*, so müsste die Ordinate des stärksten Maximums (bei 3,02 μ) eine Länge von *54,65 Kilometern* erhalten.

Zweiter Theil.

Ueber die Durchlässigkeit der Augenmedien für rothe und ultrarothe Strahlen.

1. Aeltere Untersuchungen.

Unser Auge vermag in einem Spectrum im allgemeinen nur einen eng begrenzten mittleren Theil wahrzunehmen, während es für das ultrarothe und ultraviolette Gebiet unempfindlich ist. Der Unsichtbarkeit dieser Strahlen können zweierlei Ursachen zu Grunde liegen: entweder werden sie von den Medien des Auges, die sie durchdringen müssen, absorbirt, sodass sie überhaupt nicht bis zur Netzhaut gelangen, oder die Nervenfasern der letzteren können durch solche Aetherschwingungen nicht in Erregung versetzt werden.

Zur Erforschung der wahren Ursache der Erscheinung dient daher zunächst die Kenntniss des Absorptionsvermögens der Augenmedien. Es sind in dieser Beziehung auch bereits mancherlei Untersuchungen angestellt worden. Während es aber für die ultravioletten Strahlen durch die Beobachtungen

von Donders[1]) und die auf Veranlassung A. v. Graefe's ausgeführten Versuche von Kessler[2]) mit Sicherheit festgestellt worden ist, dass sie von den Augenmedien nur in geringem Maasse absorbirt werden, der Grund ihrer Unsichtbarkeit also in der Unempfindlichkeit der Netzhaut für sie zu suchen ist, so sind die älteren Forscher in Bezug auf das ultrarothe Gebiet zu theilweise sich widersprechenden Ergebnissen gelangt. E. Brücke[3]) sagt am Schlusse seiner ersten diesbezüglichen Arbeit — und in einer zweiten Untersuchung findet er dieses Resultat bestätigt —, „dass man sich jeder Hypothese, welche den Grund der Unsichtbarkeit dunkler Strahlen in der Nervenhaut sucht, füglich entschlagen kann. Denn es wird nach dem Angeführten wohl schwerlich noch jemand der Meinung sein, dass Strahlen von grösserer Wellenlänge als die der äussersten rothen Grenze zur Nervenhaut gelangen können". Cima[4]) und Janssen[5]) kamen im wesentlichen zu dem gleichen Resultate. Franz[6]) hingegen, welcher als erster über den genanten Gegenstand eigentliche Spectralbeobachtungen anstellte, gelangte zu der Schlussfolgerung: dass wir gezwungen sind, „den Grund der Unsichtbarkeit derjenigen Wärmestrahlen, welche eine geringere Brechbarkeit als die rothen Strahlen besitzen, in der Natur der Netzhaut zu suchen". In gleichem Sinne wurde die Frage noch von Tyndall[7]), Klug[8]) und Engelmann[9]) beantwortet. H. v. Helmholtz[10]) andererseits sagt, dass die starke Absorption der Strahlungsenergie jenseits

1) F. C. Donders, Onderzoekingen gedaan in het physiol. Laborat te Utrecht. Jaar VI. p. 1) Müller's, Arch. f. Physiol. 1853. p. 459.

2) G. Kessler, Graefe's Arch. für Ophthalm. **1.** p. 466. 1854.

3) E. Brücke, Müller's Arch. f. Physiol. 1845. p. 262; 1846. p. 379; Pogg. Ann. **65.** p. 593; **69.** p. 549.

4) A. Cima, Sul potere dell' umori dell' occhio a trasmettere il calorico raggionante. Torino 1852.

5) J. Janssen, Compt. rend. **51.** p. 128. 1860.

6) R. Franz, Pogg. Ann. **115.** p. 266. 1862.

7) J. Tyndall, Pogg. Ann. **124.** p. 36. 1865.

8) Ferd. Klug, Arch. f. Anat. u. Physiol., physiol. Abtheilung, Jahrg. 1878. p. 246.

9) Th. W. Engelmann, Onderz. ged. in het physiol. Laborat te Utrecht. 3de Reeks, D. VII. p. 291; Pflüger's Arch. f. die ges. Physiologie **30.** p. 125. 1882.

10) H. v. Helmholtz, Handb. d. phys. Optik. 2. Aufl. p. 283. 1885—1895.

des Roth — die übrigens von allen Beobachtern übereinstimmend constatirt worden ist — zu genügen scheint, um die Unsichtbarkeit der ultrarothen Strahlen zu erklären.

Aus alledem geht wohl hervor, dass noch nicht das letzte Wort über den fraglichen Gegenstand gesprochen war, zumal die bisher angewandten Untersuchungsmethoden nur einen geringen Grad von Exactheit besassen.

Janssen sowohl wie Franz hatten die Beobachtung gemacht, dass die Absorption irgend eines der Augenmedien übereinstimmte mit der einer gleich dicken Wasserschicht. Wenn in dieser Beziehung aber eine vollständige Uebereinstimmung thatsächlich vorhanden ist, so folgt aus meinen p. 415 mitgetheilten Messungen, dass Strahlen jenseits des Roth noch bis 1,4 μ das menschliche Auge zu durchdringen vermögen, dass insbesondere an der Stelle des Spectrums, wo die Lichtempfindung aufhört, d. i. nach Helmholtz bei 0,81 μ, die Absorptionscurve keine bedeutende Steigung aufweisen kann, der Grund der Unsichtbarkeit der ultrarothen Strahlen also sicherlich nicht in der Absorption derselben durch die Augenmedien zu suchen ist. Es war daher jetzt wohl an der Zeit, mittels der bolometrischen Methode das Problem nochmals gründlich zu studiren und womöglich zur definitiven Entscheidung zu bringen. In dieser Absicht unternahm ich es, im Anschluss an die oben mitgetheilten Untersuchungen die Absorptionsspectra der einzelnen Augenmedien festzustellen.

Die Versuchsanordnung war ganz die nämliche wie früher (vgl. p. 403—405). Das Spectrum wurde von dem p. 412 erwähnten Flintglasprisma erzeugt, sodass die zu den Ablenkungen δ gehörigen Wellenlängen für die folgenden Versuchsreihen aus der Tabelle II zu entnehmen sind. Die ausführlichen Messungen fanden im allgemeinen in Intervallen von 5 Minuten statt und wurden an Augen von Rindern ausgeführt, die etwa 20 Stunden zuvor geschlachtet waren. Es gelang leider nicht, die Präparate frei von jeder Trübung zur Untersuchung zu bringen. Infolgedessen sind die Absorptionswerthe, namentlich für die kürzeren Wellen, zum grossen Theil etwas höher ausgefallen, als den thatsächlichen Verhältnissen entsprechen dürfte. Daraus ist jedoch nur a fortiori auf die Richtigkeit meiner definitiven Resultate zu schliessen, wie aus dem Folgenden zu ersehen sein wird.

2. Absorptionsspectra der Medien des Rindsauges.

a) Hornhaut. $d = 0{,}05 - 0{,}075$ cm.

Aus der Mitte der Cornea wurde ein kreisrundes Stück von etwa 1,5 cm Durchmesser herausgeschnitten und zwischen zwei Glasplatten ein wenig zusammengepresst, so dass die Dicke der untersuchten Schicht $^1/_2 - ^3/_4$ mm betrug.[1]) Infolge der natürlichen Krümmung der Hornhaut liess sich dabei das Auftreten kleiner Falten nicht ganz vermeiden, so dass hierdurch die Trübung, welche gerade die Cornea in besonderem Maasse nach dem Tode erleidet, in meinen Präparaten noch verstärkt wurde. Die in Tabelle VII mitgeheilten und in Fig. 5, Taf. IV graphisch dargestellten Absorptionszahlen sind die Mittelwerthe zweier vollständigen, mit zwei verschiedenen Präparaten ausgeführten Beobachtungsreihen. Hier sowohl wie in allen folgenden Reihen sind wie früher die nothwendigen Correctionen für die Reflexion und die Absorption durch die Gefässe bereits in Rechnung gezogen. Die punktirte verticale Linie in den Figuren bei $\delta = 2^0 6'$ bezeichnet die Grenze des sichtbaren Spectralgebietes ($\lambda = 0{,}81\ \mu$).

Tabelle VII.

δ	A	δ	A	δ	A
1° 20′	32,5	2° 30′	22	3° 40′	29,5
25	33,5	35	21	45	44,5
30	34	40	21	50	76
35	35	45	24	55	92
40	34	50	25,5	4 0	85
45	33,5	55	24,5	5	72
50	32,5	3 0	20,5	10	61
55	29,5	5	22	15	55,5
2 0	29	10	21,5	20	59
5	29	15	20	25	65
10	26	20	24	30	74,5
15	27	25	27,5	35	91
20	26	30	28	40	98
25	25,5	35	25,5	45	100

Die Absorption zeigt hiernach im wesentlichen denselben Verlauf wie die des Wassers. Insbesondere erscheinen die drei

1) Die natürliche Dicke beträgt nach Messungen von P. Moennich (vgl. Zeitschr. f. vergl. Augenheilkunde. 1883. p. 1: Ueber den physikalisch-optischen Bau des Rindsauges). 0,866 mm.

Maxima bei 1,00, 1,25 und 1,50 μ, deren Auftreten nach p. 414 und 415 auch für eine Wasserschicht von gleicher Dicke zu erwarten wäre. Der selectiven Absorption ist aber infolge der Trübung noch eine allgemeine Absorption übergelagert, welche sich natürlich um so stärker bemerkbar macht, je kürzer die Wellen werden, sodass an der Grenzstelle der Sichtbarkeit die Absorption nach grösseren Wellenlängen hin sogar ziemlich stark im Abnehmen begriffen zu sein scheint.

b) Kammerwasser. $d = 0{,}005$ cm.

Dass die wässerige Feuchtigkeit der vorderen Augenkammer ein mit dem des Wassers übereinstimmendes Absorptionsspectrum zeigen wird, ist nach der Art ihrer chemischen Zusammensetzung schon von vornherein zu erwarten. Es gelang mir nicht, dem Rindsauge eine genügend grosse Menge des Kammerwassers zu entnehmen, um eine Schicht von annähernd natürlicher Dicke untersuchen zu können, da dasselbe auch beim Absaugen mittels einer durch die Hornhaut gestossenen Pravaz'schen Spritze sich durch das Pigment der Iris ganz und gar verunreinigt zeigte. Ich musste mich daher begnügen einen einzigen Tropfen auf diese Weise abzusaugen. Dieses geringe Quantum konnte in einem genügenden Grade von Klarheit gewonnen werden und wurde in der früher beschriebenen Weise zwischen die durch fünf übereinandergelegte Stanniolringe getrennten Flussspathplatten gebracht, so dass eine Schicht von 0,005 cm Dicke zur Untersuchung gelangte. Tabelle VIII und Fig. 6, Curve a, Taf. IV geben die Messungsresultate wieder.

Tabelle VIII.

δ	A	δ	A
2° 0′	−2	4° 0′	14
10	−1	10	7
20	1	20	7,5
30	2	30	15
40	1,5	40	42
50	0,5	50	20
3 0	−2	5 0	14
10	1,5	10	15,5
20	−1,5	20	30,5
30	1,5	30	44,5
40	1	40	56,5
50	12,5	50	82

Der Absorptionsverlauf ist, wie man sieht, thatsächlich der nämliche wie bei einer 0,005 cm dicken Wasserschicht.

c) Linse. $d = 1$ cm.

Die Krystalllinse wurde unter Benutzung des p. 414 beschriebenen Absorptionsgefässes zwischen zwei um 1 cm voneinander abstehende Glasplatten gepresst. So entstand in der Mitte eine Schicht mit ebenen Begrenzungsflächen, da die Axe der Linse des Rindsauges eine Länge von 1,2 cm besitzt. Durch Anwendung geeigneter Diaphragmen wurde immer nur der Theil des Präparates, der sich zwischen den ebenen Begrenzungsflächen befand, in den Strahlengang eingeschaltet.

Wegen des geringen Durchmessers der Diaphragmenöffnung waren die Ausschläge hier erst von $\delta = 2^0\,10'$ an zu exacten Messungen brauchbar.

Durch die eben beschriebene Anordnung war aber infolge der eigenthümlichen Structur der Krystalllinse die concentrirende Wirkung derselben nicht völlig aufgehoben. Ich erhielt daher bis zum Ablenkungswinkel $\delta = 3^0\,15'$ bei directer Bestrahlung geringere Ausschläge als nach Einschaltung der Linse. Setze ich die betreffenden Ausschläge bez. gleich α und α', so war also bis zu der genannten Stelle des Spectrums α kleiner als α'. Bildete ich daher in gewohnter Weise die Ausdrücke

$$p' = 100\,\frac{\alpha - \alpha'}{\alpha},$$

die mir sonst die procentischen Intensitätsverluste lieferten, so ergaben sich für p' zunächst negative Grössen. Wurden die Werthe von p' dann graphisch aufgetragen, so entstand eine Curve, die bis $3^0\,15'$ unterhalb der Abscissenaxe verlief, zwischen $3^0\,15'$ und $3^0\,20'$ die Axe schnitt, um bei $3^0\,50'$ mit der Ordinate $p' = +\,100$ zu endigen. Im übrigen zeigte diese Curve indessen wesentlich denselben Verlauf, wie die der Absorption einer Wasserschicht von 1 cm Dicke. Ich theile deshalb die Beobachtungsresultate hier in etwas anderer Weise mit, um ein anschaulicheres Bild von den thatsächlichen Verhältnissen zu geben, als es jene Curve der direct beobachteten Werthe mit ihren „negativen Absorptionen" darbietet. Es schien mir nämlich nach dem eben Gesagten kaum zweifelhaft zu sein, dass auch die Absorption der Linse in jeder Hinsicht mit der

des Wassers übereinstimmte. Giebt man dies aber für eine beliebige Stelle des Spectrums zu, so ist es möglich, den Einfluss der Concentration durch Rechnung zu eliminiren.

Man denke sich in den Strahlengang eine Linse eingeschaltet, welche die gleiche Concentrationsfähigkeit besitzen möge wie das von mir bei dieser Untersuchung benutzte Präparat; ihr Absorptions- und Reflexionsvermögen sei aber gleich Null. Dann würde bei der Bestrahlung des Bolometers ein Galvanometerausschlag erfolgen, der dem bei directer Bestrahlung gemessenen Ausschlage α proportional wäre, also gleich $m \cdot \alpha$ gesetzt werden kann; dabei ist m unter Vernachlässigung der Dispersion als eine für alle Punkte des Spectrums constante Zahl anzusehen, die natürlich grösser als 1 sein muss. Würde jetzt ein Medium dazugeschaltet, welches das gleiche Absorptions- und Reflexionsvermögen besässe, wie das Präparat sammt dem Glasgefässe, ohne jedoch dabei eine concentrirende Wirkung auszuüben, so würde der Galvanometerausschlag den wirklich gemessenen Werth α' erhalten. Infolge der Absorption und Reflexion ist also ein Intensitätsverlust p eingetreten, der in Procenten gegeben ist durch die Beziehung

$$p = 100 \frac{m\alpha - \alpha'}{m\,\alpha}.$$

worin c eine für alle Punkte des Spectrums constante Grösse bedeutet. Nehme ich nun an, dass für den ersten beobachteten Punkt ($\delta = 2^\circ 10'$) das Absorptionsvermögen der Linse das gleiche ist wie das des Wassers, so ergiebt sich an der betreffenden Stelle des Spectrums für die Grösse p ein bestimmter, meinen früheren Messungen zu entnehmender Werth. Da ferner α und α' die direct abgelesenen Ausschläge bedeuten, so kann man jetzt den Proportionalitätsfactor m durch Einsetzen der zu dem ersten Beobachtungspunkte gehörigen Werthe von α und α' berechnen, und dann für alle übrigen Punkte die zugehörigen Werthe von p bestimmen. An den letzteren kann man schliesslich wieder die nothwendigen Correctionen anbringen. Auf diese Weise sind die in der Tabelle IX und in der Fig. 6, Curve b, Taf. IV unter A wiedergegebenen Absorptionswerthe der Linse hergeleitet.

Die Vertheilung der Absorption ist hiernach die nämliche wie die einer 1 cm dicken Schicht Wassers. Die Maxima bei

1,00 und 1,25 μ treten in beiden Fällen mit gleicher Deutlichkeit auf. Es liegt ja nun eine gewisse Willkürlichkeit in dem Verfahren, nach dem die Zahlen der Tabelle IX aus den beobachteten Grössen hergeleitet sind, und aus diesem Grunde erscheint es nicht unbedingt ausgeschlossen, dass sämmtliche Werthe in Wahrheit etwas zu niedrig angegeben sind; indessen ist doch mit Sicherheit festgestellt, dass die Strahlen jenseits der Grenze der Sichtbarkeit noch bis nahezu 1,45 μ merklich hindurchgelassen werden. Ausserdem habe ich mich auch davon überzeugt, indem ich grössere Diaphragmen benutzte, dass die wahre Absorptionscurve der Linse bei 0,81 μ sicherlich keine starke Steigung besitzt, und schliesslich habe ich noch in folgender Weise zwei Beobachtungsreihen ausgeführt: Zwischen die Flussspathplatten, die durch fünf Stanniolringe auseinandergehalten waren, wurde einmal eine kleine Menge der äusseren weichen Linsensubstanz gepresst, ein zweites Mal ein geringes Quantum des härteren Kerns, und für diese Präparate wurden die Absorptionen gemessen. Die Beobachtungen ergaben hier sowohl qualitativ als auch quantitativ eine vollkommene Uebereinstimmung mit dem Wasser.

Tabelle IX.

δ	A	δ	A
2° 10′	3,5	3° 5′	25,5
15	10,5	10	25
20	14,5	15	28,5
25	15,5	20	45,5
30	16,5	25	64
35	17,5	30	67
40	18,5	35	63,5
45	26,5	40	69
50	34,5	45	84
55	34	50	100
3 0	31,5		

Aus diesen Versuchen glaube ich den Schluss ziehen zu dürfen, dass auch das Absorptionsspectrum der Krystalllinse sich von dem des Wassers nicht wesentlich unterscheidet.

d) Glaskörper. $d = 1$ cm.

Das letzte der Medien, die ein Strahl im Auge bis zur Netzhaut zu durchlaufen hat, ist der Glaskörper. Derselbe wurde in das p. 404 beschriebene Absorptionsgefäss gefüllt,

also in einer Schicht von 1 cm Dicke untersucht. Die in der Tabelle X und Fig. 7 Taf. IV wiedergegebenen Zahlen sind die Mittelwerthe aus drei vollständigen mit drei verschiedenen Präparaten ausgeführten Beobachtungsreihen.

Die Uebereinstimmung mit Wasser lässt kaum etwas zu wünschen übrig. Die grösseren Absorptionen im ersten Theile des untersuchten Spectrums sind zweifellos wieder den unvermeidlichen Trübungen der Präparate zuzuschreiben.

Tabelle X.

δ	A	δ	A	δ	A
1° 20′	10	2° 15′	10	3° 10′	22,5
25	10	20	10,5	15	31
30	10	25	9,5	20	59
35	11,5	30	11	25	71
40	10	35	13	30	71
45	10,5	40	16	35	73
50	10,5	45	27	40	83
55	12	50	38,5	45	96
2° 0′	10	55	38	50	100
5	8	3° 0′	30,5		
10	8,5	5	22,5		

3) Controllversuche am Menschenauge.

Zur vollständigen Behandlung des Gegenstandes blieb jetzt nur noch der Nachweis zu führen, dass die aus den bisherigen Beobachtungen zu ziehenden Folgerungen auch ohne weiteres für das menschliche Auge Giltigkeit besitzen würden. Durch das dankenswerthe Entgegenkommen des Hrn. Prof. Dr. Langerhans, der mir aus dem pathologisch-anatomischen Institute des Krankenhauses Moabit das nöthige Material zukommen liess, wurde ich in den Stand gesetzt, analoge Versuchsreihen auch für die Medien des menschlichen Auges auszuführen. Dieselben ergaben vollständige Uebereinstimmung mit den Messungen am Rindsauge. Entsprechend den kleineren Dimensionen des menschlichen Sehorgans mussten die Medien desselben in Schichten von etwas geringerer Dicke zur Untersuchung gelangen. Demzufolge erschien die äusserste Grenze der Durchlässigkeit auch noch etwas weiter nach der Seite längerer Wellen hinausgeschoben.

4) Versuchsergebnisse.

Ich ziehe aus meinen Beobachtungen den Schluss, dass das Absorptionsspectrum der Augenmedien, die ein Strahl bis

zur Netzhaut zu durchlaufen hat, mit dem des Wassers ziemlich genau übereinstimmt. Die Entfernung vom Scheitel der Cornea bis zur Netzhaut beträgt beim Auge des Menschen 2,28 cm.[1]) Ich kann daher die Absorptionswerthe, die der Gesammtheit der Medien des menschlichen Auges zukommen, mit ziemlicher Annäherung ermitteln, indem ich nach den Tabellen III und IV die betreffenden Grössen für eine Wasserschicht von 2,28 cm Dicke berechne. Auf diese Weise ergaben sich die Werthe, die in der Tabelle XI und in Fig. 8, Taf. IV als Function der Wellenlänge dargestellt sind.

Tabelle XI.

λ	A	λ	A	λ	A
0,670	1	0,850	8	1,063	36
0,690	1	0,872	10,5	1,095	34,5
0,710	2,5	0,890	12	1,127	48,5
0,730	5	0,912	16,5	1,162	82
0,750	6	0,935	24	1,205	93
0,770	6,5	0,958	43	1,252	94
0,790	5	0,980	60	1.300	93,5
0,810	5	1,008	60,5	1,350	97,5
0,830	8	1,035	47,5	1,400	100

Man erkennt hieraus, dass erst von ca. 1,4 μ an die Strahlen von den Medien des menschlichen Auges nicht mehr merklich durchgelassen werden, dass aber an der Grenze des sichtbaren Gebietes die Absorption noch keine besonders intensive ist. Es folgt also aus meinen Versuchen,

„dass die Ursache der Unsichtbarkeit der ultrarothen Strahlen in der Unempfindlichkeit der Netzhautelemente für dieselben zu suchen ist."

Die vorstehende Arbeit wurde im physikalischen Institute der Universität Berlin während des Wintersemesters 1894/95 ausgeführt.

Zum Schluss erfülle ich die angenehme Pflicht den Hrn. Dr. H. Rubens und Prof. Dr. A. König, die mir die Anregung zu diesen Untersuchungen gaben und mich während der Ausführung derselben in liebenswürdigster Weise durch Rath und That unterstützten, meinen besten Dank auszusprechen.

1) H. v. Helmholtz, Handbuch d. physiol. Optik, 2. Aufl., p. 140.

2. *Theoretische Untersuchungen über elastische Körper; von P. Glan.*

III. Ueber den Wärmeverbrauch bei Gestaltsänderungen.

Es mag der *Wärmeverbrauch* eines unendlich kleinen Theiles eines elastischen Körpers *infolge einer Gestaltsänderung* $\varphi(\omega, t)$, in der Bezeichnung der zugehörigen vorhergehenden Untersuchungen, und der sie begleitenden Temperaturänderung hier betrachtet werden. Es soll dieser Wärmeverbrauch, gerechnet für die Einheit des Volumens und der Zeit, mit w_φ bezeichnet werden und er stellt, wenn er positiv ist, die calorisch gemessene Wärmemenge dar, welche, für die Volumeneinheit und die der Zeit gerechnet, dem Theilchen von aussen während der entsprechenden Gestaltsänderung zugeführt werden muss, oder die ihm entzogen werden muss, wenn er negativ ist.

Wir wollen zuerst eine *unendlich kleine Zustandsänderung constanter Temperatur* betrachten. Die Anfangswerthe der Gestaltsvariabeln des Theilchens, das wir uns als unendlich kleines schiefwinkliges Parallelepiped denken, mögen m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3 sein und sich bei derselben beziehlich um dm_1, dm_2, dm_3, dn_1, dn_2, dn_3 ändern. Es soll die *Arbeitsleistung* während derselben untersucht werden. Wir denken uns diese unendlich kleine Gestaltsänderung ausgeführt, indem die von aussen auf das schiefwinklige Parallelepiped wirkenden Kräfte sich nur unendlich wenig von den von seinem Innern auf seine Seitenflächen ausgeübten elastischen Kräften unterscheiden. Die Arbeit dieser äusseren elastischen Kräfte ist dann entgegengesetzt derjenigen der inneren. Es ändert sich nun die Function der elastischen Arbeit bei constanter Temperatur t gerechnet für die Volumeneinheit f_t, für den Anfangszustand $m_1, \ldots, n_3, t$ des Parallelepipeds, welche den Betrag an elastischer Arbeit angiebt, den es bei der constanten Temperatur t zu leisten vermag, wenn es von diesem Zustand zu dem ohne elastische Kräfte übergeht, bei der betrachteten unendlich kleinen Zustandsänderung um

$$D_{m_1} f_t dm_1 + D_{m_2} f_t dm_2 + D_{m_3} f_t dm_3 + D_{n_1} f_t dn_1 + D_{n_2} f_t dn_2 + D_{n_3} f_t dn_3;$$

dieser Betrag ist also entgegengesetzt dem, den die elastischen Kräfte seines Innern auf seine Seitenflächen in diesem Falle produciren, und mithin gleich der Arbeitsleistung der äusseren Kräfte bei der betrachteten unendlich kleinen Gestaltsänderung.

Lässt man zweitens von demselben Anfangszustande aus die Temperatur um dt wachsen, während die Kräfte auf die Seitenflächen des schiefwinkligen Parallelepipeds constant bleiben, so wollen wir nun die *Arbeitsleistung dieser unendlich kleinen Zustandsänderung bei constanten Kräften* bestimmen. Das Parallelepiped denken wir uns als Theil eines Körpers, der die Gestaltsänderung $\varphi\ (\omega, t)$ erfährt. Seine drei Kanten von einer seiner Ecken aus, deren Vector zur Zeit t gleich $\varphi\ (\omega, t)$ ist, nämlich $x d\varphi_{\omega_1}$, $y d\varphi_{\omega_2}$, $z d\varphi_{\omega_3}$, waren vor Beginn der Gestaltsänderung des Körpers drei zu einander rechtwinklige Vectoren von gleicher Länge, $x\omega_1$, $y\omega_2$, $z\omega_3$ von dem Punkte des Körpers aus, dessen Vector nach ihr $\varphi\ (\omega, t)$ ist. Nehmen wir eine sehr kleine Kugel um diesen Punkt, in deren Oberfläche die Endpunkte der drei Vectoren $x\omega_1$, $y\omega_2$, $z\omega_3$ liegen mögen. Aus ihr ist zur Zeit t ein unendlich kleines Ellipsoid geworden, in dem jene Linien des Körpers die drei conjugirten Halbmesser $x d\varphi_{\omega_1}$, $y d\varphi_{\omega_2}$, $z d\varphi_{\omega_3}$ sind, die drei soeben genannten Kanten des Parallelepipeds. In diesem Zustande ist die Masse desselben mit den Eigenschaften eines Krystalls behaftet. Es bestehen Unterschiede der Leitungsfähigkeit für Wärme nach verschiedenen Richtungen in ihr und der thermischen linearen Ausdehnungsindices, auch in einem ursprünglichen Nichtkrystall. Die Lage der drei zu einander rechtwinkligen krystallographischen Axen eines solchen Theilchens um einen Punkt P des Körpers zu suchen, wenn er eine Gestaltsänderung $\varphi\ (\omega, t)$ erlitten hat, soll unsere nächste Aufgabe sein.

Die *Gleichung des Ellipsoids der Gestaltsänderung* um den Punkt P als Mittelpunkt, den wir uns als den Eckpunkt denken, von dem in dem schiefwinkligen Parallelepipede die drei Kanten $x d\varphi_{\omega_1}$, $y d\varphi_{\omega_2}$, $z d\varphi_{\omega_3}$ ausgehen, welche conjugirte Halbmesser jenes sind, lautet:

$$\varrho = \mathfrak{x} x d\varphi_{\omega_1} + \mathfrak{y} y d\varphi_{\omega_2} + \mathfrak{z} z d\varphi_{\omega_3},$$

in Verbindung mit der Beziehung

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 = 1;$$

es sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ in diesen Gleichungen drei variable Scalare. Wir wollen die *Hauptaxen* dieses Ellipsoids bestimmen. Zu dem Zwecke soll zuerst die Form seiner Gleichung geändert werden. Irgend ein Vector kann in der Form gegeben werden

$$\varrho S x d\varphi_{\omega_1} y d\varphi_{\omega_2} z d\varphi_{\omega_3} = x d\varphi_{\omega_1} S y d\varphi_{\omega_2} z d\varphi_{\omega_3} \varrho + y d\varphi_{\omega_2} S z d\varphi_{\omega_3} x d\varphi_{\omega_1} \varrho + z d\varphi_{\omega_3} S x d\varphi_{\omega_1} y d\varphi_{\omega_2} \varrho.$$

Wenn nun ϱ ein Vector des Ellipsoids der Gestaltsänderung ist, so muss, da sich ein Vector nur auf eine einzige Weise als Summe dreier diplanarer Vectoren darstellen lässt, deren Richtungen gegeben sind, die Gleichung bestehen:

$$\frac{(S y d\varphi_{\omega_2} z d\varphi_{\omega_3} \varrho)^2 + (S z d\varphi_{\omega_3} x d\varphi_{\omega_1} \varrho)^2 + (S x d\varphi_{\omega_1} y d\varphi_{\omega_2} \varrho)^2}{(S x d\varphi_{\omega_1} y d\varphi_{\omega_2} z d\varphi_{\omega_3})^2} = 1.$$

Sieht man in ihr ϱ als einen variabeln Vector an, so ist sie danach eine neue Form der Gleichung des Ellipsoids der Gestaltsänderung. Sie besagt, dass *die Summe der Quadrate der Volumina der Parallelepipede, welche ein Radiusvector eines Ellipsoids mit je zweien von drei conjugirten Halbmessern bildet, constant ist, und zwar gleich dem Quadrate des Volumens des Parallelepipeds seiner drei Hauptaxen.*

Die letztere Gleichung lässt sich nun weiter umbilden. Wir können setzen

$$\begin{aligned}(S y d\varphi_{\omega_2} z d\varphi_{\omega_3} \varrho)^2 &= (S V y d\varphi_{\omega_2} \cdot \varrho)^2 \\ &= S\varrho V y d\varphi_{\omega_2} z d\varphi_{\omega_3} S V y d\varphi_{\omega_2} z d\varphi_{\omega_3} \cdot \varrho \\ &= S(\varrho V y d\varphi_{\omega_2} z d\varphi_{\omega_3} S V y d\varphi_{\omega_2} z d\varphi_{\omega_3} \cdot \varrho);\end{aligned}$$

wenn wir in derselben Weise die beiden anderen Quadrate des Zählers der linken Seite der letzten Gleichung des Ellipsoids der Gestaltsänderung umschreiben, so nimmt sie die Form an:

$$S\varrho \left(\frac{V y d\varphi_{\omega_2} z d\varphi_{\omega_3} S V y d\varphi_{\omega_2} z d\varphi_{\omega_3} \cdot \varrho + V z d\varphi_{\omega_3} x d\varphi_{\omega_1} S V z d\varphi_{\omega_3} x d\varphi_{\omega_1} \cdot \varrho + V x d\varphi_{\omega_1} y d\varphi_{\omega_2} S V x d\varphi_{\omega_1} y d\varphi_{\omega_2} \cdot \varrho}{(S x d\varphi_{\omega_1} y d\varphi_{\omega_2} z d\varphi_{\omega_3})^2} \right) = 1.$$

Bezeichnen wir den Factor von ϱ unter dem ersten Scalarzeichen mit $\varphi_0 \varrho$, so lässt sie sich in der kürzeren Gestalt schreiben:

$$S\varrho\varphi_0\varrho = 1.$$

Die Vectorfunction $\varphi_0 \varrho$ ist ersichtlich eine distributive und selbst conjugirte. Wir wollen ihre Bedeutung aufsuchen.

Die Differentialgleichung der vorigen Form der Gleichung des Ellipsoids der Gestaltsänderung ist

$$\begin{aligned} dS\varrho\varphi_0\varrho &= 0 = S.d\varrho\varphi_0\varrho \\ &= Sd\varrho\varphi_0\varrho + S\varrho d\varphi_0\varrho, \end{aligned}$$

oder, da $\varphi_0\varrho$ eine distributive Function ist,

$$Sd\varrho\varphi_0\varrho + S\varrho\varphi_0 d\varrho = 0.$$

Weil nun $\varphi_0\varrho$ sich selbst conjugirt ist, wird $S\varrho\varphi_0 d\varrho = Sd\varrho\varphi_0\varrho$ und also unsere letzte Gleichung

$$2Sd\varrho\varphi_0\varrho = 0,$$

und mithin ist $\varphi_0\varrho \perp d\varrho$. Da nun $d\varrho$ in der Tangentialebene des Ellipsoids durch den Endpunkt von ϱ liegt, hat $\varphi_0\varrho$ die Richtung der Normale in diesem Punkte zur Fläche. Die Hauptaxen sind diejenigen Werthe von ϱ, für welche ϱ und $\varphi_0\varrho$ parallele Vectoren sind, und folglich die Vectorwurzeln der Gleichung $V\varrho\varphi_0\varrho = 0$. Sie kann auch geschrieben werden $V\varrho(\varphi_0\varrho + c\varrho) = 0$, wenn c ein beliebiger Scalar ist, und ihr genügt dann augenscheinlich jedes Werthepaar von ϱ und c, für das $\varphi_0\varrho + c\varrho$ verschwindet. Solcher Paare gibt es drei, c_1 und β_1, c_2 und β_2, c_3 und β_3, von denen c_1, c_2, c_3 drei reelle Scalare und β_1, β_2, β_3 drei zu einander lothrechte Einheitsvectoren sind. Für sie ist danach $\varphi_0\beta_1 = -c_1\beta_1$, $\varphi_0\beta_2 = -c_2\beta_2$, $\varphi_0\beta_3 = -c_3\beta_3$; und also $S\beta_1\varphi_0\beta_1 = -c_1\beta_1^2 = c_1$, mit entsprechenden Gleichungen für die anderen Werthepaare. Es folgt $c_1^{-1}S\beta_1\varphi_0\beta_1 = 1 = Sc_1^{-1/2}\beta_1\varphi_0 c_1^{-1/2}\beta_1$, und eine analoge Gleichung für c_2, β_2 und c_3, β_3. Die drei Vectoren $c_1^{-1/2}\beta_1$, $c_2^{-1/2}\beta_2$, $c_3^{-1/2}\beta_3$ sind danach die Hauptaxen des Ellipsoids $S\varrho\varphi_0\varrho = 1$.

Die Scalare c_1, c_2, c_3 sind die drei Wurzeln der cubischen Gleichung

$$c^3 + m''c^2 + m'c + m = 0,$$

in der zu nehmen ist

$$m = -\left(S.\frac{Vyd\varphi_{\omega_2}zd\varphi_{\omega_3}Vzd\varphi_{\omega_3}xd\varphi_{\omega_1}Vxd\varphi_{\omega_1}yd\varphi_{\omega_2}}{(Sxd\varphi_{\omega_1}yd\varphi_{\omega_2}zd\varphi_{\omega_3})^3}\right)^2,$$

$$m' = -\left[V.\frac{Vz\,dq_{\omega_3}\,x\,dq_{\omega_1}\,Vx\,dq_{\omega_1}\,y\,dq_{\omega_2}}{(Sx\,dq_{\omega_1}\,y\,dq_{\omega_2}\,z\,dq_{\omega_3})^2}\right]^2$$
$$-\left[V.\frac{Vx\,dq_{\omega_1}\,y\,dq_{\omega_2}\,Vy\,dq_{\omega_2}\,z\,dq_{\omega_3}}{(Sx\,dq_{\omega_1}\,y\,dq_{\omega_2}\,z\,dq_{\omega_3})^2}\right]^2$$
$$-\left[V.\frac{Vy\,dq_{\omega_2}\,z\,dq_{\omega_3}\,Vz\,dq_{\omega_3}\,x\,dq_{\omega_1}}{(Sx\,dq_{\omega_1}\,y\,dq_{\omega_2}\,z\,dq_{\omega_3})^2}\right]^2$$

$$m'' = \left[\frac{Vy\,dq_{\omega_2}\,z\,dq_{\omega_3}}{Sx\,dq_{\omega_1}\,y\,dq_{\omega_2}\,z\,dq_{\omega_3}}\right]^2 + \left[\frac{Vz\,dq_{\omega_3}\,x\,dq_{\omega_1}}{Sx\,dq_{\omega_1}\,y\,dq_{\omega_2}\,z\,dq_{\omega_3}}\right]^2$$
$$+\left[\frac{Vx\,dq_{\omega_1}\,y\,dq_{\omega_2}}{Sx\,dq_{\omega_1}\,y\,dq_{\omega_2}\,z\,dq_{\omega_3}}\right]^2.$$

Die drei Einheitsvectoren β_1, β_2, β_3 sind die Versoren der drei Vectoren $\Psi_1\varrho$, $\Psi_2\varrho$, $\Psi_3\varrho$, und es ist

$$\Psi_1\varrho = \psi\varrho + c_1\chi\varrho + c_1^2\varrho,$$
$$\Psi_2\varrho = \psi\varrho + c_2\chi\varrho + c_2^2\varrho,$$
$$\Psi_3\varrho = \psi\varrho + c_3\chi\varrho + c_3^2\varrho,$$

ferner

$$\psi\varrho = V.\frac{Vx\,dq_{\omega_3}x\,dq_{\omega_1}\,Vx\,dq_{\omega_1}y\,dq_{\omega_2}\,S(Vx\,dq_{\omega_1}y\,dq_{\omega_2}\,Vz\,dq_{\omega_3}x\,dq_{\omega_1})\varrho}{(Sx\,dq_{\omega_1}\,y\,dq_{\omega_2}\,z\,dq_{\omega_3})^4}$$
$$+ V.\frac{Vx\,dq_{\omega_1}y\,dq_{\omega_2}\,Vy\,dq_{\omega_2}z\,dq_{\omega_3}\,S(Vy\,dq_{\omega_2}z\,dq_{\omega_3}\,Vx\,dq_{\omega_1}y\,dq_{\omega_2})\varrho}{(Sx\,dq_{\omega_1}y\,dq_{\omega_2}\,z\,dq_{\omega_3})^4}$$
$$+ V.\frac{Vy\,dq_{\omega_2}z\,dq_{\omega_3}\,Vz\,dq_{\omega_3}x\,dq_{\omega_1}\,S(Vz\,dq_{\omega_3}x\,dq_{\omega_1}\,Vy\,dq_{\omega_2}z\,dq_{\omega_3})\varrho}{(Sx\,dq_{\omega_1}\,y\,dq_{\omega_2}\,z\,dq_{\omega_3})^4}$$

$$\chi\varrho = V[Vy\,dq_{\omega_2}z\,dq_{\omega_3}V.(Vy\,dq_{\omega_2}z\,dq_{\omega_3})\varrho$$
$$+ Vz\,dq_{\omega_3}x\,dq_{\omega_1}V.(Vz\,dq_{\omega_3}x\,dq_{\omega_1})\varrho$$
$$+ Vx\,dq_{\omega_1}y\,dq_{\omega_2}V.(Vx\,dq_{\omega_1}y\,dq_{\omega_2})\varrho]$$
$$: (Sx\,dq_{\omega_1}y\,dq_{\omega_2}z\,dq_{\omega_3})^2.$$

Die drei Hauptaxen dieses Ellipsoids der Gestaltsänderung $q(\omega, t)$ für einen Punkt P eines Körpers sind nun drei Richtungen in ihm, welche auch vor derselben rechtwinklig zueinander waren. Denkt man sich also, ehe sie eintritt, in ihm einen kleinen Würfel, dessen eine Ecke P ist und dessen Kanten parallel jenen drei Richtungen sind, so ist aus diesem nach ihr ein rechtwinkliges Parallelepiped geworden. Wenn der Körper nicht krystallisch ist, so sind in diesem Falle die elastischen Kräfte, welche das Innere auf die Seitenflächen

des Parallelepipeds ausübt, nach den Versuchen senkrecht gegen seine Seitenflächen gerichtet. Die drei derselben, welche den Punkt P enthalten, liegen jedoch in den Hauptdiametralebenen des Ellipsoids der Gestaltsänderung $\varphi(\omega, t)$ für den Punkt P, danach sind diese letzteren also ebene Elemente durch P, für welche die zugehörigen elastischen Kräfte, entstanden durch diese Gestaltsänderung, lothrecht zu ihnen sind. Dann sind jedoch die Vectoren dieser elastischen Kräfte die Hauptaxen des Kraftellipsoids zu P bei dieser Gestaltsänderung. Folglich *haben bei jeder Gestaltsänderung eines nichtkrystallischen Körpers die Hauptaxen des Ellipsoids derselben für einen seiner Punkte und diejenigen des zugehörigen Kraftellipsoids gleiche Richtung.*

Die Hauptdiametralebenen dieser beiden Ellipsoide sind mithin sowohl in Bezug auf die Gestaltsänderung als auf die elastischen Kräfte physikalische Symmetrieebenen der unendlich kleinen Masse des Körpers um P und auch in Bezug auf ihre Schnittlinien, die Hauptaxen der Ellipsoide, herrscht Symmetrie. Sie entsprechen in dieser Hinsicht den krystallographischen Axen eines Krystalls. Bei einer Temperaturerhöhung der Masse um dt werden sie also dann ihre Richtung bewahren und nur ihre Lage ändern, und zwar die einzelnen um verschiedene Beträge; wir wollen jetzt die linearen Ausdehnungsindices für Wärme für sie bestimmen. Nennen wir sie a_1, a_2, a_3; sie sind mit der Gestaltsänderung der Masse gegeben, das heisst, in einem bestimmten veränderten Zustande derselben eben von bestimmtem Werthe. Die Gestaltsänderung ist nun wieder abhängig von den Hauptaxen des Ellipsoids derselben, und zwar nur von ihrer Länge, also sind a_1, a_2, a_3 auch Functionen derselben und wir können schreiben:

$$a_1 = f_1(c_1^{-1/2},\ c_2^{-1/2},\ c_3^{-1/2}),$$
$$a_2 = f_2(c_1^{-1/2},\ c_2^{-1/2},\ c_3^{-1/2}),$$
$$a_3 = f_3(c_1^{-1/2},\ c_2^{-1/2},\ c_3^{-1/2}).$$

Es mag der lineare Ausdehnungsindex für Wärme a_1 im Punkte P des Körpers der Hauptaxe von der Länge $c_1^{-1/2}$ zugehören, ebenso a_2 derjenigen von der Länge $c_2^{-1/2}$ und a_3 der, die $c_3^{-1/2}$ lang ist. Die Hauptaxen sind der Länge nach bekannt, wenn ihr Unterschied von der Länge der Linien des Körpers, die sie bilden, in ihrem Zustande vor der Gestalts-

änderung gegeben ist, da deren Länge für diesen Zustand bekannt ist. Die letztere ist x, beziehlich y, oder z, und jene Unterschiede sind folglich $c_1^{-1/2} - x$, $c_2^{-1/2} - y$, $c_3^{-1/2} - z$. Durch sie ist die Länge der Hauptaxen des Ellipsoids der Gestaltsänderung für P gleichfalls bestimmt, und deshalb müssen sie auch a_1, a_2, a_3 für P bestimmen, oder diese müssen sich auch als Functionen jener auffassen lassen, und wir haben auch

$$a_1 = f_1'(c_1^{-1/2} - x,\ c_2^{-1/2} - y,\ c_3^{-1/2} - z),$$
$$a_2 = f_2'(c_1^{-1/2} - x,\ c_2^{-1/2} - y,\ c_3^{-1/2} - z),$$
$$a_3 = f_3'(c_1^{-1/2} - x,\ c_2^{-1/2} - y,\ c_3^{-1/2} - z).$$

Die Scalarfunctionen f_1', f_2', f_3' sind jedenfalls im allgemeinen eindeutige, und, wenn keine Aenderung des Aggregatzustandes eintritt, wohl auch stetige Functionen ihrer Variabeln und sicher stets von endlichem Werthe. Wir wollen sie nach Potenzen ihrer Variabeln entwickeln, können jedoch nur die ersten in Betracht ziehen, da die Variabeln bei den hier betrachteten unendlich kleinen Gestaltsänderungen kleine Werthe haben. Wir bekommen also:

$$a_1 = a + a_1'(c_1^{-1/2} - x) + a_1''(c_2^{-1/2} - y) + a_1'''(c_3^{-1/2} - z),$$
$$a_2 = a + a_2'(c_1^{-1/2} - x) + a_2''(c_2^{-1/2} - y) + a_2'''(c_3^{-1/2} - z),$$
$$a_3 = a + a_3'(c_1^{-1/2} - x) + a_3''(c_2^{-1/2} - y) + a_3'''(c_3^{-1/2} - z).$$

Wenn die Variabeln gleich Null werden, der Körper um P also keine Gestaltsänderung erlitten hat, müssen die drei linearen Ausdehnungsindices a_1, a_2, a_3 natürlich sämmtlich gleich werden, nämlich gleich dem Werthe des linearen Ausdehnungsindex des Körpers für Wärme in seinem natürlichen Zustande, den wir mit a bezeichnen wollen. Da der hier betrachtete Körper kein Krystall ist, ist jede Richtung in ihm physikalisch gleichwerthig. In Bezug auf die Axe 1, wie wir diejenige kurz nennen wollen, deren Länge $c_1^{-1/2}$ ist, bleibt es dann gleich, wenn die Hauptaxe 2 von der Länge $c_2^{-1/2}$ und die Hauptaxe 3 von der Länge $c_3^{-1/2}$ ihre Längen vertauschen. Dabei darf dann auch a_1 seinen Werth nicht ändern, also muss sein

$$a_1'' = a_1'''.$$

Wenn ferner die Axe 2 dieselbe Länge, wie eben 1, erhält, 1 und 3 jedoch nun die Längen, welche soeben 2 und 3 hatten,

so verhält sich jetzt in Bezug zur Hauptaxe 2 alles so, wie kurz zuvor in Beziehung auf 1, und es muss deshalb nun a_2 gleich dem vorigen Werthe von a_1 werden. Da das statthaben muss beim Umtausch jedes Werthsystems für die Längen der drei Hauptaxen, so folgt, dass wir haben müssen

$$a_2'' = a_1'', \quad a_2' = a_1''', \quad a_2''' = a_1'''$$

und mithin

$$a_2' = a_2''' = a_1''.$$

Wenn endlich nun die dritte Hauptaxe die Länge erhält, wie zuerst 1, 1 und 2 nun aber diejenigen, welche erst 2 und 3 hatten, so verhält sich dann alles so zur Hauptaxe 3, wie zuerst zu 1, und es muss in diesem Falle a_3' gleich a_1 werden. Da das gleichfalls bei dem Austausch jedes Werthsystems von $c_1^{-1/2}$, $c_2^{-1/2}$, $c_3^{-1/2}$ stattfinden muss, so ergiebt sich

$$a_3''' = a_1', \quad a_3'' = a_1''', \quad a_3' = a_1''.$$

Fassen wir die Beziehungen, welche wir für die Coefficienten der Variabeln in den Ausdrücken für a_1, a_2, a_3 fanden, zusammen, so haben wir:

$$a_1' = a_2'' = a_3''' = a',$$

wie wir kurz schreiben werden. Die anderen Factoren der Variabeln in a_1, a_2, a_3 sind ebenfalls sämmtlich gleich; bezeichnen wir ihren gemeinsamen Werth mit a'', so wird

$$a_1 = a + a'(c_1^{-1/2} - x) + a''(c_2^{-1/2} - y) + a''(c_3^{-1/2} - z),$$
$$a_2 = a + a''(c_1^{-1/2} - x) + a'(c_2^{-1/2} - y) + a''(c_3^{-1/2} - z),$$
$$a_3 = a + a''(c_1^{-1/2} - x) + a''(c_2^{-1/2} - y) + a'(c_3^{-1/2} - z).$$

Die Werthe von a_1, a_2, a_3 müssen aber auch die gleichen bleiben, wenn man die drei unendlich kleinen Scalare x, y, z variirt, dann jedoch die Längen der drei zu einander rechtwinkligen Linien, deren Länge vor der Gestaltsänderung sie angeben, und die ihnen parallelen Linien der betrachteten Masse, in demselben Verhältniss verändert wie zuvor. Dabei bleiben die Quotienten $c_1^{-1/2}/x$, $c_2^{-1/2}/y$, $c_3^{-1/2}/z$ ungeändert. Da ich nun irgend eines der Glieder mit variabeln Factoren, z. B. $a'(c_1^{-1/2} - x)$, auch schreiben kann $a'x(c_1^{-1/2}/x - 1)$, und die rechten Seiten der vorigen Ausdrücke ungeändert bleiben sollen, welche unendlich kleinen Werthe ich auch dem x, y, z

geben mag, so müssen $a'x$, $a''y$ etc. Constanten sein, die ich jetzt mit a', a'' bezeichnen will, und wir haben dann:

$$a_1 = a + a'\left(\frac{c_1}{x}^{-1/2} - 1\right) + a''\left(\frac{c_2}{y}^{-1/2} - 1\right) + a''\left(\frac{c_3}{z}^{-1/2} - 1\right)$$

$$a_2 = a + a''\left(\frac{c_1}{x}^{-1/2} - 1\right) + a'\left(\frac{c_2}{y}^{-1/2} - 1\right) + a''\left(\frac{c_3}{z}^{-1/2} - 1\right)$$

$$a_3 = a + a''\left(\frac{c_1}{x}^{-1/2} - 1\right) + a''\left(\frac{c_2}{y}^{-1/2} - 1\right) + a'\left(\frac{c_3}{z}^{-1/2} - 1\right).$$

Dass die elastischen Kräfte, welche auf Flächen senkrecht zu den Hauptaxen des Ellipsoids der Gestaltsänderung für einen Punkt wirken, normal zu ihnen sind, wenn der Körper kein Krystall ist, folgt auch unmittelbar aus den Ausdrücken für diese Kräfte, die früher angegeben sind. Ans einem Würfel, dessen Kanten vor der Gestaltsänderung die Linien des Körpers von dem betrachteten Punkte aus sind, welche nach ihr die Hauptaxen des Ellipsoids derselben bilden, wird also durch sie ein rechtwinkliges Parallelepiped. In einem nichtkrystallischen Körper können wir irgend drei zu einander rechtwinklige Linien als diejenigen von ω_1, ω_2, ω_3 wählen in dem Ausdrucke der Function f für die elastische Arbeit bei constanter Temperatur gerechnet für die Volumeneinheit. Nehmen wir als solche die Kanten des eben erwähnten Würfels, so wird f für ihn unabhängig von n_1, n_2, n_3, da diese drei Grössen, die Cosinus der Winkel der Kanten des Parallelepids von einer Ecke aus, zu dem der Würfel wird, für dasselbe verschwinden. Mithin sind dann auch die Theilableitungen dieser Function nach jenen Variabeln gleich Null, und die Ausdrücke für die elastischen Kräfte ergeben

$$\alpha_1 = -\frac{df}{dm_1} U d\varphi_{\omega_1}, \quad \alpha_2 = -\frac{df}{dm_2} U d\varphi_{\omega_2}, \quad \alpha_3 = -\frac{df}{dm_3} U d\varphi_{\omega_3}.$$

Nun haben in unserem Falle $d\varphi_{\omega_1}$, $d\varphi_{\omega_2}$, $d\varphi_{\omega_3}$ die Richtungen der Hauptaxen des Ellipsoids der Gestaltsänderung des betrachteten Punktes und α_1, α_2, α_3 sind beziehentlich die Vectoren der elastischen Kräfte gerechnet für die Flächeneinheit auf die Seitenflächen des Parallelepipeds, welche die Kantenvectoren mit dem gleichzahligen Index nicht enthalten; sie sind also lothrecht zu ihnen. Die vorigen Gleichungen sprechen mithin den Satz aus:

Bei einem nichtkrystallischen Körper fallen bei einer Gestaltsänderung für jeden seiner Punkte die Richtungen der Hauptaxen des Ellipsoids derselben für ihn und derjenigen des zugehörigen Kraftellipsoids zusammen, und die Längen der letzteren sind lineare Functionen der drei Grössen der Dehnungen der Linien, welche die Hauptaxen der ersteren sind.

Wir wollen nun die Ausdehnung irgend einer Linie von P aus bei einer Aenderung der Temperatur bestimmen. Ein Vector ϱ_0 von P aus kann in der Form geschrieben werden

$$\varrho_0 = -\beta_1 S_{\beta_1}\varrho_0 - \beta_2 S_{\beta_2}\varrho_0 - \beta_3 S_{\beta_3}\varrho_0 .$$

Es sei die Anfangstemperatur t_0 und die Temperatur der Masse um P im Zustande der Gestaltsänderung $\varphi(\omega, t)$ werde t. Da sich parallele und gleich lange Linien im Körper dabei in derselben Weise ändern, so wird aus dem als materielle Linie betrachteten Vector ϱ_0 der Vector ϱ, nach der Gleichung

$$\varrho = -[1 + a_1(t-t_0)]\beta_1 S_{\beta_1}\varrho_0 - [1 + a_2(t-t_0)]\beta_2 S_{\beta_2}\varrho_0 - [1 + a_3(t-t_0)]\beta_3 S_{\beta_3}\varrho_0 .$$

Es ist also

$$T\varrho = T\varrho_0 \{[1 + a_1(t-t_0)]^2 (S_{\beta_1} U\varrho_0)^2 + [1 + a_2(t-t_0)]^2 (S_{\beta_2} U\varrho_0)^2 + [1 + a_3(t-t_0)]^2 (S_{\beta_3} U\varrho_0)^2\}^{1/2} .$$

Wenn man nun beachtet, dass $(S_{\beta_1} U\varrho_0)^2 + (S_{\beta_2} U\varrho_0)^2 + (S_{\beta_3} U\varrho_0)^2$ gleich der Einheit ist, und dass die linearen Ausdehnungsindices für Wärme a_1, a_2, a_3 erfahrungsmässig kleine Grössen sind, deren Quadrate gegen ihre ersten Potenzen weggelassen werden können, kann man schreiben:

$$T\varrho = T\varrho_0 [1 + (a_1 (S_{\beta_1} U\varrho_0)^2 + a_2 (S_{\beta_2} U\varrho_0)^2 + a_3 (S_{\beta_3} U\varrho_0)^2)(t-t_0)]$$

oder kürzer

$$T\varrho = T\varrho_0 [1 + a_{\varrho_0}(t-t_0)],$$

wenn wir

$$a_{\varrho_0} = a_1 (S_{\beta_1} U\varrho_0)^2 + a_2 (S_{\beta_2} U\varrho_0)^2 + a_3 (S_{\beta_2} U\varrho_0)^2$$

setzen. *Die Grösse a_{ϱ_0} ist der lineare Ausdehnungsindex für Wärme in der Richtung von ϱ_0* von P aus im betrachteten Zustande der Masse um diesen Punkt.

Wir wollen jetzt die Veränderung ins Auge fassen, welche ein unendlich kleines schiefwinkliges Parallelepiped erleidet, wie es aus einem Würfel bei einer stetigen Gestaltsänderung

entsteht, wenn seine Temperatur sich um dt ändert. Die Kanten des Parallelepipeds vor Beginn der Temperaturänderung mögen $x d\varphi_{\omega_1}$, $y d\varphi_{\omega_2}$, $z d\varphi_{\omega_3}$ sein, wie sie sich nach einer stetigen Gestaltsänderung $\varphi(\omega, t)$ aus den Vectoren $x\omega_1$, $y\omega_2$, $z\omega_3$ ergeben. Die sechs Scalarvariabeln, welche die Anfangsgestalt des Parallelepipeds charakterisiren, seien, nach der bisher für sie gebrauchten Bezeichnung, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3, und ich erinnere daran, dass m_1 gleich $(T d\varphi_{\omega_1} - 1)$ ist, mit entsprechenden Bedeutungen von m_2 und m_3, während n_1 gleich $-SU d\varphi_{\omega_1} U d\varphi_{\omega_2}$, oder $-Sd\varphi_{\omega_1} d\varphi_{\omega_2} : T d\varphi_{\omega_1} T d\varphi_{\omega_2}$ ist, und n_2 wie n_3 analogen Sinn haben. Aus dem Vector $x d\varphi_{\omega_1}$, den wir durch $-x\beta_1 S\beta_1 d\varphi_{\omega_1} - x\beta_2 S\beta_2 d\varphi_{\omega_1} - x\beta_3 S\beta_3 d\varphi_{\omega_1}$ ersetzen können, wird, sofern er eine unendlich dünne Linie der Masse um P ist, durch die Temperaturänderung um dt der Vector

$$-x(1-a_1 dt)\beta_1 S\beta_1 a\varphi_{\omega_1} - x(1+a_2 dt)\beta_2 S\beta_2 d\varphi_{\omega_1} - x(1+a_3 dt)\beta_3 S\beta_3 d\varphi_{\omega_1},$$

entsprechend wird aus $y d\varphi_{\omega_2}$ und $z d\varphi_{\omega_2}$ beziehlich

$$-y(1+a_1 dt)\beta_1 S\beta_1 d\varphi_{\omega_2} - y(1+a_2 dt)\beta_2 S\beta_2 d\varphi_{\omega_2} - y(1+a_3 dt)\beta_3 S\beta_3 d\varphi_{\omega_2},$$

$$-z(1+a_1 dt)\beta_1 S\beta_1 d\varphi_{\omega_3} - z(1+a_2 dt)\beta_2 S\beta_2 d\varphi_{\omega_3} - z(1+a_3 dt)\beta_3 S\beta_3 d\varphi_{\omega_3}.$$

Die Veränderungen, welche die Gestaltsvariabeln hierbei erleiden — wir wollen sie beziehlich $d_1 m_1$, $d_1 m_2$, $d_1 m_3$, $d_1 n_1$, $d_1 n_2$, $d_1 n_3$ nennen —, ergeben sich nun, wie folgt. Nach den kurz zuvor gegebenen Formeln für die veränderte Länge irgend einer Linie von P aus nach einem Temperaturwechsel ergiebt sich:

$$d_1 m_1 = T d\varphi_{\omega_1} a_{d\varphi_{\omega_1}} dt.$$

Beachten wir, dass $T d\varphi_{\omega_1}$ sich nur unendlich wenig von der Einheit unterscheidet, da wir hier allein unendlich kleine stetige Gestaltsänderungen $\varphi(\omega, t)$ behandeln, so können wir mit Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung auch setzen:

$$d_1 m_1 = a_{d\varphi_{\omega_1}} dt,$$

und entsprechend

$$d_1 m_2 = a_{d\varphi_{\omega_2}} dt, \quad d_1 m_3 = a_{d\varphi_{\omega_3}} dt.$$

Es wird ferner:

$$\begin{aligned} n_1 + d_1 n_1 = -S[&(1 + a_1 dt)\beta_1 S\beta_1 d\varphi_{\omega_1} + (1 + a_2 dt)\beta_2 S\beta_2 d\varphi_{\omega_1} \\ + &(1 + a_3 dt)\beta_3 S\beta_3 d\varphi_{\omega_1}] \cdot [1 + a_1 dt)\beta_1 S\beta_1 d\varphi_{\omega_2} \\ + &(1 + a_2 dt)\beta_2 S\beta_2 d\varphi_{\omega_2} + (1 + a_3 dt)\beta_3 S\beta_3 d\varphi_{\omega_2}] \\ : &(1 + a_{d\varphi_{\omega_1}} dt)(1 + a_{d\varphi_{\omega_2}} dt)\, T d\varphi_{\omega_1} T d\varphi_{\omega_2}. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man, dass

$$Sd\varphi_{\omega_1} d\varphi_{\omega_2} = -S\beta_1 d\varphi_{\omega_1} S\beta_1 d\varphi_{\omega_2} - S\beta_2 d\varphi_{\omega_1} S\beta_2 d\varphi_{\omega_2} - S\beta_3 d\varphi_{\omega_1} S\beta_3 d\varphi_{\omega_2}$$

ist und entsprechende Ausdrücke sich für $Sd\varphi_{\omega_3} d\varphi_{\omega_3}$ und $Sd\varphi_{\omega_2} d\varphi_{\omega_1}$ ergeben, und behalten wir nur Glieder bei, welche das Product der kleinen Grössen a_n — wie ich allgemein abkürzend die linearen Ausdehnungsindices für Wärme in den letzten Gleichungen bezeichnen will — und dt enthalten, doch keine, die das Quadrat eines solchen Productes als Factor enthalten, so findet man, dass

$$n_1 + d_1 n_1 = -\frac{Sd\varphi_{\omega_1} d\varphi_{\omega_2}}{\left(1 + (a_{d\varphi_{\omega_1}} + a_{d\varphi_{\omega_2}})\,dt\right) Td\varphi_{\omega_1} Td\varphi_{\omega_2}}$$
$$+ \frac{2(a_1 S\beta_1 d\varphi_{\omega_1} S\beta_1 d\varphi_{\omega_2} + a_2 S\beta_2 d\varphi_{\omega_1} S\beta_2 d\varphi_{\omega_2} + a_3 S\beta_3 d\varphi_{\omega_1} S\beta_3 d\varphi_{\omega_2})dt}{\left(1 + (a_{d\varphi_{\omega_1}} + a_{d\varphi_{\omega_2}})dt\right) Td\varphi_{\omega_1} Td\varphi_{\omega_2}}.$$

Danach ist also:

$$d_1 n_1 = -n_1 (a_{d\varphi_{\omega_1}} + a_{d\varphi_{\omega_2}})\,dt$$
$$+ \frac{2(a_1 S\beta_1 d\varphi_{\omega_1} S\beta_1 d\varphi_{\omega_2} + a_2 S\beta_2 d\varphi_{\omega_1} S\beta_2 d\varphi_{\omega_2} + a_3 S\beta_3 d\varphi_{\omega_1} S\beta_3 d\varphi_{\omega_2})dt}{Td\varphi_{\omega_1} Td\varphi_{\omega_2}},$$

und entsprechend ergiebt sich:

$$d_1 n_2 = -n_2 (a_{d\varphi_{\omega_2}} + a_{d\varphi_{\omega_2}})\,dt$$
$$+ \frac{2(a_1 S\beta_1 d\varphi_{\omega_2} S\beta_1 d\varphi_{\omega_2} + a_2 S\beta_2 d\varphi_{\omega_2} S\beta_2 d\varphi_{\omega_2} + a_3 S\beta_3 d\varphi_{\omega_2} S\beta_3 d\varphi_{\omega_2})dt}{Td\varphi_{\omega_2} Td\varphi_{\omega_2}}$$

$$d_1 n_3 = -n_3 (a_{d\varphi_{\omega_3}} + a_{d\varphi_{\omega_1}})\,dt$$
$$+ \frac{2(a_1 S\beta_1 d\varphi_{\omega_3} S\beta_1 d\varphi_{\omega_1} + a_2 S\beta_2 d\varphi_{\omega_3} S\beta_2 d\varphi_{\omega_1} + a_3 S\beta_3 d\varphi_{\omega_3} S\beta_3 d\varphi_{\omega_1})dt}{Td\varphi_{\omega_3} Td\varphi_{\omega_1}}.$$

Die *Arbeitsleistung der* betrachteten *unendlich kleinen Zustandsänderung bei constanten Kräften*, zu deren Beginn die Gestaltsvariabeln die Werthe $m_1, \ldots, n_3$, t und bei deren Schluss sie die Werthe $m_1 + d_1 m_1, \ldots, n_3 + d_1 n_3$, $t + dt$ haben, wobei $d_1 m_1, \ldots, d_1 n_3$ die soeben entwickelte Bedeutung haben, ist dann *für das* behandelte *Parallelepiped*:

$$-S[\alpha_1 (Ud\varphi_{\omega_1} d_1 m_1 + Ud\varphi_{\omega_3} d_1 n_1) + \alpha_2 (Ud\varphi_{\omega_3} d_1 m_2 + Ud\varphi_{\omega_3} d_1 n_2)$$
$$+ \alpha_3 (Ud\varphi_{\omega_2} d_1 m_3 + Ud\varphi_{\omega_1} d_1 n_3)]\,xyz,$$

bei der früheren Bedeutung aller Zeichen. Es mag hier bemerkt werden, dass sämmtliche zuletzt angewandten und behandelten linearen Ausdehnungsindices für Wärme genauer als diejenigen bei constanten Kräften hätten genannt werden müssen.

Wir wollen jetzt eine *unendlich kleine Zustandsänderung constanter Gestalt* betrachten. Während derselben, bei der sich nur die Temperatur um dt ändert, ist die *Arbeitsleistung* ersichtlich gleich *null*, da sich die Angriffspunkte der äusseren Kräfte in diesem Falle nicht verschieben.

Wenn wir nun eine *beliebige unendlich kleine Zustandsänderung des Parallelepipeds* in Betracht ziehen, bei der sich die Gestaltsvariabeln und die Temperatur beziehlich um dm_1, ..., dn_3, dt ändern mögen, so können wir von der Aenderung der elastischen Kräfte absehen, da sie sich bei den hier behandelten Zustandsänderungen stetig mit dem Zustande ändern und die bestimmenden Scalare des letzteren sich im vorliegenden Falle nur unendlich wenig verändern. Wir können ihnen also während derselben die Werthe beilegen, welche sie zu Beginn derselben hatten. Es mögen die Vectoren derselben in der bisher gebrauchten Bedeutung α_1, α_2, α_3 sein, dann ist danach die *Arbeitsleistung dieser inneren elastischen Kräfte des Parallelepipeds bei dieser unendlich kleinen Zustandsänderung*, nach dem, was wir kurz zuvor für die Arbeitsleistung bei einer unendlich kleinen Zustandsänderung bei constanten Kräften fanden,

$$-S[\alpha_1(Ud\varphi_{\omega_1}dm_1 + Ud\varphi_{\omega_2}dn_1) + \alpha_2(Ud\varphi_{\omega_2}dm_2 + Ud\varphi_{\omega_2}dn_2) + \alpha_3(Ud\varphi_{\omega_2}dm_3 + Ud\varphi_{\omega_1}dn_3)]xyz,$$

wenn wir von unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung absehen. Es muss jedoch hierbei beachtet werden, dass die Vectoren der elastischen Kräfte nicht nach den früher für sie aufgestellten Formeln berechnet werden können, da sich diese nur auf den Fall bezogen, wenn die Temperatur während der Gestaltsänderung constant blieb, was hier im allgemeinen nicht der Fall ist.

Wir wollen jetzt den *Wärmeverbrauch bei einer unendlich kleinen Zustandsänderung des Parallelepipeds* untersuchen. Er mag, gerechnet für die Volumeneinheit, mit dw bezeichnet werden. Da die hier betrachtete Zustandsänderung in dem Sinne unendlich klein ist, dass sich auch die Zwischenzustände unendlich wenig von ihrem Anfangs- und Endzustande unterscheiden, können die verschiedenen möglichen unendlich kleinen Zustandsänderungen des Parallelepipeds mit demselben Anfangs- und Endzustande als im Grenzfall zusammenfallend angesehen

werden. Dann ist eine solche aber bestimmt durch die ihr zugehörigen Anfangs- und Endwerthe der Gestaltsvariabeln und der Temperatur, oder durch die betreffenden Anfangswerthe und die Zunahmen, welche dieselben bis zum Endzustand erreichen, also durch $m_1, \ldots, n_3, \mathrm{t}$, und $dm_1, \ldots, dn_3, d\mathrm{t}$. Der Wärmeverbrauch dw hat nun für jede solche unendlich kleine Zustandsänderung einen bestimmten Werth und ist mit ihr und den sie bestimmenden Scalaren gegeben. Er ist also eine Function der letzteren und wir können schreiben:

$$dw = f(\mathrm{t}, m_1, \ldots, n_3, d\mathrm{t}, dm_1, \ldots, dn_3).$$

Entwickeln wir diese Function nach Potenzen der unendlich kleinen Variabeln $d\mathrm{t}, dm_1, \ldots, dn_3$ und führen wir diese Entwickelung nur bis zu den ersten Potenzen dieser Variabeln, so bekommen wir

$$dw = \frac{df_0}{d(d\mathrm{t})}\,d\mathrm{t} + \frac{df_0}{d(dm_1)}\,dm_1 + \frac{df_0}{d(dm_2)}\,dm_2 + \frac{df_0}{d(dm_3)}\,dm_3 + \frac{df_0}{d(dn_1)}\,dn_1 + \frac{df_0}{d(dn_2)}\,dn_2 + \frac{df_0}{d(dn_3)}\,dn_3;$$

das constante Glied dieser Entwickelung in Bezug auf $d\mathrm{t}, dm_1, \ldots, dn_3$ ist fortgelassen, da der Wärmeverbrauch dw mit $d\mathrm{t}, dm_1, \ldots, dn_3$ verschwinden muss. Der Index an f bedeutet, dass in den Theilableitungen von f die Variabeln $d\mathrm{t}, dm_1, \ldots, dn_3$ gleich Null zu setzen sind.

Die betrachtete allgemeine unendlich kleine Zustandsänderung des Parallelepipeds denken wir uns als eine umkehrbare, das heisst, es sollen sich während derselben die von aussen auf seine Seitenflächen wirkenden Kräfte nur unendlich wenig von den durch sein Inneres auf sie ausgeübten unterscheiden, sodass die Vectoren dieser äusseren und inneren Kräfte für eine solche Seitenfläche sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, und es sollen während derselben die Körper, mit denen es Wärme austauscht, sich in ihrer Temperatur nur unendlich wenig von der seinigen unterscheiden, sodass beide Temperaturen im Grenzfall als gleich angesehen werden können, und der Wärmeaustausch durch Leitung zwischen dem Parallelepipede und den es berührenden Körpern als umkehrbar angenommen werden kann. Wir können nun die untersuchte unendlich kleine Zustandsänderung des Parallelepipeds durch weitere umkehrbare Zustandsänderung desselben zu einem

umkehrbaren Kreisprocess vervollständigen. Für einen solchen gilt aber, nach dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie von Clausius, die Gleichung:

$$\int \frac{dw}{\mathfrak{T}} = 0,$$

wenn $\mathfrak{T}$ die absolute Temperatur zu Anfang der unendlich kleinen Zustandsänderung des Kreisprocesses ist, der der Wärmeverbrauch dw entspricht, und das Integral über alle Elemente des Kreisprocesses zu bilden ist. Daraus folgt jedoch, dass $dw/\mathfrak{T}$ das vollständige Differential einer Function der Variabeln der Zustandsänderung des Parallelepipeds ist, also hier einer Function von t, $m_1, \ldots, n_3$. Wenden wir auf die betrachtete unendlich kleine Zustandsänderung des Parallelepipeds den ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie von Clausius an, so ergiebt sich:

$$\mathfrak{A}w = dU - \frac{1}{\mathfrak{a}} S[\alpha_1 (U d\varphi_{\omega_1} dm_1 + U d\varphi_{\omega_2} dn_1) + \alpha_2 (U d\varphi_{\omega_2} dm_2 + U d\varphi_{\omega_2} dn_2) + \alpha_3 (U d\varphi_{\omega_3} dm_3 + U d\varphi_{\omega_1} dn_3)],$$

in welcher Gleichung U die für die Volumeneinheit und in Wärmemaass gerechnete Energie des Parallelepipeds und $\mathfrak{a}$ das Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit ist. Die Energie U ist durch den augenblicklichen Zustand des Parallelepipeds völlig bestimmt und folglich eine Function von t, $m_1, \ldots, n_3$. Ersetzt man in der letzten Gleichung dw durch den soeben für dasselbe gefundenen Ausdruck und das Gesammtdifferential dU durch die Summe seiner Theildifferentiale und berücksichtigt, dass diese Gleichung für beliebige Werthe der unendlich kleinen Scalare $dt, dm_1, \ldots, dn_3$ gelten muss, so folgen aus ihr die weiteren Gleichungen:

$$\frac{df_0}{d(dt)} = \frac{\partial U}{dt}, \quad \frac{df_0}{d(dm_1)} = \frac{\partial U}{dm_1} - \frac{1}{\mathfrak{a}} S\alpha_1 U d\varphi_{\omega_1},$$

$$\frac{df_0}{d(dn_3)} = \frac{\partial U}{\partial n_3} - \frac{1}{\mathfrak{a}} S\alpha_3 U d\varphi_{\omega_1}.$$

Differentiirt man die erste von ihnen nach m_1, die zweite nach t und subtrahirt die so erhaltenen Gleichungen von einander, so erhält man:

$$\frac{d\left(\frac{df_0}{d(dt)}\right)}{dm_1} - \frac{d\left(\frac{\partial f_0}{d(dm_1)}\right)}{dt} = \frac{1}{\mathfrak{a}} S \frac{d(\alpha_1 U d\varphi_{\omega_1})}{dt}.$$

Da nun $dw : \mathfrak{T}$ das vollständige Differential einer Function — sagen wir F — der Gestaltsvariabeln und der Temperatur ist, und die Gleichung $dw : \mathfrak{T} = dF$, in der dw durch den früheren entwickelten Ausdruck dafür und dF durch die Summe der Theildifferentiale zu ersetzen ist, für alle möglichen Werthe von dt, dm_1, ..., dn_3 gelten muss, so ergeben sich aus der Gleichung $dw : \mathfrak{T} = dF$ die Beziehungen:

$$\frac{1}{\mathfrak{T}}\frac{\partial f_0}{d(dt)} = \frac{\partial F}{dt}, \quad \frac{1}{\mathfrak{T}}\frac{\partial f_0}{d(dm_1)} = \frac{dF}{dm_1} \cdots, \quad \frac{1}{\mathfrak{T}}\frac{\partial f_0}{d(dn_3)} = \frac{dE}{dn_3}.$$

Durch Differentation der ersten von ihnen nach m_1, der zweiten nach t und Subtraction der so erhaltenen Gleichungen, folgt:

$$\frac{d\left(\frac{1}{\mathfrak{T}}\frac{df_0}{d(dt)}\right)}{dm_1} = \frac{d\left(\frac{1}{\mathfrak{T}}\frac{df_0}{d(dm_1)}\right)}{dt},$$

und weiter

$$\frac{1}{\mathfrak{T}}\frac{d\left(\frac{df_0}{d(dt)}\right)}{dm_1} = -\frac{1}{\mathfrak{T}^2}\frac{df_0}{d(dm_1)} + \frac{1}{\mathfrak{T}}\frac{\left(\frac{df_0}{d(dm_1)}\right)}{dt},$$

und also

$$\frac{df_0}{d(dm_1)} = -\mathfrak{T}\int_0^{\mathfrak{T}} S\frac{d(\alpha_1 U d\varphi_{\omega_1})}{dt}$$

Entsprechende Ausdrücke erhält man auf analoge Weise für die anderen Theilableitungen von f_0 nach den Differentialen der Gestaltsvariabeln. Nun ist $df_0/d(dt)$ der Wärmeverbrauch des Parallelepipeds, gerechnet für die Volumeneinheit und für eine Temperaturänderung von 1° C., bei constanter Gestalt; bedeutet c_g *die specifische Wärme* desselben *bei constanter Gestalt* und s sein specifisches Gewicht, so ist $df_0/d(dt) = sc_g$, und mithin nach dem vorgehenden *der Wärmeverbrauch der* betrachteten *unendlich kleinen Zustandsänderung des Parallelepipeds, gerechnet für die Volumeneinheit,*

$$\begin{aligned} dw = sc_g dt - \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{a}} D_t \{ & S\alpha_1 U d\varphi_{\omega_1} dm_1 + S\alpha_2 U d\varphi_{\omega_2} dm_2 \\ & + S\alpha_3 U d\varphi_{\omega_3} dm_3 + S\alpha_1 U d\varphi_{\omega_2} dn_1 \\ & + S\alpha_2 U d\varphi_{\omega_3} dn_2 + S\alpha_3 U d\varphi_{\omega_1} dn_3 \}. \end{aligned}$$

Bei einer unendlich kleinen Zustandsänderung eines Parallelepipeds ohne Wärmeaustausch, einer adiabatischen, ist der Wärmeverbrauch dw Null, und es ergiebt sich danach *die*

bei derselben eintretende *Temperaturänderung* dt, wenn man in der letzten Gleichung dw null setzt, durch die Gleichung:

$$dt = \frac{\mathfrak{T}}{s c_g \mathfrak{a}} D_1 S \{\alpha_1 U d\varphi_{\omega_1} dm_1 + \alpha_2 U d\varphi_{\omega_2} dm_2 + \alpha_3 U d\varphi_{\omega_2} dm_3 + \alpha_1 U d\varphi_{\omega_2} dn_1 + \alpha_2 U d\varphi_{\omega_2} dn_2 + \alpha_3 U d\varphi_{\omega_1} dn_3\}.$$

Die specifische Wärme pflegt experimentell nur in dem besonderen Falle bekannt zu sein, wenn die Temperaturveränderung bei gleichmässigem normalen Drucke auf die Oberfläche des Körpers stattfindet. Bei einem solchen wird nun aus einem Würfel, dessen Kanten, wenn seine Masse krystallisch ist, ihren krystallographischen Axen parallel sein sollen, bei Temperaturwechsel ein rechtwinkliges Parallelepiped und auch ein solches bei constanter Temperatur durch solchen Druck, im allgemeinen, aus einem solchen Würfel ohne elastische Kräfte. Es kommen also in solchem Falle nur m_1, m_2, m_3 in Betracht, wenn ein solcher Würfel zuerst bei constanter Temperatur durch gleichmässig auf seine Oberfläche wirkende normale Kräfte in ein rechtwinkliges Parallelepiped verwandelt und dann bei gleichmässigem Fortwirken dieser Kräfte in umkehrbarer Weise in seiner Temperatur um dt verändert wird. Durch letztere Temperaturveränderung mag m_1, m_2, m_3 bez. um dm_1, dm_2, dm_3 sich verändern. Bezeichnen wir *die specifische Wärme des Parallelepipeds bei* einem solchen *normalen gleichmässigem und constant wirkenden Drucke auf seine Seitenflächen mit* c_p, so ist der Wärmeverbrauch dw, gerechnet für die Volumeneinheit, bei einer unendlich kleinen Zustandsänderung desselben der eben betrachteten Art, während der sich die Temperatur um dt und die hier allein in Betracht kommenden Gestaltsvariabeln m_1, m_2, m_3 bez. um dm_1, dm_2, dm_3 ändern, nach dem Vorigen bestimmt durch die Gleichung:

$$dw = s c_p dt = s c_v dt + \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{a}} \frac{dp}{dt} (dm_1 + dm_2 + dm_3),$$

wenn wir die besondere Art der specifischen Wärme des Parallelepipeds bei constanter Gestalt, wie sie hier vorkommt, der eines rechtwinkligen Parallelepipeds, mit c_v bezeichnen. Denn es kommen im Ausdruck für dw in der geschweiften Klammer nur die drei ersten Glieder hier in Betracht und es ist $-S\alpha_1 U d\varphi_{\omega_1} = -S\alpha_2 U d\varphi_{\omega_2} = -S\alpha_3 U d\varphi_{\omega_3} = p$ die Grösse

der für die Flächeneinheit gerechneten normalen Kraft, welche auf die Oberfläche des Parallelepipeds wirkt und der die von innen auf die Oberfläche wirkende Kraft gleich bleibt. Da nun dm_1, dm_2, dm_3 die für die Längeneinheit gerechneten Veränderungen der Längen der Kanten des rechtwinkligen Parallelepipeds bei der hier betrachteten Temperaturänderung dt sind, ist $dm_1 + dm_2 + dm_3 = dv : v$, wenn v das Anfangsvolumen desselben und dv seine Volumenveränderung im vorliegenden Falle sind. Aus der vorigen Gleichung für c_p wird danach:

$$c_p = c_v + \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{a}} D_t p \, \frac{D_t v}{s v}.$$

Es sei jetzt der Zustand, für den man die specifische Wärme bei constanter Gestalt c_g zu kennen wünscht, bestimmt durch die Werthe t, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3 der Zustandsvariabeln. Die drei in diesem Zustande normal gegen seine Seitenflächen wirkenden Theilkräfte seien gerechnet für die Flächeneinheit der Grösse nach $-S\alpha_1\nu_1$, $-S\alpha_2\nu_2$, $-S\alpha_3\nu_3$, bei der bisherigen Bedeutung der Vectoren der elastischen Kräfte α_1, α_2, α_3, wenn ν_1, ν_2, ν_3 lothrechte Einheitsvectoren zu jenen Flächen nach dem Innern des Parallelepipeds sind und Vectoren von gleichem Index sich auf dieselbe Fläche beziehen. Wir wählen eine jener Druckkräfte, zum Beispiel $-S\alpha_1\nu_1$, und denken das schiefwinklige Parallelepiped bei constanter Temperatur in den Zustand übergeführt, den es bei dieser Temperatur und dem gleichmässigen normalen Drucke $S\alpha_1\nu_1$ auf seine Seitenflächen im Gleichgewichtszustande einnehmen kann. Seine Gestalt ist in ihm diejenige eines rechtwinkligen Parallelepipeds und die Dehnungen seiner Kanten, von der würfelförmigen Gestalt seiner Masse ohne elastische Kräfte bei der Anfangstemperatur t_0 aus gerechnet, sind mit der Temperatur t und der Grösse des gleichförmigen senkrechten Druckes auf seine Oberfläche gegebene Scalare, deren Werthe beziehentlich m'_1, m'_2, m'_3 sein mögen.

Wir lassen das Parallelepiped von dem Zustande aus, welcher durch die vorigen Werthe t, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3 gegeben ist, folgenden Kreisprocess in umkehrbarer Weise durchmachen. Wir lassen das Parallelepiped zuerst aus diesem Anfangszustande in den Zustand übergehen, welcher durch die

Werthe $t + dt$, $m_1 + dm_1$, $m_2 + dm_2$, $m_3 + dm_3$, $n_1 + dn_1$, $n_2 + dn_2$, $n_3 + dn_3$ der Zustandsvariabeln bestimmt ist. Der Wärmeverbrauch dieser unendlich kleinen Zustandsänderung w_1 ist nach dem Früheren durch die Gleichung bestimmt:

$$w_1 = s c_g dt - \frac{\mathfrak{T}}{a} D_t\{S\alpha_1 U d\varphi_{\omega_1} dm_1 + S\alpha_2 U d\varphi_{\omega_2} dm_2 + S\alpha_3 U d\varphi_{\omega_3} dm_3 + S\alpha_1 U d\varphi_{\omega_2} dn_1 + S\alpha_2 U d\varphi_{\omega_2} dn_2 + S\alpha_3 U d\varphi_{\omega_1} dn_3\}.$$

Es soll nun zweitens das Parallelepiped bei der constanten Temperatur $t + dt$ aus dem zuletzt erreichten Zustande in denjenigen mit den Werthen $t + dt$, m_1', m_2', m_3', 0, 0, 0 der Zustandsvariabeln übergeführt werden; der zugehörige Wärmeverbrauch w_2 ist

$$w_2 = -\frac{(\mathfrak{T} + dt)}{a} \sum_{m_1+dm_1,\ m_2+dm_2,\ m_3+dm_3,\ n_1+dn_1,\ n_2+dn_2,\ n_3+dn_3}^{m_1',\ m_2',\ m_3',\ 0,\ 0,\ 0} D_t\{S(\alpha_1 + \Delta_{dt}\alpha_1) U d\varphi_{\omega_1} \delta m_1 + S(\alpha_2 + \Delta_{dt}\alpha_2) U d\varphi_{\omega_2} \delta m_2 + S(\alpha_3 + \Delta_{dt}\alpha_3) U d\varphi_{\omega_3} \delta m_3 + S(\alpha_1 + \Delta_{dt}\alpha_1) U d\varphi_{\omega_2} \delta n_1 + S(\alpha_2 + \Delta_{dt}\alpha_2) U d\varphi_{\omega_1} \delta n_1 + S(\alpha_3 + \Delta_{dt}\alpha_3) U d\varphi_{\omega_1} \delta n_3\}.$$

Drittens mag nun bei constanter Gestalt, also bei derjenigen eines rechtwinkligen Parallelepipeds mit gleichmässigem normalen Drucke auf seine Oberfläche, die Temperatur um dt vermindert werden; der hierzu erforderliche Wärmeverbrauch w_3 ist

$$w_3 = -s c_v dt.$$

Nun wird viertens zur Vollendung des Kreisprocesses das Parallelepiped bei der constanten Temperatur t in den Anfangszustand zurückgeführt; der zugehörige Wärmeverbrauch w_4 ist dann bestimmt durch die Gleichung:

$$w_4 = -\frac{\mathfrak{T}}{a} \sum_{m_1',\ m_2',\ m_3',\ 0,\ 0,\ 0}^{m_1,\ m_2,\ m_3,\ n_1,\ n_2,\ n_3} D_t\{S\alpha_1 U d\varphi_{\omega_1} \delta m_1 + S\alpha_2 U d\varphi_{\omega_2} \delta m_2 + S\alpha_3 U d\varphi_{\omega_3} \delta m_3 + S\alpha_1 U d\varphi_{\omega_2} \delta n_1 + S\alpha_2 U d\varphi_{\omega_3} \delta n_2 + S\alpha_3 U d\varphi_{\omega_1} \delta n_3\}.$$

In der zweiten und vierten Zustandsänderung des eben beschriebenen Kreisprocesses durchläuft das Parallelepiped dieselben

Gestalten; aber während das Parallelepiped eine bestimmte Gestalt in der vierten Zustandsänderung bei der Temperatur einnimmt, durchläuft es dieselbe bei der zweiten Zustandsänderung mit der Temperatur $t + dt$. Sind die Vectoren der elastischen Kräfte, welche einer bestimmten Gestalt desselben im ersteren Falle zugehören, α_1, α_2, α_3, so sind sie für dieselbe Gestalt im zweiten Falle hier mit $\alpha_1 + \Delta_{dt}\alpha_1$, $\alpha_2 + \Delta_{dt}\alpha_2$, $\alpha_2 + \Delta_{dt}\alpha_3$ bezeichnet. Es sind also $\Delta_{dt}\alpha_1$, $\Delta_{dt}\alpha_2$, $\Delta_{dt}\alpha_3$ die Vectorzunahmen der elastischen Kräfte im vorliegenden Falle für dieselbe Gestalt bei der zweiten Zustandsänderung gegenüber der vierten; sie sind als kleine Grössen anzusehen.

Danach wird

$$\begin{aligned}
w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = {} & s\,c_g\,dt - s\,c_v\,dt + \frac{dt}{a} D_t\{S\alpha_1\, U\, d\varphi_{\omega_1}\, dm_1 \\
& + S\alpha_2\, U\, d\varphi_{\omega_2}\, dm_2 + S\alpha_3\, U\, d\varphi_{\omega_3}\, dm_3 \\
& + S\alpha_1\, U\, d\varphi_{\omega_2}\, dn_1 + S\alpha_2\, U\, d\varphi_{\omega_3}\, dn_3\} \\
& + \frac{(\mathfrak{T} + dt)}{a} D_t\{S\Delta_{dt}\alpha_1\, U\, d\varphi_{\omega_1}\, dm_1 \\
& + S\Delta_{dt}\alpha_2\, U\, d\varphi_{\omega_2}\, dm_2 + S\Delta_{dt}\alpha_3\, U\, d\varphi_{\omega_3}\, dm_3 \\
& + S\Delta_{dt}\alpha_1\, U\, d\varphi_{\omega_2}\, dn_1 + S\Delta_{dt}\alpha_2\, U\, d\varphi_{\omega_3}\, dn_2 \\
& + S\Delta_{dt}\alpha_3\, U\, d\varphi_{\omega_1}\, dn_3\} \\
& - \frac{(\mathfrak{T} + dt)}{a} \sum_{m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3}^{m_1', m_2', m_3', 0, 0, 0} D_t\{S\Delta_{dt}\alpha_1\, U\, d\varphi_{\omega_1}\, \delta m_1 \\
& + S\Delta_{dt}\alpha_2\, U\, d\varphi_{\omega_2}\, \delta m_2 + S\Delta_{dt}\alpha_3\, U\, d\varphi_{\omega_3}\, \delta m_3 \\
& + S\Delta_{dt}\alpha_1\, U\, d\varphi_{\omega_3}\, \delta n_1 + S\Delta_{dt}\alpha_2\, U\, d\varphi_{\omega_1}\, \delta n_2 \\
& + S\Delta_{dt}\alpha_3\, U\, d\varphi_{\omega_1}\, \delta n_3\} \\
& - \frac{dt}{a} \sum_{m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3}^{m_1', m_2', m_3', 0, 0, 0} D_t\{S\alpha_1\, U d\varphi_{\omega_1}\delta m_1 + S\alpha_2\, U d\varphi_{\omega_2}\delta m_2 \\
& + S\alpha_3\, U\, d\varphi_{\omega_2}\, \delta m_3 + S\alpha_1\, U\, d\varphi_{\omega_2}\, \delta n_1 \\
& + S\alpha_2\, U\, d\varphi_{\omega_3}\, \delta n_2 + S\alpha_3\, U\, d\varphi_{\omega_1}\, \delta n_3\}.
\end{aligned}$$

Wenn wir von unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung absehen, ergiebt sich also aus der vorigen Gleichung:

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = s\,(c_g - c_v)\,dt.$$

Für einen umkehrbaren Kreisprocess ist nun der Wärmeverbrauch gleich der Arbeit der inneren elastischen Kräfte des betrachteten Parallelepipeds, in Wärmemaass gerechnet, da die Energieänderung während eines solchen verschwindet und die Arbeit der äusseren und inneren Kräfte als nur durch das Vorzeichen verschieden angesehen werden kann. Bezeichnen wir beziehlich mit l_1, l_2, l_3, l_4 die Arbeit der inneren elastischen Kräfte des Parallelepipeds im ersten, zweiten, dritten und vierten Theil des hier behandelten Kreisprocesses desselben, so folgt also:

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = (l_1 + l_2 + l_2 + l_4) : a.$$

Nun ist nach der zuvor gegebenen Formel für die Arbeitsleistung der inneren elastischen Kräfte bei einer unendlich kleinen Zustandsänderung:

$$\begin{aligned} l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = S\{ & \Delta_{dt}\alpha_1 U d\varphi_{\omega_1} dm_1 + \Delta_{dt}\alpha_2 U d\varphi_{\omega_2} dm_2 \\ & + \Delta_{dt}\alpha_3 U d\varphi_{\omega_3} dm_3 + \Delta_{dt}\alpha_1 U d\varphi_{\omega_2} dn_1 \\ & + \Delta_{dt}\alpha_2 U d\varphi_{\omega_3} dn_2 + \Delta_{dt}\alpha_3 U d\varphi_{\omega_1} dn_3\} \\ & - \sum_{m_1,\ m_2,\ m_3,\ n_1,\ n_2,\ n_3}^{m_1',\ m_2',\ m_3',\ 0,\ 0,\ 0} S\{\Delta_{dt}\alpha_1 U d\varphi_{\omega_1}\delta m_1 + \Delta_{dt}\alpha_2 U d\varphi_{\omega_2}\delta m_2 \\ & + \Delta_{dt}\alpha_3 U d\varphi_{\omega_3}\delta m_3 + \Delta_{dt}\alpha_1 U d\varphi_{\omega_2}\delta n_1 \\ & + \Delta_{dt}\alpha_2 U d\varphi_{\omega_3}\delta n_2 + \Delta_{dt}\alpha_3 U d\varphi_{\omega_1}\delta n_3\}. \end{aligned}$$

Diese Summe ist also unendlich klein von höherer Ordnung als dt. Wir erhalten mithin aus der vorletzten Gleichung, wenn wir unendlich kleine Grössen fortlassen:

$$c_g = c_v.$$

Berlin, den 29. April 1895.

3. *Ueber die Absorption der strahlenden Wärme durch Flüssigkeiten; von Charles Friedel.*

(Nach der Inauguraldissertation bearbeitet vom Hrn. Verf.)

(Hierzu Taf. IV Fig. 14.)

I. Geschichtliches.

Die ersten Versuche, welche das Auffinden von allgemeinen Beziehungen zwischen Wärmedurchlässigkeit und chemischer Zusammensetzung bezweckten, wurden von Schultz-Sellack[1]) angestellt. In derselben Richtung arbeiteten einige Jahre später Aymonnet[2]) und Br. Lachowicz.[3]) Andere Forscher, die sich mit dieser Frage beschäftigten, sind J. W. Johnson[4]), R. Zsigmondy[5]) und E. F. Nichols.[6]) Da die Resultate früherer Untersuchungen auf diesem Gebiete an geeigneter Stelle, im Zusammenhang mit meinen Resultaten, näher besprochen werden, so möge es genügen, sie an dieser Stelle nur kurz zu erwähnen.

II. Beschreibung des Apparates.

Der von mir benutzte Apparat hatte wesentlich die schon von Tyndall in seinen Untersuchungen über die Diathermanität einiger Flüssigkeiten benutzte Anordnung.

Einige der Theile dienten auch früher im hiesigen physikalischen Laboratorium, namentlich Hrn. J. W. Johnson, zu ähnlichen Untersuchungen, erhielten jedoch von mir bedeutende Abänderungen. Die nähere Beschreibung des Apparates ist folgende:

Ein unpolirter eiserner Block *A* (vgl. Fig. 1[7]), welcher als Quelle der strahlenden Wärme diente, war auf einem eisernen

1) Schultz-Sellack, Pogg. Ann. **139.**
2) Aymonnet, Compt. rend. **83** u. **84.**
3) Lachowicz, Ber. d. d. chem. Ges. 1887. p. 735.
4) Johnson, Researches on Heat. Inaug. Diss. Leipzig 1892.
5) Zsigmondy, Wied. Ann. **49.** p. 531 u. 535.
6) Nichols, Phys. Rev. **1.** 16. 1893.
7) Die Fig. 1 stellt den Querschnitt des Apparates in der horizontalen Ebene dar.

Träger an dem einen Ende eines festen Brettes aufgestellt. Seine Grössenverhältnisse waren 11,5 × 5 × 4,5 cm. Um eine zu rasche Ausstrahlung zu verhindern, war er zum Theil mit einem Blechkasten, welcher mit Asbest gefüttert war, umgeben. Der Kasten mündete nach vorne in eine grosse gleichfalls mit Asbest bekleidete Blechtafel *B*, die als Schutz gegen den störenden Einfluss der Strahlung der Brennerflamme diente. In der Mitte dieses Schirmes war ein viereckiges Loch geschnitten, welches gerade gross genug war, um das Vorderende

Fig. 1.

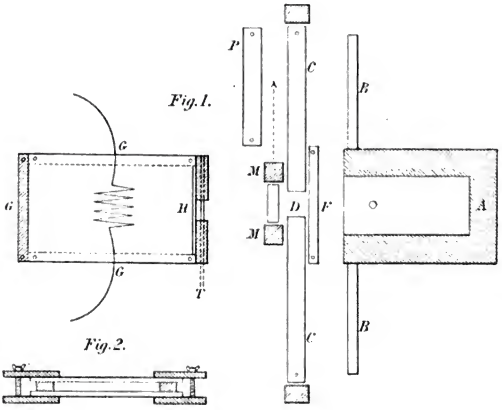


Fig. 2.

des erhitzten Eisenblocks durchtreten zu lassen. Ein grosser Zweiringbrenner von Bunsen lieferte die Wärme. Um die Erwärmung des Eisenblocks zu erleichtern, war dieser ungefähr in der Mitte durchbohrt und die Bohrung mit einem Zugschornstein versehen. Um eine constante Flamme zu erzielen, war in die Gasleitung ein Regulator Nr. 2 von Schirmer, Richter & Co. eingeschaltet.

Auf diese Weise konnten innerhalb weiter Grenzen sehr constante Temperaturen erzielt werden; kleine Schwankungen konnten leicht durch ein kleines Vor- oder Rückwärtsschieben des Brenners regulirt werden.

Ungefähr 4 cm vom freien Ende des Blocks und parallel mit dem Schirme *B* befand sich ein zweiter Schirm, *C*, in Gestalt eines hohlen Kastens, welchen wir zum Unterschied von dem anderen fortan den Hauptschirm nennen wollen. Er war 40 cm lang, 30 cm hoch und 3 cm dick. Zum Durchlassen der Strahlen vom Block zur Thermosäule enthielt er in der Mitte eine runde Oeffnung *D* von 3 cm Durchmesser. — Im Laufe der Untersuchung war es häufig nöthig, die Wärmestrahlung ganz zu unterbrechen. Dazu diente der kleine bewegliche Schirm *F*. Durch eine Schnur, welche über eine Rolle lief, konnte dieser bequem vor die Oeffnung *D* geschoben werden, wodurch die Thermosäule der Einwirkung des Blocks entzogen wurde. Ein fortwährender Wasserstrom circulirte im Inneren dieser beiden Schirme, sowie in allen anderen Theilen des Apparates, die auf einer bestimmten Temperatur erhalten werden sollten.

Um die Schirme *C* und *F* gegen die directe Einwirkung der ziemlich bedeutenden Wärmeausstrahlung des Blocks zu schützen, was eine Erwärmung des Kühlwassers zur Folge hätte, war zwischen den Schirmen *C* und *B* eine dicke Asbestplatte angebracht, welche ebenfalls in der Mitte eine der Oeffnung *D* correspondirende Oeffnung hatte.

Die Thermosäule war am anderen Ende des Brettes auf einem festen Stativ, in einer Linie mit dem Block und der Oeffnung *D* angebracht. Sie war ringsum von einem Mantel *G* umgeben, welcher nur an dem der Wärmequelle zugekehrten Seite ein rundes Fenster *H* von $2^1/_2$ cm Durchmesser besass. Durch den Mantel floss Wasser. Er war der Bequemlichkeit wegen aus vier getrennten Theilen zusammengesetzt: dem oberen und unteren Theil des Mittelstückes und dem Vorder- und Hinterdeckel. Der äussere Durchmesser des Mantels war 8 cm. Die Deckel waren je 2 cm dick, und der ganze Mantel 16 cm lang.

Um jegliche Luftströmung im Inneren des Mantels zu verhüten, war die Innenseite der Oeffnung *H* von einer 0,1 mm dicken Glasplatte bedeckt. Die Vorderseite des betreffenden Manteldeckels war ausserdem mit Leitschienen versehen, in denen eine Glasplatte *T* — das Probeglas — sich derart verschob, dass man die erwähnte Oeffnung *H* nach Belieben be-

decken oder freilassen konnte. Diese Platte war 8×6 cm gross und 1 mm dick und diente, wie später näher dargelegt werden wird, als unveränderliches Vergleichsmaass für die Wärmeabsorption. — Am hinteren Manteldeckel war ein in $^1/_5{}^0$ getheiltes Thermometer angebracht, dessen Quecksilbergefäss sich im Inneren des durchfliessenden Wassers befand.

Der Fuss des Trägers war mit einem System von Gleitschienen versehen, welche eine weitgehende Verschiebung nach vorn und hinten gestatteten, sodass die Entfernung zwischen der Wärmequelle und Thermosäule nach Belieben verändert werden konnte.

Die Thermosäule bestand aus 27 Antimon-Wismuth-Elementen von 2,5 cm Länge. Sie erwies sich durchaus als sehr zuverlässig.

Seitlich vom Hauptschirm und ungefähr 1,5 cm von seiner Oberfläche befanden sich zwei horizontale Leitschienen, 30 cm lang, auf denen ein ringförmiger Mantel *M* so verschoben werden konnte, dass er jederzeit nach Belieben vor die Oeffnung *D* gebracht und wieder entfernt werden konnte.

Dieser Mantel hatte zum Zweck, die Temperatur der Versuchszelle constant zu erhalten. Da er gleichzeitig dazu diente, um die Zelle an ihrem Platze festzuhalten, so wollen wir ihn der grösseren Uebersichtlichkeit halber in der Folge den „Zellenhalter" nennen. Im Inneren war er gerade weit genug, um den Messingrahmen der Versuchszelle aufzunehmen. Vermittelst einer Schnur konnte der Halter vor die Oeffnung *D* gebracht werden, wurde aber beim Loslassen der Schnur sofort durch eine Spiralfeder wieder zurückgezogen.

Da ein Temperaturunterschied zwischen der Thermosäule und der Versuchszelle mit ihrem Inhalt einen Fehler verursachen konnte, so musste letztere vor jeder Beobachtung auf die Temperatur der ersteren gebracht werden. Dieses wurde durch eine Art Kühlraum *P* erreicht, welcher am Ende der Schienen angebracht war. In diesen Kühlraum wurde der Zellenhalter durch die Feder gezogen, und war dann ringsum von fliessendem Wasser umgeben.

Um messbare Temperaturdifferenzen innerhalb des Kühlwassers zu vermeiden, ging der Strom auf fünf getrennten Wegen durch den Apparat. Es gelang auf diese Weise eine

durchaus gleichförmige Temperatur in allen Theilen des Apparates hervorzubringen.

Es könnte auf den ersten Blick scheinen, dass diese vielen Vorsichtsmassregeln überflüssig wären; doch mein anfänglich vergebliches Bemühen, gute Resultate zu erhalten, zeigte mir, dass alle diese Vorsichtsmassregeln unerlässlich waren.

Als Galvanometer benutzte ich ein Wiedemann'sches Spiegelgalvanometer. Es befand sich auf einer steinernen Console, während das Fernrohr auf einem festen Tische, welcher seinerseits auf einem Steinpfeiler stand, montirt war. Die Entfernung zwischen dem Spiegel des Galvanometers und der Fernrohrscala betrug 312 cm. Die Empfindlichkeit des Galvanometers ergiebt sich aus den Zahlen p. 15 und der Barus'schen Tabelle[1]) über die electromotorische Kraft eines Platin-Platiniridium-Elementes. Eine electromotorische Kraft von 4 Mikrovolts brachte noch einen doppelten Ausschlag von etwas mehr als einem der kleinsten Scalentheile hervor. Ein Temperaturunterschied von einem Grade im eisernen Blocke änderte den doppelten Ausschlag um ca. 6 Scalentheile.

Die zur Aufnahme der zu untersuchenden Flüssigkeiten bestimmte Glaszelle war ähnlich construirt, wie die seinerzeit von Tyndall benutzte. Das Gestell bestand aus zwei 1,2 cm breiten, 3 mm dicken Messingringen von 7 cm äusserem Durchmesser. Auf dem einen waren vier mit Muttern versehene Schrauben angebracht, die genau in vier Löcher des zweiten Ringes passten. Die Zelle[2]) selbst bestand aus zwei sehr durchsichtigen Spiegelglasscheiben von 5,4 cm Durchmesser und 0,8—1 mm Dicke, zwischen welchen sich ein 4 mm breiter Glasring von 5,3 cm Durchmesser befand. Zum Einführen der Flüssigkeit war der Ring an einer Stelle unterbrochen. Um verschieden dicke Flüssigkeitsschichten zu beobachten, wurde eine Reihe verschieden dicker Glasringe verwandt. Um ein Durchsickern der Versuchsflüssigkeiten zu verhindern, wurde bei einzelnen Flüssigkeiten, wie Wasser und den Alkoholen, ein dünnes, ca. 2 cm breites Gummiband über die Zelle gestreift, und diese erst dann in das Gestell geschraubt. An der

1) Barus, Die physikalische Behandlung und die Messung hoher Temperaturen, p. 73.

2) Vgl. Fig. 2 p. 454.

Stelle, wo sich im Glasring die Oeffnung befand, war das Gummiband durchstochen, sodass die Flüssigkeiten hineingebracht und wieder entfernt werden konnten, ohne dass man die Zelle auseinander zu nehmen brauchte. Wenn Flüssigkeiten untersucht werden sollten, welche, wie etwa die organischen Chloride, Gummi angreifen, so wurden die einzelnen Theile der Zelle mit Fischleim aneinander geleimt und, wenn nöthig, mehrere Tage trocknen gelassen. Wenn eine Reihe von Körpern nacheinander untersucht wurde, ohne dass die Zelle inzwischen auseinander genommen wurde, so wurde diese nach jedesmaliger Benutzung mit Kohlenstofftetrachlorid sorgfältig ausgespült und dieses vollständig verdampft.

III. Beschreibung der Versuchsmethode.

Vor Beginn jedes Versuches musste der eiserne Block mindestens $1^1/_2$ Stunden erhitzt werden. Nach Ablauf dieser Zeit wurde die Thermosäule einige Zeit hindurch der Bestrahlung ausgesetzt, und wenn dann das Galvanometer einen dauernden unveränderlichen Ausschlag zeigte, so war Garantie dafür vorhanden, dass die Temperatur des Eisenblockes ihren constanten Werth erreicht hatte. Unterdessen wurde die Zelle sorgfältig mit Sämischleder von den letzten Spuren Schmutz und Staub etc. gereinigt, mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt und im obenerwähnten Kühlraume auf die erforderliche Temperatur abgekühlt. Zeigte sich dann bei heruntergelassenem kleinen Schirme F und bei vor die Thermosäule geschobener Zelle kein Strom im Galvanometer, so hatten sicher Zelle und Thermosäule die gleiche Temperatur. Nachdem ein- für allemal die zur Abkühlung der Zelle erforderliche Zeit durch eine Reihe von Versuchen ermittelt war, wurde im allgemeinen dieser Vorversuch nicht jedesmal wiederholt, sondern bloss einige Minuten über die Maximalzeit gekühlt.

Um die bei der gewöhnlichen Untersuchungsmethode eintretende Erwärmung der Zelle und ihres Inhaltes vollständig auszuschliessen, wandte ich nach mehreren Abänderungen die folgende Methode an.

Die Zelle wurde in den Kühlraum gesetzt und das Fenster geöffnet. Das Galvanometer gab natürlich sofort einen grossen Ausschlag. Hierauf wurde das Fenster schnell geschlossen

und die Zelle rasch vor dasselbe geschoben. Der Ausschlag nahm nun schnell ab, und diese stete Abnahme wurde durch das Fernrohr beobachtet. Im Augenblick, wo der Ausschlag die im Vorversuche ermittelte Grösse nahezu erreicht hatte, wurde das Fenster schnell wieder geöffnet. Dieses verlangsamte sofort die Bewegung des Spiegels, der Ausschlag blieb, sobald das Minimum erreicht war, einige Augenblicke constant und fing dann wieder an langsam zu wachsen.

Bei Anwendung dieser Methode brauchte ich zu einer genauen Ablesung 20—30 Secunden bei grösseren, und 10 bis 20 Secunden bei kleineren Ausschlägen. Ich notirte jedesmal sowohl den Ausschlag nach rechts, sowie bei commutirtem Strome nach links an und sah die gefundene Zahl nur dann für richtig an, wenn bei wiederum commutirtem Strome dieser dritte Ausschlag mit dem ersten übereinstimmte.

Um mich darüber zu vergewissern, welchen Einfluss in dieser kurzen Zeit die Erwärmung der Zelle trotzdem ausüben konnte, verfuhr ich folgendermassen: Ich brachte an Stelle des Probeglases *T* eine dünne Messingplatte vor die kleine Oeffnung *H* im Mantel der Thermosäule. Dadurch wurde natürlich eine Bestrahlung der Thermosäule verhindert, sodass dann kein Strom vorhanden war. Während das Fenster des Hauptschirmes ebenfalls geschlossen war, wurde die Zelle aus dem Kühlraume in die richtige Lage geschoben. Wenn jetzt der kleine Schirm *F* emporgezogen wurde, konnte die strahlende Wärme wohl bis zur Zelle, nicht aber bis zur Thermosäule gelangen. Die Zelle wurde nun in dieser Lage 30 Sec. der Bestrahlung ausgesetzt; dann wurde das Fenster *D* rasch geschlossen und möglichst gleichzeitig die Messingplatte von der Oeffnung *H* zurückgeschoben. Dadurch wurde die Ausstrahlung der Zelle allein gemessen. Ich notirte jedesmal den dabei entstehenden sehr kleinen Ausschlag und benutzte ihn als Correctur. Im Laufe der Untersuchung bestimmte ich auf dem eben angegebenen Wege diese Correctionsgrössen für eine grosse Anzahl von Flüssigkeiten; bei den übrigen schätzte ich sie einfach.

Ich machte schon vorhin darauf aufmerksam, dass die Temperatur des Eisenblockes nicht ganz constant blieb. Um vergleichbare Resultate zu erhalten, benutzte ich eine ganz

bestimmte Glasplatte. Während die gefüllte Zelle sich im Kühlraume befand, wurde bei emporgezogenem Schirme *H* die Thermosäule durch das Glas *F* hindurch bestrahlt. Von Zeit zu Zeit beobachtete ich den Ausschlag und konnte auf diese Weise etwaige kleine Veränderungen der Temperatur des Eisenblockes constatiren. Die bei dem Gebrauche dieses Probeglases unmittelbar vor und nach dem Versuche mit der Zelle beobachteten Ausschläge wurden notirt und das Mittel als der dem Probeglase allein während des Versuches entsprechende Ausschlag angenommen [1]).

Um bei einem eventuellen Bruche des Glases nicht das unveränderliche Vergleichsmaass zu verlieren, wurde eine Anzahl solcher Gläser verglichen und vorräthig gehalten.

Zufälligerweise lagen in der ersten Zeit meiner Versuche die Doppelausschläge für das betreffende Probeglas um ca. 960 mm herum. Ich nahm diese Zahl als Vergleichsmaass für meine gesammte Versuchsreihe an und reducirte alle Versuche auf dieses Maass nach der einfachen Proportionalitätsregel.

Ich versuchte stets den Ausschlag für das Probeglas allein möglichst nahe an 960 mm zu halten. Betrug er mehr als 980 oder weniger als 940 mm, so änderte ich die Temperatur des Eisenblockes durch vorsichtiges Verschieben des Bunsen-Brenners so lange, bis der Ausschlag nach geraumer Zeit möglichst nahe bei 960 mm war.

Folgendes Beispiel möge ein Bild von der Art der Berechnung der Endresultate aus den beobachteten Zahlen geben.

Flüssigkeit: Schwefelkohlenstoff (CS_2.)

	Mittelwerthe für Probeglas	Correspond. Ausschläge für CS_2	Auf das Vergleichsmaass 960 mm reducirter Ausschlag
I. Versuchsreihe	967,5	562,5	559,1
II. „	954	556	559,5
III. „	951	553	558,2
IV. „	941,5	548,5	559,3

Reducirter Mittelwerth für CS_2 = 559,0.

In diesem Schema sind die Zahlen der ersten Columne die Mittelwerthe aus den Ausschlägen für das Probeglas kurz vor und kurz nach der Bestimmung des Ausschlages für CS_2. —

1) Herr Johnson hat bereits früher bei seinen Untersuchungen einen ganz ähnlichen Gebrauch von einem solchen Probeglas gemacht.

Die Zahlen der zweiten Columne sind unmittelbar beobachtet, während die dritte Columne aus den beiden ersten nach der Proportion:

$$\frac{\text{Mittelwerth für Probeglas}}{960} = \frac{\text{Ausschlag für } CS_2}{x}$$

berechnet wurde.

Da die durch das Galvanometer gemessene Gesammtabsorption der Zelle, sowohl von der Absorption der Flüssigkeit selbst, als auch der beiden Glaswände abhängt, so musste ich natürlich, um bei Anwendung verschiedener Zellen vergleichbare Resultate zu erhalten, die Absorption der einzelnen Zellen sorgfältig bestimmen.

Den grössten Theil der Flüssigkeiten untersuchte ich unter Anwendung derselben zwei Glasplatten. Speciell beim Vergleich der Absorption ganzer Körperklassen untereinander, z. B. der Alkohole, hielt ich an dieser Bedingung fest, sodass ich etwa bei einem Bruche einer Glasplatte die ganze Versuchsreihe wiederholte.

Die Bestimmung der Dicke der Zelle wurde bei nahezu allen Flüssigkeiten, um etwaige Fehler zu vermeiden, mindestens zweimal gemacht.

Dabei war die Dicke der Glasplatten ein- für allemal bestimmt, während die der Zelle nach jedem Versuche neu bestimmt wurde.

Bei diesen Messungen benutzte ich ein neues, mit Libelle versehenes Sphärometer von gewöhnlicher Construction. Die Messungen wurden an fünf Punkten der Scheiben resp. der Zellen gemacht und der Mittelwerth genommen.

Um eine eventuelle Durchbiegung der Zelle bei Messungen in der Mitte derselben zu verhindern, wurde diese mittels Schnur und Gewicht nahezu vollständig ausbalancirt.

IV. Bestimmung der Temperatur der Wärmequelle.

Die Temperatur des Eisenblockes wurde mit Hülfe eines von Heraeus in Hanau gelieferten Platin-Platiniridium-Elements bestimmt. Als Vergleichstemperatur wurde der Schmelzpunkt des Kaliumnitrates benutzt. Ein Vorversuch mit Hülfe eines Zinkfadens, der an verschiedenen Stellen der Oberfläche des

eisernen Blockes angelegt wurde, zeigte, dass die Temperatur an der Vorderseite etwas unter dem Schmelzpunkte dieses Metalles — 415° C. sein müsse.

Nach Barus entwickelt ein Platin-Platiniridium-Element in der Nähe von 415° C. eine electromotorische Kraft, welche innerhalb nicht zu weiter Grenzen als nahezu geradlinige Function der Temperatur angesehen werden kann. Die Temperaturen zwischen 415° C. und 342° C., dem Schmelzpunkte des KNO_3, auf die es mir ankam, können aber immerhin noch, ohne merklichen Fehler, als innerhalb dieser Grenzen liegend angenommen werden.

Die Temperaturbestimmung wurde in folgender Weise ausgeführt.

In der Mitte der Stirnfläche des Blockes wurde eine kleine etwa 1 mm tiefe Vertiefung ausgebohrt. In diese Vertiefung wurde die zusammengeschweisste Contactstelle des Thermoelementes, dessen anderes Ende mittels eines Korkes in der Oeffnung *D* befestigt war, so hineingesteckt, dass sie in guter Berührung mit dem Eisen war. An den beiden Drahtenden des Elementes, unmittelbar nach Austritt derselben aus dem Korke, wurden zwei Kupferdrähte angelöthet, deren Löthstellen in einem mit Xylol gefüllten Gefäss eintauchten.

Durch einen raschen Wasserstrom, welcher die Seitenflächen sowohl als die untere Fläche des Gefässes bespülte, wurde das Xylol und somit die zwei gelötheten Enden des Thermoelementes auf der constanten Temperatur erhalten.

Die beiden anderen Enden der Kupferdrähte waren in ähnlicher Weise wie die Pole der Thermosäule mit dem Galvanometer verbunden. Vor und nach jedem Versuche wurde die Thermosäule durch das Probeglas hindurch bestrahlt und das Mittel aus den beiden Ausschlägen als der Ausschlag für die Temperatur, welche während des Versuches mit Platin-Platiniridium-Element herrschte, angenommen.

Der Ausschlag beim Schmelzpunkte des KNO_3 wurde auf ähnliche Weise ermittelt. Als richtigen Ausschlag nahm ich das Mittel aus den beiden Beobachtungen, einmal, wenn das Salz eben geschmolzen war, und zweitens, wenn die geschmolzene Flüssigkeit eben anfing zu erstarren. Ich bekam folgende Resultate:

I. Das Element ist in Berührung mit der Oberfläche des Blockes:

Temperatur der kalten Contactstellen	14,4° C.
Ausschlag durch das Platin-Platiniridium-Element .	850 mm
Mittel aus den beiden Ausschlägen mit Probeglas .	952 mm

II. Das Ende des Elementes taucht in KNO_3:

Mittel der beiden Temperaturen der heissen Contactstelle	342° C.
Mittel der Temperaturen der kalten Contactstelle .	12,5° C.
Mittel der Ausschläge durch das Element	745 mm.

Aus diesen Zahlen berechnet sich die Normaltemperatur des Eisenblockes zu:

$$342^0 - 12{,}5^0 \times \frac{850}{745} \times \frac{960}{952} + 14{,}4^0 = 393{,}5^0 \text{ C.}$$

V. Einfluss der Reflexion.

Hr. Br. Lachowicz[1]) sucht in seiner Abhandlung den vermeintlichen Fehler, welchen frühere Forscher dadurch in ihre Resultate hineinbekommen haben, dass sie die Reflexion an der Grenze zwischen den inneren Gefässwänden und der Flüssigkeit nicht berücksichtigten, zu beseitigen. Wie hier bewiesen werden soll, überschätzt er aber die Bedeutung dieses Fehlers. Er versucht den Einfluss der Reflexion dadurch zu eliminiren, dass er ein und dieselbe Flüssigkeit in zwei verschieden dicken Schichten untersucht.

Was Hr. Lachowicz aber Procent der Absorption nennt, ist nun nichts Anderes, als die procentische Abnahme der Intensität der Wärme nach ihrem Durchgang durch die dünnere Schicht; da aber diese Wärme sicher ihrer Quantität und wahrscheinlich auch ihrer Qualität nach für jede verschiedene Flüssigkeit durchaus verschieden ist, so können vergleichbare Zahlen auf diese Weise keineswegs gewonnen werden.

Wenngleich es feststeht, dass der Einfluss der Reflexion nur gering ist, so kann derselbe in allen den Fällen, wo überhaupt nur geringe Differenzen, wie z. B. nach meinen Versuchen bei den verschiedenen Alkoholen, vorliegen, doch nicht übersehen werden, bevor nicht einigermassen seine Grösse bestimmt ist. Es war deshalb nothwendig, diese Frage näher zu untersuchen.

---

1) Br. Lachowicz, l. c.

Dass dieser Einfluss kleiner als der wahrscheinliche Beobachtungsfehler sein muss, kann leicht an der Fresnel'schen Formel für die Intensität des reflectirten Lichtes gezeigt werden.

Die Formel lautet:

$$J = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2(i-r)}{\operatorname{tg}^2(i+r)},$$

was für senkrechten Einfall in $(n-1)^2/(n+1)^2$ übergeht. Hier bedeuten „i" und „r" den Winkel des auffallenden resp. gebrochenen Strahles mit der Flächennormale, und „n" den Brechungscoefficienten zweier aneinander grenzenden Medien. Wenn wir nun alle Umstände zu Gunsten der Vergrösserung dieser Reflexion in Betracht ziehen, und dann trotzdem finden, dass der Einfluss nicht messbar ist, so können wir sicher diese Fehlerquelle übergehen. Wenn wir daher im Anschluss an meine eigenen Versuche annehmen, dass der Einfallswinkel der Wärmestrahlen auf die dem Eisenblock zugekehrte Seite ganze 3° beträgt, was sicher viel mehr als der durchschnittliche Einfallswinkel ist, und wenn wir die Berechnung für die Natriumlinie D des Sonnenspectrums machen, so wird jedenfalls das so erhaltene Resultat grösser sein, als die bei den Versuchen de facto vorkommende Reflexion. Da aber bei den hier in Betracht kommenden Decimalstellen die Intensitätszahlen der Reflexion für die Strahlen der Dreigradincidenz denen der senkrechten Strahlung vollkommen gleich sind, so genügt es, die Rechnung nur für die letztere aufzustellen.

Nach Einführung der hierzu nöthigen Daten bekommen wir für die Grösse der Reflexion an der ersten inneren Glasoberfläche in den drei Fällen:

1. Glas — Luft
2. Glas — Alkohol
3. Glas — Tetrachlorkohlenstoff

folgende Zahlen, welche in Procenten der Intensität des auffallenden Lichtes ausgedrückt sind:

	Perpendiculäre Strahlen
Intensität der Reflexion zwischen Glas und Luft .	0,0449
„ „ „ „ „ „ Alkohol	0,0037
„ „ „ „ „ „ CCl_4 .	0,00066.

Die von mir benutzten Brechungscoefficienten waren: Glas $\mu_D = 1{,}538$; Alkohol $\mu_D = 1{,}3623$ und Kohlenstofftetrachlorid $\mu_D = 1{,}4607$.

Damit die eben gefundenen Zahlen in unserm Falle ihre wahre Bedeutung gewinnen können, müssen wir erst den angestellten Versuchen eine weitere Ableitung entnehmen.

Aus den Tabellen (p. 29 u. 30) kann man ersehen, dass der Betrag der Reflexion an der Grenzfläche (Glas — Luft) nicht kleiner als 36,5 mm der Scala sein könne, denn die leere Zelle gab einen Ausschlag von nur 548 mm, während sie mit CCl_4 gefüllt einen Ausschlag von 584,5 mm ergab; der Unterschied kann nur durch eine Reflexion der Wärmestrahlen verursacht sein.

Dass die factisch vorkommende Reflexion nicht viel grösser als 36,5 mm betragen könne, ist sehr wahrscheinlich; aber um eine einwurfsfreie obere Grenze für diesen Werth zu bekommen, stellte ich einen besonderen Versuch mit drei Glasscheiben an. Die Scheiben waren so gewählt, dass die Summe der Dicken der beiden ersten nahezu gleich der dritten war. Zwei von diesen Gläsern wurden ähnlich wie die Zelle hintereinander geschaltet, sodass eine Luftschicht zwischen ihnen vorhanden war; die dritte wurde allein untersucht.

Wenn die Glasscheiben genau die gleiche Absorptionsfähigkeit gehabt hätten, so müsste diese Methode direct den Betrag der wirklichen Reflexion an den inneren Flächen derselben ergeben haben. Dieses traf aber nicht zu. Infolge der Schwierigkeit, Spiegelglas von derselben Dicke, wie das dünnste von den dreien zu erhalten, musste ich an Stelle dessen eine andere Glassorte verwenden. Die absorbirende Kraft dieser anderen Glassorte war aber keineswegs kleiner, wahrscheinlich sogar grösser als die der anderen beiden, sodass das Resultat eher zu gross als zu klein gefunden werden musste.

Der Versuch führte zu dem Resultat, dass der Einfluss der Reflexion bei leerer Zelle, ausgedrückt in Scalentheilen, nicht mehr als 54 mm betragen könne, und dass mithin die Correction wegen der Reflexion, wenn wir die aus der Fresnel'schen Formel berechneten Resultate berücksichtigen, in Procenten ausgedrückt, geringer als

$$\frac{0{,}0037}{0{,}045} \times \frac{54}{584} = 0{,}76 \text{ Proc.}$$

des Gesammtausschlages beim Alkohol und geringer als

$$\frac{0{,}00066}{0{,}045} \times \frac{54}{584} = 0{,}13 \text{ Proc.}$$

des Gesammtausschlages für Kohlenstoff-Tetrachlorid betragen müsse.

Da diese beiden Flüssigkeiten von allen von mir untersuchten nahezu den grössten Unterschied bezüglich ihrer Brechungscoefficienten aufweisen, so kann man annehmen, dass auch bei den übrigen Flüssigkeiten der Einfluss der Reflexion zu gering ist, um bei etwaigen Schlussfolgerungen ihn weiter in Betracht ziehen zu müssen.

VI. Bestimmung der Wellenlängen.

Nachdem die Gesetzmässigkeiten, welche im folgenden Capitel näher besprochen werden sollen, völlig erkannt waren, schien es sehr wünschenswerth, die Wellenlängen der von mir angewandten Wärmestrahlen mit befriedigender Genauigkeit festzustellen. Zu diesen Messungen benutzte ich die Methode von Langley unter Anwendung von Steinsalz-Linsen und -Prisma. Der Apparat war dem Langley'schen, der Hauptsache nach, sehr ähnlich, nur benutzte ich anstatt des Bolometers eine von Hrn. Donner, Mechaniker am hiesigen Physikalischen Institut, construirte lineare Thermosäule, welche an Empfindlichkeit und Brauchbarkeit wenig zu wünschen übrig liess.

Der Spalt, welcher sonst bei solchen Messungen am Collimatorrohr angebracht ist, wurde hier in dem Fenster *D* (Fig. 1) befestigt. Seine Oeffnung betrug 2 mm. Das Tischchen des Spectroskopes, welches das Prisma trug, stand in einer Entfernung von etwa 23 cm von dem Spalt. Es war mit einer automatisch wirkenden Vorrichtung versehen, welches den Zweck hatte, das Prisma stets auf Minimum der Ablenkung zu halten.

Da das Tischchen nicht mit Kreistheilung versehen war, wurde ein grosser Theilkreis von 187 cm Durchmesser, von 0—45°, auf einen neben den Apparat stehenden Tisch auf-

gestellt, und der Arm des Spectroskopes, welcher die Thermosäule trug, dicht hinter dieser mittels eines Aluminiumrohrs bis zur Theilung verlängert. Mit dieser Vorrichtung war es möglich, mit guter Genauigkeit noch auf einzelne Minuten zu schätzen. Die Oeffnung der Thermosäule betrug 1 mm.

Wie Langley stellte ich auf die Natriumlinie ein. Trotz der hiermit verbundenen unvermeidlichen Schwierigkeit könnte die Einstellung indess höchstens etwa um 1—2 Minuten ungenau sein.

Um die Energievertheilung im Spectrum festzustellen, wurde nach Einstellung der Thermosäule der Arm, auf welchen diese befestigt war, bei der ersten Versuchsreihe jedesmal um 30 Min. verschoben. Es wurde dadurch die Nähe des Maximums festgestellt. Bei der zweiten Versuchsreihe betrug die Verschiebung in der Gegend des Maximums 5 Min. und bei der dritten nur 1 Min.

Das Galvanometer, welches ich zu dieser Messung benutzte, war ein von Carpentier verfertigtes vorzügliches Spiegelgalvanometer.

Damit die Temperatur des Eisenklotzes während des Versuches eine nur geringe Veränderung erleiden konnte, wurden die Ablesungen möglichst schnell gemacht. Es wurde darum auch hier nur der einfache und nicht der doppelte Ausschlag abgelesen. Ich überzeugte mich aber von Zeit zu Zeit durch Commutiren, dass der geringe Strom von etwa 1—3,5 mm Ausschlag, welcher durch ungleiche Vertheilung der Temperatur in der Thermosäule selbst entstand, sich während einer Ablesung nicht wesentlich verändert hatte.

Folgende Tabelle enthält das Resultat dieser Messungen. Die Wellenlängen in der fünften Columne wurden den Arbeiten von Langley[1]), Paschen[2]) und Rubens[3]) entnommen. Wie ersichtlich, befindet sich die Energievertheilung des durch das Prisma entworfenen Spectrums hauptsächlich zwischen den Wellen, deren Länge ca. 1,0 μ und 9,0 μ beträgt. Das Maximum der Energie entspricht einer Wellenlänge von 4,03 μ, was mit den Messungen von Langley genügend übereinstimmt.

1) Langley, Phil. Mag. **21**. p. 408. 1886.
2) Paschen, Wied. Ann. **53**. p. 340. 1894.
3) Rubens, Wied. Ann. **45**. p. 254. 1892.

Brechender Winkel des Prismas = 59° 54′.

Minimal-ablenkungen		Galvanometer-ausschläge	Brechungs-exponente	μ
Grad	Min.			
40	0	73,0	1,533	0,883
39	30	152,0	1,528	1,434
39	25	163,0	1,527	
39	20	176,5	1,526	
39	15	183,5	1,525	
39	10	191,0	1,524	2,985
39	5	198,5	1,523	
39	0	201,0	1,522	
38	57	202,0	1,5214	
38	56	202,5	1,5212	4,403 Max.
38	55	202,0	1,5210	
38	54	201,0	1,5208	
38	50	199,0	1,520	
38	45	195,0	1,519	5,322
38	30	168,0	1,516	6,70
38	0	99,0	1,511	9,098
37	30	44,5	1,505	

Zur besseren Uebersicht habe ich die Curve (Fig. 3) entworfen. Es sind hier die Galvanometerausschläge als Ordi-

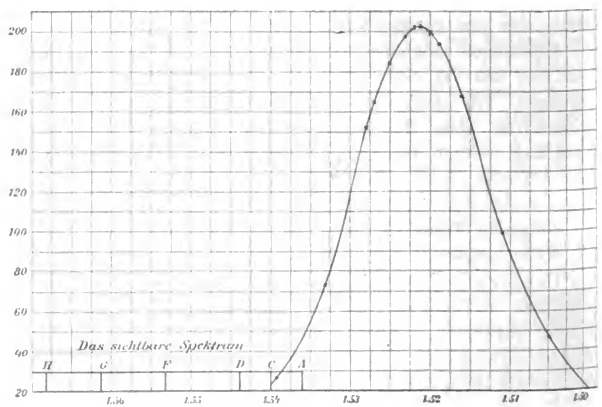


Fig. 3.

naten und die aus den Ablenkungen berechneten Brechungsexponenten als Abscissen aufgetragen.

VII. Resultate.

Alle organischen Flüssigkeiten, mit Ausnahme ganz vereinzelter (diese sind durch Anmerkungen besonders gekennzeichnet), wurden von der Firma C. A. F. Kahlbaum als chemisch rein bezogen. Im Licht veränderliche Flüssigkeiten wurden in dunklen Flaschen und ausserdem an Orten, wo das Licht nicht eindringen konnte, gehalten. Für solche Flüssigkeiten, welche in mehr als zwei Schichtdicken untersucht wurden, habe ich Curven (vgl. Tafel), welche die Abhängigkeit der absorbirenden Kraft der Schichtdicke zeigen und einen Vergleich der verschiedenen Flüssigkeiten untereinander gestatten, entworfen. Die Ausschläge des Galvanometers wurden als Ordinaten und die verschiedenen Dicken der Flüssigkeitsschicht als Abscissen, wie üblich, rechtwinklig dazu aufgetragen. Längs der Ordinatenaxe ist ein Millimeter gleich einem Millimeter Ausschlag, während auf der Abscissenaxe ein Millimeter 0,01 mm Schichtdicke entspricht.

Der Punkt, wo sämmtliche Curven die Ordinatenaxe schneiden würden, wurde durch Verlängerung der fast absolut geradlinigen Curve des Tetrachlorkohlenstoffs bis zu dem Schnittpunkt mit der Ordinatenaxe erhalten, und diente zu etwas näherer Bestimmung der Curvenkrümmungen.

Die folgende Tabelle enthält die reducirten Mittelwerthe der Galvanometerausschläge für die verschiedenen Dicken der Flüssigkeitsschichten.

Flüssigkeiten		Doppelausschläge in Millimetern der Scala, erhalten bei der Durchstrahlung der Flüssigkeitsschichten, entsprechend den Dicken von				
		2,874 mm	1,454 mm	0,925 mm	0,745 mm	0,442 mm
Tetrachlorkohlenstoff	CCl_4	580,2	583,4	584,5	—	—
Zinnchlorid	$SnCl_4$	—	—	584,1	—	—
Lösung in CCl_4	J_2	—	583,1	—	—	—
Brom	Br_2	—	—	—	—	579
Schwefelkohlenstoff	CS_2	549,9	558	563,3	—	569,8
Schwefelchlorid	SCl_2	—	—	559,1	—	—
Perchloraethylen	C_2Cl_4	475,8	513	536,0	—	—
Bromoform [1])	$CHBr_3$	—	349,6	421,8	—	—

1) Die Proben des Bromoforms für die beiden Schichten waren verschieden.

Flüssigkeiten		Doppelausschläge in Millimetern der Scala, erhalten bei der Durchstrahlung der Flüssigkeitsschichten, entsprechend den Dicken von				
		2,874 mm	1,454 mm	0,925 mm	0,745 mm	0,442 mm
Methylenjodid	CH_2J_2	258,7	341,3	389,5	—	—
Chloroform (Pictet)	$CHCl_3$	260,0	340,2	—	—	455,3
Chloral	CCl_3COH	237,1	328,7	379,2	—	—
Chloroform (Kahlbaum)	$CHCl_3$	215,5	285	333,5	—	414
Benzol	C_6H_6	178,7	271,1	332,2	—	418,5
Methyljodid	CH_3J	169,6	260,2	317,4	—	—
Aethylidenchlorid	CH_3CHCl_2	165,6	253	315,3	—	—
Aethylenbromid	CH_2BrCH_2Br	132	222	288,5	—	—
Benzotrichlorid	$C_6H_5CCl_3$	—	217,9	—	—	—
Aethyljodid	C_2H_5J	132,2	211,0	280,9	—	—
Aethylbromid	C_2H_5Br	133,2	211,0	280,4	—	—
Aethylenchlorid	CH_2ClCH_2Cl	118,6	211,8	277,9	312,6	—
Benzylchlorid	$C_6H_5CH_2Cl$	—	191,5	—	—	—
Allyljodid [1]	C_3H_5J	—	—	258,7	—	—
Allylchlorid	C_3H_5Cl	—	—	250,9	—	—
Toluol	$C_6H_5CH_3$	93,7	179,5	249,0	—	353,6
Methylenchlorid [2]	CH_2Cl_2	121,2	189,1	243,5	—	—
Trimethylenbromid	$C_3H_6Br_2$	89,4	172,4	241,5	—	—
Allylbromid [2]	C_3H_5Br	—	—	228,7	—	—
Xylol	$C_6H_4(CH_3)_2$	80,9	159,0	224,0	—	331,8
Amyljodid	$C_5H_{11}J$	86,8	155,4	214,3	—	—
Amylbromid	$C_5H_{11}Br$	86,1	155,2	214,6	—	—
Nitrobenzol	$C_6H_5NO_2$	—	—	212,5	—	—
Hexan (Diisopropyl)	C_6H_{14}	—	—	205,2	—	302,6
Benzonitril (König)	C_6H_5CN	—	137,0	—	—	—
Oleum Paraffinum [3]	—	—	117,5	167,3	—	269,4
Aethylacetat	$CH_3CO_2.C_2H_5$	58,4	113,0	—	—	—
Aethyläther	$(C_2H_5)_2O$	60,6	111,5	—	—	—
Aceton	CH_3COCH_3	—	100,6	147,5	—	—
Amylchlorid	$C_5H_{11}Cl$	57,8	101,9	145,7	—	—
Amylcyanid (König)	$C_5H_{11}CN$	—	97,0	—	—	—
Methylacetat	$CH_3CO_2CH_3$	—	87,3	126,1	—	210,0
Essigsäureanhydrid	$C_4H_6O_3$	—	88,6	122,8	—	—
Acetaldehyd	CH_3COH	—	84,2	122,5	—	200,0
Paraldehyd	$(C_2COH)_3$	—	78,9	—	126	—
Diaethylamin	$(C_2H_5)_2NH$	—	—	105,5	—	—
Benzaldehyd	C_6H_5COH	36,2	70,5	100	—	—
Amylalkohol	$C_5H_{11}OH$	—	57,2	85,5	—	151
Isobutylalkohol	C_4H_9OH	—	53,9	83,4	—	145,3
Propylalkohol	C_3H_7OH	—	50,0	75,7	—	137,7
Aethylalkohol	C_2H_5OH	—	44,2	72,6	—	131,4
Methylalkohol	CH_3OH	—	37,4	64,3	—	118,2
Amidobenzol (Anilin)	$C_6H_5NH_2$	—	—	67,1	—	—

1) Theilweise zersetzt.

2) Wahrscheinlich unrein. Das Allylbromid war theilweise zersetzt.

3) Kein chemisch reiner Körper; nur untersucht als Vorprobe.

Flüssigkeiten		Doppelausschläge in Millimetern der Scala, erhalten bei der Durchstrahlung der Flüssigkeitsschichten, entsprechend den Dicken von				
		2,874 mm	1,454 mm	0,925 mm	0,745 mm	0,442 mm
Aethylenglycol	$C_2H_4(OH)_2$	—	—	39,2	—	—
Glycerin	$C_3H_5(OH)_3$	—	—	29,7	—	—
Aethylendiamin	$C_2H_4(NH_2)_2$	—	—	20,5	—	—
Wasserstoffsuperoxyd [1])	H_2O_2	—	—	19,4	—	—
Wasser	H_2O	—	—	19,3	26,0	44,2
Aethylamin	$C_2H_5NH_2$	—	—	15,8	—	—
Wässr. Ammoniaklösung	$NH_3.H_2O$	—	—	14,5	—	—
Gesätt. wässr. Lösung v.	$KAlSO_4$	—	—	—	23,4	—
„ „ „ „	NH_4AlSO_4	—	—	—	21,2	—
„ „ „ „	$(NH_4)_2SO_4$	—	—	—	18,1	—
„ „ „ „	$Al_2(SO_4)_3$	—	—	—	12,3	—
10% wässr. Lösung von	$FeCl_2$	—	—	—	25,1	—

Schlussfolgerungen.

Ueberblickt man die in der vorhergehenden Tabelle zusammengestellten Zahlen, so ergeben sich folgende Gesetzmässigkeiten:

1. Jedesmal, wenn in einer chemischen Verbindung unter sonst gleichen Umständen Wasserstoff, Sauerstoff, Hydroxyl und Stickstoff durch Schwefel oder Halogene ersetzt werden, steigt die Wärmedurchlässigkeit der Verbindungen ein Beträchliches.

Zur Bestätigung dieses Satzes mögen die in folgender Tabelle angeführten Beispiele dienen.

	Flüssigkeiten		Galvanometerausschläge
a) 1.	Methylenchlorid	CH_2Cl_2	243,5
	Chloroform	$CHCl_3$	386,2
	Schwefelkohlenstoff	CS_2	563,3
	Tetrachlorkohlenstoff	CCl_4	584,5
2.	Acetaldehyd	CH_3CHO	122,5
	Chloral	CCl_3CHO	379,2
3.	Methyljodid	CH_3J	317,4
	Methylenjodid	CH_2J_2	389,5
b)	Acetaldehyd	CH_3CHO	122,5
	Aethylidenchlorid	CH_3CHCl_2	315,3
c) 1.	Aethylalkohol	C_2H_5OH	72,6
	Aethylbromid	C_2H_5Br	280,4
2.	Amylalkohol	$C_5H_{11}OH$	85,5
	Amyljodid	$C_5H_{11}J$	214,3
d)	Benzonitril	C_6H_5CN	137,0
	Benzotrichlorid	$C_6H_5CCl_3$	217,9

1) Von König bezogen.

2. In homologen Reihen ändert sich die Diathermanität bei einer jedesmaligen Addition von CH_2 in gesetzmässiger Weise, doch hängt die Richtung dieser Aenderung von der Natur der übrigen in dem Molecül enthaltenen Elemente ab.

Beispiele:

Flüssigkeiten		Ausschläge für eine Schichtdicke 1,454 mm	0,925 mm	0,442 mm
a) Methylalkohol	CH_3OH	37,4	64,3	118,2
Aethylalkohol	C_2H_5OH	44,2	72,6	131,4
Propylalkohol	C_3H_7OH	50,0	75,7	137,7
Isobutylalkohol	C_4H_9OH	53,9	83,4	145,3
Amylalkohol	$C_5H_{11}OH$	57,2	85,5	151,0
b) Benzol	C_6H_6	271,1	332,2	418,5
Toluol	$C_6H_5CH_3$	179,5	249,0	353,6
Xylol	$C_6H_4(CH_3)_2$	159,0	224,0	331,8

3. Die Absorptionsfähigkeit einer Verbindung hängt nicht wesentlich von der Grösse des Molecüls ab, sondern scheint vielmehr eine Eigenschaft der Bestandtheile der Verbindung zu sein.

Beispiel:

Flüssigkeiten		Ausschläge
Acetaldehyd	CH_3CHO	84,2
Paraldehyd	$(CH_3CHO)_3$	78,9

Um in diesem Fall den Einfluss der verschiedenen Dichte der beiden Flüssigkeiten einigermaassen zu eliminiren, wird es zweckmässiger sein, Ausschläge zu vergleichen von Schichtdicken, die im Verhältniss der specifischen Volumina stehen:

	Dem specifischen Volumen entsprechende Schichtdicken	Ausschläge
Acetaldehyd	0,934 mm	122,0
Paraldehyd	0,741 mm	126,5

Die Ausschläge unterscheiden sich — ungeachtet, dass das Moleculargewicht des Paraldehyds dreimal so gross ist, wie das des Aldehyds — nur sehr wenig voneinander.

Der Unterschied mag wohl dem Einfluss geringer Verunreinigungen zugeschrieben werden.

4. Von den verschiedenen von mir untersuchten Elementen tragen Wasserstoff, Sauerstoff und Stickstoff — und zwar Stickstoff und Wasserstoff mehr als Sauerstoff — am meisten dazu bei, die Absorptionsfähigkeit ihrer Derivate zu erhöhen.

Dass der Kohlenstoff keinen sehr bedeutenden Einfluss auf die Absorptionsfähigkeit seiner Verbindungen ausübt, ist

leicht ersichtlich aus dessen einfachen Verbindungen mit den Halogenen und mit Schwefel. Um daher den Einfluss von Wasserstoff auf die Absorptionsfähigkeit deutlich hervorzuheben, wird es genügen, in der nächstfolgenden Tabelle (a) die Verhältnisszahl des Gewichts von Wasserstoff zum Gewicht der übrigen Atome im Molecül nebst den Ausschlägen anzugeben.

Wie leicht ersichtlich, steigt, mit Ausnahme von Methylenchlorid, welches wahrscheinlich nicht ganz rein war, stets die Absorptionsfähigkeit mit der Zunahme von Wasserstoff:

Flüssigkeiten	$\frac{H_n}{\text{Mol.-Gew. weniger } H_n}$	Ausschläge
a) 1. CCl_4	—	584,5
CS_2	—	563,3
$CHBr_3$	0,004	421,8
CH_2J_2	0,007	389,5
$CHCl_3$	0,008	386,2
CH_3J	0.021	317,4
C_2H_5J	0,033	280,9
CH_2Cl_2	0,024	243,5
$C_5H_{11}J$	0,059	214,3
$C_5H_{11}Cl$	0,117	145,7
2. C_6H_6	0,083	332,2
C_6H_{14}	0,194	205,2
3. $C_6H_5CCl_3$	0,039	217,9
$C_6H_5CH_2Cl$	0,059	191,5
$C_6H_5CH_3$	0,095	179,5

Flüssigkeiten	Ausschläge	Flüssigkeiten	Ausschläge
b) 1. CH_3CHCl_2	315,3	c) 1. $C_6H_5CCl_3$	217,9
CH_3CHO	122,5	C_6H_5CN	137,0
2. C_2H_6O	72,6	2. $C_6H_5CH_3$	249,0
$C_2H_6O_2$	39,2	$C_6H_5NH_2$	67,1
3. C_3H_8O	75,7	3. $C_6H_5CH_3$	182,0
$C_3H_8O_3$	29,7	C_6H_5CN	138,5

Werden die zwei letztenZahlen mit den folgenden verglichen:

$C_6H_5NO_2$	212,5
$C_6H_5NH_2$	67,1

so ist ersichtlich, dass die drei Elemente Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff einen quantitativ verschiedenen Einfluss auf die Absorptionsfähigkeit ausüben. Nach diesen zwei Beispielen allein zu urtheilen, würde hervorgehen, dass der Stickstoff mehr und der Sauerstoff weniger als der Wasserstoff beiträgt, die Absorptionsfähigkeit zu vergrössern. Vergleichen wir die

in der Haupttabelle enthaltenen Zahlen auf alle möglichen Arten, so scheint es kaum zweifelhaft, dass sowohl der Wasserstoff wie auch der Stickstoff merklich mehr zur Absorption beitragen, als der Sauerstoff. Indessen scheinen die beiden erstgenannten Elemente nicht immer im gleichen Verhältniss bezüglich ihres Einflusses auf die Absorptionsfähigkeit zu stehen.

5. Bei isomeren Verbindungen ist die Wärmedurchlässigkeit verschieden, und diese Verschiedenheit steht sowohl mit der Verschiedenheit des Atomvolumens einzelner Elementaratome, wie auch mit der verschiedenen Art der Bindung dieser Atome untereinander im Zusammenhang; bei gesättigten Verbindungen wächst die Wärmedurchlässigkeit stets mit wachsendem Atomvolumen.

	Flüssigkeiten		Ausschläge
1.	Aethylidenchlorid	CH_3CHCl_2	253,0
	Aethylenchlorid	CH_2ClCH_2Cl	211,8
2.	Aethyläther	$(C_2H_5)_2O$	111,5
	Isobutylalkohol	C_4H_9OH	53,9

Vergleicht man auch hier Schichtdicken, die im Verhältniss der specifischen Volumina stehen, um den Einfluss der verschiedenen Dichte der Flüssigkeiten zu eliminiren, wie bei dem Paraldehyd, so hat man in diesem Fall sogar einen Vergleich von äquimolecularen Volumina. Um den Zusammenhang der Zunahme der Wärmedurchlässigkeit mit der Zunahme des Atomvolumens zum Vorschein zu bringen, sind in der hierauf folgenden Tabelle auch die Zahlen für die Molecularvolumina nebst den Ausschlägen angebracht.

Flüssigkeiten	Dichte	Schichtdicken, welche dem spec. Volumen entsprechen	Ausschläge	Molecularvolumen [1])
1. Aethylenchlorid	1,280	0,870	287,0	85,32
Aethylidenchlorid	1,204	0,925	315,3	88,57
2. Isobutylalkohol	0,816	1,238	60,6	101,63
Aethyläther	0,736	1,440	112,0	106,15

Ob das grössere Molecularvolumen des Aethylenchlorids im ersten Beispiel einem Atom oder mehreren zugeschrieben werden muss, ist nicht festgestellt, dagegen scheint ohne Zweifel die Zunahme des Molecularvolumens des Aethyläthers seinen Grund in dem grösseren Atomvolumen des Sauerstoffs in der-

1) Die hier befindlichen Zahlen für die Molecularvolumina sowie auch die später gegebenen Zahlen für die Atomvolumina sind dem Lehrbuch der allgemeinen Chemie von Ostwald entnommen.

selben Verbindung über dem des im Isobutylalkohol befindlichen Sauerstoff zu haben.

Dass dieser Unterschied im zweiten Beispiel keineswegs geringen Spuren von Wasser oder anderen Verunreinigungen im Isobutylalkohol zuzuschreiben ist, habe ich durch einen besonderen Versuch nachgewiesen. Ich stellte mir eine Lösung von 98,44 Proc. Isobutylalkohol und 1,56 Proc. destillirtem Wasser dar und untersuchte sowohl den reinen Alkohol wie die Lösung bei der gleichen Schichtdicke von fast genau 1,45 mm. Der Versuch ergab folgendes Resultat:

Durchschnittlicher Ausschlag für Isobutylalkohol	58,2
Desgleichen für die Lösung	55,2
Verringerung infolge des Wassergehaltes	3,0

Es geht aus diesen Zahlen klar hervor, dass die geringen Verunreinigungen, welche man im Isobutylalkohol als stets vorhanden annehmen kann, den grossen Unterschied in der Absorptionsfähigkeit zwischen diesem und Aether keineswegs bedingen können. Eine geringe Verunreinigung des Aethers mit Wasser oder Alkohol würde natürlich den Unterschied in den Ausschlägen für diesen und Isobutylalkohol nur verringert haben.

Nach dem Vorhergehenden ist es leicht, die Elemente der von mir untersuchten Verbindungen zu einer Reihe nach Maassgabe des Einflusses auf die Absorptionsfähigkeit ihrer Verbindungen zu ordnen. In dieser Reihe sind die Stellen einzelner Elemente wohl noch mit Unsicherheit behaftet, was auch nur durch weitere Versuche beseitigt werden kann. Wie aber aus folgender Zusammenstellung hervorgeht, ist es trotz dieser Unsicherheit doch auffallend, in welch gutem Einklang mit der der Atomvolumina ihrer flüssigen Verbindung die Reihenfolge dieser Anordnung steht:

Elemente geordnet nach Aufsteigen der Absorptionsfähigkeit		Atomvolumina in ihren Verbindungen
Genaue Stelle nicht erwiesen	Sn	40,2
Unterschied noch nicht erwiesen	J	37,5
	Br	27,8
	Cl	22,8
	S	22,6
	C	11,0
	O	7,8 (Hydroxyl)
Reihenfolge manchmal umgekehrt	H	5,5
	N	2,3 (nicht constant)
	O (Carbonyl)	12

6. Als Mittel, die Reinheit von organischen Flüssigkeiten oder Salzen, wenn sie in sehr wärmedurchlässigen Flüssigkeiten löslich sind, zu untersuchen, erweist sich die Methode der Bestimmung der Absorptionsfähigkeit dieser Flüssigkeiten resp. Salze als die bei weitem empfindlichste von allen bisher vorgeschlagenen oder angewandten. Ich dürfte sie deshalb auch warm für diesen Zweck empfehlen.

Diese Methode wurde von mir angewandt, hauptsächlich um die Reinheit des von Kahlbaum bezogenen Chloroforms zu prüfen, deren Absorptionsfähigkeit sich durchaus als Ausnahme zu den von mir abgeleiteten Schlussfolgerungen erwiesen hatte. Um diese Prüfung durchzuführen, bezog ich eine andere, durch Umkrystallisation völlig gereinigte Sorte Chloroform von Pictet. Wie erwartet, fand ich dieselbe bedeutend wärmedurchlässiger als die erste Sorte, sodass in Bezug auf diese die von mir gefundene Gesetzmässigkeit ihre volle Gültigkeit behielt.[1])

Ich muss noch ein paar Worte bezüglich der Versuche mit wässerigen Lösungen, deren resp. Zahlen am Ende der Haupttabelle gegeben sind, hinzufügen. Nach den bisherigen Ergebnissen wird in einem Krystall von gewöhnlichem Alaun, $K_2Al_2(SO_4)_4 + 24H_2O$, wie leicht zu ersehen ist, die Absorption wesentlich durch den Gehalt an Sauerstoff und möglicherweise Aluminium bedingt sein; wir werden daher kaum erwarten dürfen, dass Alaun die dunklen Strahlen mehr als reines Wasser absorbirt. Einen vergrössernden Einfluss könnte höchstens die bei der Auflösung von festem Alaun in Wasser entstehende Contraction des Gesammtvolumens haben. Aus meinen Versuchen ergibt sich in der That, dass eine gesättigte Alaunlösung nur ein wenig stärker dunkle Strahlen absorbirt, als reines Wasser. Diese Versuche zeigen wiederum die Unrichtigkeit der landläufigen Annahme, dass Alaun ein ungewöhnlich stark absorbirendes Medium für Wärmestrahlen sein soll. Die diesbezüglichen Untersuchungen von Johnson stehen durchaus mit den meinigen im Einklang.

Beim Ammoniakalaun müssen wir infolge der Anwesenheit von Stickstoff und infolge des verhältnissmässig grösseren

1) Vgl. Tabelle p. 469 und Curventafel.

Wasserstoffgehalts eine grössere Absorptionsfähigkeit als im Kalialaun erwarten; die Versuche bestätigen diese Annahme vollständig. Aus den Versuchen geht ferner hervor, dass eine gesättigte Lösung von Ammoniumsulfat $(NH_4)_2SO_4$ die dunklen Strahlen noch stärker, als die beiden Alaunlösungen absorbirt und dass eine gesättigte Aluminiumsulfatlösung $[Al_2(SO_2)_3]$ von allen bisher untersuchten Flüssigkeiten die grösste Absorptionsfähigkeit hat. Diese grosse Absorptionsfähigkeit der beiden letztgenannten Salze ist voraussichtlich zum grossen Theil durch ihre sehr bedeutende Löslichkeit bedingt.

In einer kürzlich erschienenen Abhandlung schlägt Hr. R. Zsigmondy[1]) eine Lösung von Eisenchlorid als ein ausgezeichnetes Mittel vor, um bei optischen Versuchen die Wärmestrahlen zu absorbiren. Wie indessen aus meinen Zahlen (vgl. p. 470) hervorgeht, absorbirt eine 10proc. wässerige Lösung dieses Salzes, wie sie von ihm proponirt wird, kaum mehr Wärmestrahlen der Gattung, wie ich sie benutzte, als reines Wasser. Es besteht trotzdem kein unbedingter Widerspruch zwischen seinen Resultaten und den meinigen, da er eine durchaus andere Quelle der Strahlung wie ich, nämlich eine leuchtende, benutzte. Es scheint daher, dass gewisse Eisensalzlösungen im Stande sind, die Wärmestrahlen einer leuchtenden Quelle bedeutend stärker als reines Wasser zu absorbiren, während dieselben Lösungen dunkle Strahlen von grösserer Wellenlänge kaum stärker als reines Wasser zurückhalten.

Vergleicht man meine Resultate mit den anderen Versuchen auf diesem Gebiete, so findet man in folgenden Punkten Uebereinstimmung resp. Widerspruch.

Der erste, von Schultz-Sellack aufgestellte Satz, dass die Halogen- und Schwefelverbindungen der Elemente ziemlich wärmedurchlässig sind, ist von mir dahin erweitert worden, dass diese Verbindungen im Vergleich mit den Kohlenwasserstoffen, sowie den Sauerstoff- und Stickstoffverbindungen nicht nur ziemlich, sondern sehr wärmedurchlässig sind.

Sein zweiter Schluss, welcher aus der Untersuchung von Verbindungen in 8 mm dicken Schichten gezogen wurde, näm-

1) l. c. p. 458.

lich, dass die Halogenverbindungen des Ammoniums, Aethyls, Aethylens etc. die Eigenschaften ihrer Urelemente nicht zu theilen scheinen, steht in vollem Widerspruch mit meinen Resultaten.

Der Grund ist klar: Die Schichtdicken, wie sie Hr. Schultz-Sellack benutzte, waren zu gross, als dass er mit seinem Apparat noch deutliche Unterschiede in der Absorptionsfähigkeit hätte nachweisen können.

Sein dritter Satz, nämlich, dass Oxyde im allgemeinen die dunklen Strahlen stark absorbiren, wird durch meine Versuche vollständig bestätigt.

Die einzigen Zahlen von Hrn. Lachowicz, welche einigermaassen einen Vergleich mit den meinigen zulassen, werden von ihm gelegentlich eines erläuternden Beispiels gegeben. In dieser Erläuterung gibt Hr. Lachowicz die direct beobachteten Galvanometerausschläge für dieselbe Reihe von Alkoholen, welche auch ich beobachtet habe. Seine Zahlen zeigen deutlich das continuirliche Ansteigen der Wärmedurchlässigkeit vom Methyl- bis zum Amylalkohol. Zieht man die directen Beobachtungen allein in Betracht, so ergibt sich eine vollständige Uebereinstimmung zwischen den Ergebnissen von Hrn. Lachowicz und mir, und es ist nur zu bedauern, dass er für die übrigen von ihm untersuchten Flüssigkeiten nicht ebenfalls die directen Galvanometerausschläge oder wenigstens genügende Daten zur Neuberechnung gegeben hat. In ihrer jetzigen Form sind seine Angaben, so werthvoll sie auch sonst für mich wären, fast ohne Belang.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Geheimrath Professor Dr. G. Wiedemann, für seine grosse Liebenswürdigkeit, mit welcher er mir die Möglichkeit zum Arbeiten sicherte, sowie für seinen stets freundlichst gewährten und bewährten Rath meinen tiefgefühltesten Dank auszusprechen.

Auch Hrn. Dr. O. Wiedeburg möchte ich hier meinen aufrichtigen Dank sagen für seine freundliche Unterstützung, die er im Laufe meiner Arbeit mir angedeihen liess.

---

4. *Die verschiedenen Spectren des Quecksilbers; von J. M. Eder und A. Valenta.*[1])

Das Spectrum des Quecksilbers war in seinen verschiedenen Erscheinungsformen als Bogen-, und Flammenspectrum seit Kirchhoff öfters von Spectroskopikern untersucht worden, ohne dass eine wünschenswerthe Uebereinstimmung in den Angaben der Letzteren erzielt worden wäre. Namentlich die wichtige Rolle, welche das Quecksilberspectrum in Geissler'schen Röhren mitunter als unwillkommene Nebenerscheinung spielt, ist nicht genügend sicher gestellt, sodass wir bei Versuchen, das Quecksilberspectrum an der Hand der bisher vorliegenden Publicationen in anderen Spectren zu identificiren, bez. aus denselben zu eliminiren, auf unüberwindliche Hindernisse stiessen.

Wir griffen deshalb das Studium neuerdings auf und es erstreckten sich unsere Untersuchungen auf das Verhalten des Quecksilberspectrums bei verschiedenen Temperaturen und Druckverhältnissen; wir haben das Funken-, Bogenspectrum, sowie das Spectrum des Quecksilbers in Vacuumröhren in dieselben einbezogen. Hierbei erweiterten wir die Kenntniss des *Linienspectrums*, welches bisher augenscheinlich nur im unvollkommen entwickelten Zustande beobachtet worden war und entdeckten ein *neues Bandenspectrum* des Quecksilbers, welches letztere um so interessanter ist, als dadurch der Nachweis erbracht wurde, dass der Quecksilberdampf der Analogie mit anderen Gasspectren folgt, wie z. B. demjenigen des Wasserstoffes, des Stickstoffes etc., bei denen ja gleichfalls ein Linien- und ein Bandenspectrum beobachtet wurde.

Das *Linienspectrum des Quecksilbers* tritt in verschiedenen Stadien der Vollständigkeit im Bogenlicht, im Funken zwi-

---

1) Auszug aus der in den Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien **46.** publicirten Arbeiten der Verfasser.

schen Quecksilberelectroden bei Atmosphärendruck, in Vacuumröhren bei gewöhnlicher Temperatur unter dem Einflusse des Inductionsfunkens mit und ohne Flaschen, sowie im Quecksilberdampf von 3 bis über 1000 mm Druck (bei 100 bis über 400° C.) im Flaschenfunken auf. Das *Bandenspectrum* dagegen erscheint nur unter ganz bestimmten Bedingungen vollkommen ausgebildet, nämlich, wenn man den Funken einer kräftigen Inductionsrolle (*ohne Flaschen*) durch Vacuumröhren schlagen lässt, in denen sich ein Tropfen Quecksilber befindet und welche während des Versuches einseitig erhitzt werden, sodass das Quecksilber abdestillirt. Die Dämpfe entweichen durch die Capillare in den anderen weiteren Theil der Röhren, wo

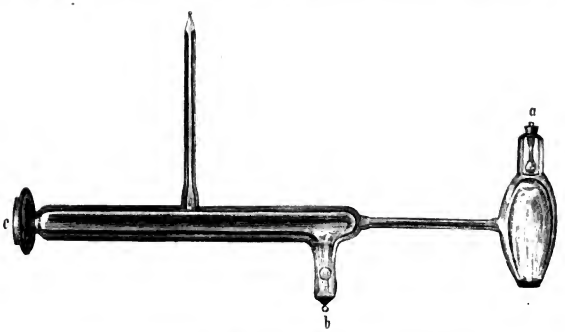


Fig. 1 (Vacuumröhre mit Destillationseinrichtung).

Condensation stattfindet; dadurch wird ein fortwährendes Steigen des Druckes in den Röhren verhindert. Wir wollen diese beiden Hauptspectren einzeln genauer beschrieben.

1. Linienspectrum des Quecksilbers.

Das linienreichste also vollkommenste Spectrum des Quecksilbers in Geisslerröhren wird erhalten, wenn man in einen geeignetem Geisslerrohre, welches möglichst unter gleichzeitiger Erwärmung des in demselben enthaltenen Quecksilbers evacuirt wurde, Quecksilber zum Destilliren durch die Capillare bringt und gleichzeitig einen kräftigen Flaschenfunken hindurchschlagen lässt. Die Röhre beginnt dabei in äusserst intensivem

weissem Lichte zu leuchten und es tritt das in der Tabelle enthaltene äusserst linienreiche Spectrum des Quecksilbers auf. Wir bedienten uns zur Durchführung des Versuches der in nebenstehender Figur abgebildeten mit aufgeschliffener Quarzplatte verschlossener Röhre.

In *a* befindet sich eine retortenartige Erweiterung, welche einige Tropfen Quecksilber enthält, daran schliesst sich die ziemlich enge Capillarröhre, an welche sich die lange und entsprechend weite Röhre mit der Electrode *b* anschliesst, deren Ende *c* mit einer aufgekitteten planparallelen Quarzplatte verschlossen ist. Erhitzt man nun das vollkommen evacuirte Rohr unter *a*, so verflüchtet sich das Quecksilber und destillirt durch die Capillare nach dem weiten Rohre, in welchem die vollkommene Condensation der Dämpfe erfolgt. Es herrscht also in dem Rohre fast kein Druck. Lässt man nun einen kräftigen Flaschenfunken durchschlagen und erhitzt die Capillare, so erstrahlt dieselbe in glänzend weissem Lichte und man erhält ein Spectrum, welches aus ungemein zahlreichen scharfen Linien besteht. Die oben beschriebene Einrichtung des mittels Quarzplatte verschlossenen Geisslerrohres gestattet uns, dieses Spectrum sowohl im sichtbaren als im ultravioletten Theile zu photographiren. Wir haben diese Spectren ausgemessen und die Resultate dieser Messungen in die beifolgende Tabelle aufgenommen. Dasselbe enthält alle Haupt- und Nebenlinien des Funken- und Bogenspectrums scharf und deutlich ausgebildet, dazwischen tritt aber eine Reihe von kräftigen Linien auf, welche sonst in diesen letzteren Queckspectren nicht zu constatiren sind. [1])

Im weiten Theile des Rohres tritt unter diesen Umständen und wenn sich die Electrode knapp hinter der Capillare befindet, nur das einfache Linienspectrum auf, dagegen kommt das Bandenspectrum dort zum Vorschein, wo die Electrode etwas weiter von der Capillare entfernt ist.

Die Erscheinungen des linienreichen vollkommenen Linienspectrums in der Capillare ist an die Verwendung von sehr grossen oder vielen kleinen Leydenerflaschen gebunden. Schaltet

1) In der Tabelle sind die auch im Bogenspectrum auftretenden Linien mit †, die auch im Funkenspectrum auftretenden mit * bezeichnet.

man diese gänzlich aus, so tritt in die Capillare sofort das Bandenspectrum (vgl. p. 487) auf, während bei nur theilweisem Ausschalten der Flaschen das Linienspectrum, mit Resten des Bandenspectrums vermengt, in der Capillare auftritt.

Unsern Versuchen zufolge entsteht also das vollkommenste linienreichste „Linienspectrum" des Quecksilbers bei den höchsten bisher verwendeten Temperaturen und kleinstem Drucke in Geisslerröhren, wenn ein kräftiger Flaschenfunke während der Destillation des Quecksilbers durch die Capillare durchschlägt. Das Phänomen tritt am schönsten bei Verwendung eines kräftigen Stromes (Gleichstrom oder Wechselstrom) auf, doch kann es leicht geschehen, dass die Aluminiumelectroden infolge der hohen Temperatur ins Glühen gerathen, abschmelzen und nicht selten die Röhren an den Stellen, woselbst die Drähte eingeschmolzen sind, weich werden und rasch zu Grund gehen. Wir haben von diesem linienreichsten Quecksilberspectrum, welches *vor* uns noch niemals beschrieben worden sei, beiläufig 600 Linien genau ausgemessen und ihre Wellenlänge bestimmt (vgl. Tabelle); jedoch ist die Zahl der überhaupt vorhandenen derartigen Quecksilberlinien hiermit keineswegs schon erschöpft.

Linienspectrum des Quecksilbers
(bezogen auf Rowland's Normalspectrum).
Für die hellsten Linien ist $i = 10$, für die schwächsten $i = 1$ gesetzt.

λ	i	Bemerkung	λ	i	Bemerkung	λ	i	Bemerkung
6363,5	2	*	5699,0	3		5461,0	10	* ┼ st. verbr.
6152,3	9	*	5695,7	1		5455,0	3	
5889,1	8	*	5679,1	10	*	5449,9	3	
5880,5	2		5665,8	3		5443,2	3	
5872,1	8	*	5662,5	3		5426,5	10	* st. verbr.
5864,4	2		5637,8	7		5416,9	3	
5854,5	1	verbreitert	5596,0	8	*	5398,5	2	
5840,6	1		5587,9	2		5393,4	2	
5834,0	3		5576,2	3		5384,9	1	
5819,1	4	* ┼	5571,2	8		5373,2	3	
5804,3	10	* ┼	5553,6	4	stark verbr.	5365,5	2	* ┼ st. verbr.
5790,5	2	* ┼	5541,0	6		5360,6	1	nebelig
5781,9	1		5513,4	3	sehr verbr.	5355,5	1	„
5769,5	10	* ┼	5501,4	2		5352,4	1	„
5746,6	3		5490,0	3		5346,3	3	
5727,7	5		5484,6	4	wahrsch.	5334,3	2	verbreitert
5717,0	1				doppelt	5311,7	4	
5713,4	2		5476,3	4		5308,0	1	

λ	i	Bemerkung	λ	i	Bemerkung	λ	i	Bemerkung
5294,7	2		4933,0	2	verbreitert	4568,8	2	verbreitert
5288,7	6		4917,9	2		4562,3	2	
5284,2	3		4916,4	4	* †	4553,8	6	
5281,5	5		4913,0	2		4547,0	2	
5279,3	4	*	4902,1	4	„	4544,2	4	
5275,5	1		4898,3	3		4541,7	1	
5273,7	4		4895,9	2	„	4539,9	1	verschwom.
5454,0	2		4880,2	1		4537,7	2	„
5242,8	7		4869,9	3		4534,9	1	
5233,8	4		4867,3	4		4532,7	2	
5218,0	7	*	4864,8	3		4530,3	1	
5211,2	4		4856,6	3	„	4525,1	1	
5207,0	7	*	4849,4	1	„	4522,9	6	scharf
5196,6	4		4844,6	2	scharf	4518,9	1	
5190,7	1		4841,3	4		4516,4	4	
5187,5	2		4826,0	8		4511,5	2	
5172,4	2	verschwom.	4813,0	4		4507,2	2	
5163,2	4		4797,4	8		4505,0	1	stark verbr.
5149,2	4		4773,7	1		4499,1	1	
5141,5	1		4768,1	6		4498,1	1	
5135,6	5		4753,4	3		4495,1	1	scharf
5132,0	7		4744,7	6		4493,1	1	„
5113,7	1		4740,3	1		4491,1	2	
5107,3	3		4729,9	3		4490,3	3	
5102,9	3		4697,9	1		4486,8	8	stark verbr.
5100,5	1		4689,1	1		4483,7	3	
5098,4	2		4687,0	1	sehr	4480,7	1	
5086,3	1				schwach	4470,5	5	
5083,0	2		4681,6	2	verschwom.	4466,7	2	verschwom.
5073,6	2		4667,5	2		4464,2	3	
5068,2	7		4664,2	1		4461,5	1	undeutlich
5062,6	4		4661,0	7		4459,3	3	
5058,4	1		4651,7	5		4454,2	2	verschwom.
5051,8	1		4647,8	2		4450,1	1	
5048,4	2		4639,3	1		4446,4	3	
5045,7	4		4637,0	2	einseitig	4435,8	3	
5042,4	2				abschattirt	4434,2	2	
5038,3	2		4635,9	1	„	4431,6	2	
5027,1	1		4634,2	1	„	4425,9	8	verbreitert
5020,9	2		4630,5	1		4422,2	2	
5018,4	2		4626,2	2	verbreitert	4420,6	2	
5008,6	2	verbreitert	4620,5	1	„	4416,0	1	
4992,5	5		4616,5	1	„	4415,4	3	
4986,7	3		4604,8	2		4414,0	3	
4981,3	3		4602,9	2		4412,1	3	
4974,0	6		4600,7	2		4408,4	1	
4970,0	1		4598,2	5		4401,5	10	stark verbr.
4965,4	1	sehr	4593,5	1		4391,9	10	
		schwach	4587,1	2		4385,7	8	
4959,7	4	* † s. stark	4580,1	1	undeutlich	4382,9	8	
		verbreitert	4578,2	1	„	4378,7	8	
4949,4	3		4576,9	1		4376,1	10	
4943,4	1	„	4571,5	1		4372,6	2	

λ	i	Bemerkung	λ	i	Bemerkung	λ	i	Bemerkung
4369,6	1		4199,1	1		4046,8	10	* †
4358,6	10	* †	4196,8	6		4040,7	5	*
4347,7	10	* †	4192,4	5		4037,5	4	
4344,2	2		4186,0	7		4035,3	5	
4339,5	6	* †	4183,0	1		4033,0	7	verbreitert
4336,9	8		4181,5	1		4030,9	1	*
4333,4	3		4178,5	8	stark	4029,9	3	
4329,1	1				einseitig	4024,4	8	* st. verbr
4327,2	5				verbreitert	4022,0	1	
4324,7	5		4175,9	6		4021,0	3	
4320,4	8		4169,0	2		4020,1	4	
4318,3	1		4167,8	1		4014,8	1	
4315,8	1		4165,7	1		4013,7	6	„
4314,2	4		4164,6	1		4011,0	2	
4312,9	3		4162,0	8		4010,0	1	
4310,3	2		4157,1	4		4006,0	8	„ „
4308,6	1		4155,1	3		4003,5	4	
4306,6	4		4149,5	3		4001,8	3	
4305,5	4		4148,6	1		3999,9	1	
4304,0	1		4145,0	2		3999,2	2	
4301,7	2	verbreitert	4143,7	1		3998,2	1	
4300,0	1		4140,5	7		3996,8	1	
4297,6	5		4134,9	2		3995,8	1	
4292,3	5		4132,7	1		3993,8	6	
4290,1	3		4124,3	2		3989,8	2	
4288,2	2		4123,0	1		3988,8	1	
4285,1	6	wahrsch.	4120,9	8	*verbreitert	3984,1	10	* † s. verbr.
		doppelt	4117,5	3		3978,8	4	
4282,7	6		4115,3	8	*	3976,5	6	
4276,7	3	verbreitert	4109,1	6	*	3971,6	1	
4270,1	3		4106,9	6		3970,3	1	
4264,2	8	stark verbr.	4104,1	8		3967,9	8	stark verbr.
4261,6	8	„ „	4098,0	3		3964,9	4	
4259,0	2		4096,5	1		3962,9	5	
4257,6	3		4093,1	2		3960,2	5	
4256,4	4		4091,8	2		3954,7	6	
4255,2	2		4088,4	2		3951,1	2	
4252,7	4		4086,9	1		3950,2	3	
4249,2	2	verbreitert	4084,6	1		3948,3	7	verbreitert
4248,9	5		4083,1	4		3945,2	6	
4237,7	5		4080,7	1		3942,3	8	*
4234,5	6		4078,1	10	* † st. verbr.	3939,6	3	
4232,8	4		4077,0	5		3936,7	5	
4230,1	7		4073,6	4		3931,7	2	
4227,4	8		4069,8	3		3930,3	2	
4225,4	2		4066,7	2		3928,1	6	
4221,6	6		4062,5	2		3925,5	8	stark verbr.
4219,4	1		4061,8	1		3922,0	7	
4218,6	2		4061,0	4		3918,9	7	
4216,8	10	* st. verbr.	4057,9	4		3916,4	5	
4211,8	6		4056,0	1		3914,5	5	*
4206,6	5		4054,5	1		3911,1	1	
4200,8	1	verbreitert	4053,5	4		3909,7	1	

λ	l	Bemerkung	λ	l	Bemerkung	λ	l	Bemerkung
3908,9	2	†	3803,6	4		3690,0	4	
3906,6	4	* verbr.	3801,5	4	*	3689,2	1	
3904,4	2		3797,6	3		3688,5	1	
3903,7	3		3795,8	3		3685,2	6	
3902,1	1		3792,7	1		3680,7	6	*†
3901,6	1		3790,4	3	*† st. verbr.	3665,4	3	
3900,1	5		3788,0	3		3663,3	10	*† st. verbr.
3899,0	4		3787,2	1		3661,4	3	
3897,5	1		3786,3	1		3659,4	1	
3896,3	1		3784,6	1		3656,4	1	
3895,6	1		3783,8	1	s. schwach	3654,9	8	*† „ „
3887,3	3		3782,5	2		3651,9	3	
3883,9	1		3780,8	2		3650,3	10	*† „ „
3882,0	1	undeutlich	3779,7	1		3644,5	5	
3881,1	5		3776,5	3	verschwom.	3642,5	1	
3878,0	1		3774,3	8	verbreitert	3638,5	5	
3875,2	6		3770,7	5	*†	3633,5	3	
3874,3	1		3762,2	1		3632,5	1	
3873,6	2		3759,9	4		3630,3	5	„ „
3870,3	1		3757,3	4		3627,6	1	
3869,3	3		3756,6	1		3623,4	1	sehr scharf
3864,0	1		3755,5	1	verb. nebel.	3620,0	1	
3863,4	1		3752,5	2		3618,6	5	*
3860,4	2	*	3751,8	3	*†	3616,0	2	
3857,5	3		3750,9	3		3613,7	4	*
3856,6	2		3747,5	2		3610,7	1	
3851,2	2		3743,9	1		3609,1	1	
3845,1	6		3742,6	2		3607,9	5	*
3843,2	4		3741,7	1	undeutlich	3604,2	2	*
3842,0	1		3740,7	1	scharf	3594,7	3	*
3840,5	2		3738,9	1	undeutlich	3593,2	3	*
3839,4	4	*	3735,0	2		3590,9	1	*
3837,8	2	verbreitert,	3729,5	5		3577,7	2	*
		wahrsch.	3726,9	1	„	3561,2	5	*†
		doppelt	3726,3	1	„	3549,6	1	
3835,9	1		3724,7	1		3543,7	5	*† verbr.
3834,6	3		3718,0	1		3533,5	2	„
3833,6	1		3715,5	3	verbreitert	3518,0	1	* „
3832,6	2		3712,9	1	„	3500,1	1	
3829,6	2		3711,2	1	„	3494,5	1	* „
3829,4	2		3709,6	3		3473,6	1	*
3826,8	5		3708,2	3		3456,3	1	
3822,7	2		3707,6	1		3451,8	2	*
3820,6	2	*† st. verbr.	3707,0	2		3440,6	1	
3817,7	1		3705,7	3		3437,1	1	
3816,3	4		3704,9	1		3434,7	1	
3814,2	1	verschwom.	3704,6	1		3431,7	2	stark verbr.
3812,7	2	„	3703,4	6		3423,5	1	
3811,5	3		3702,4	3		3414,9	1	
3811,1	1		3701,4	1		3410,0	1	
3810,4	2		3698,6	2		3407,1	1	
3809,0	4		3695,6	1		3396,1	1	
3807,6	4	* st. verbr.	3691,8	3		3390,5	5	*† verbr.

λ	l	Bemerkung	λ	l	Bemerkung	λ	l	Bemerkung
3386,6	1	scharf	2842,0	1	s. undeutl.	2515,2	2	*
—	—	3371,3 *	2835,0	1		2507,2	1	s. schwach
3366,7	2	* † unscharf	2833,5	2	* †	2505,0	1	* †
3351,5	4	* †	2820,0	4	* † verbr.	2499,4	1	
3341,7	6	* †	2806.5	1	*	2492,2	3	* scharf
—	—	3330,9 *	2804,4	1	*	2490,2	1	*
3320,5	1		2803,7	3	* †	2483,9	1	*
3305,2	1	* †	2799,8	1	* †	2482,9	1	
3278,5	2		2791,2	3	*	2482,1	2	* †
3264,3	2	* †	2789,1	1		2478,8	1	* † verschw.
3227,5	2	*	2784,6	1				2478,1 †
3208,7	3	*	2781,0	1				2478,5 *
3207,7	1		2774,7	2	* †	2478,2	1	
—	—	3158,5 *	2767,6	1		2469,5	1	*
3144,6	3	* † et. verbr.	2762,2	2	*	2468,1	2	*
3135,9	1	† versch.	2759,8	2	* †	2464,2	4	* †
—	—	3131,9 †	2752,9	6	* †	2459,6	1	*
3131,8	5	* †	2741,3	1	s. undeutl.	2447,0	2	* †
3125,8	5	* †	2726,5	1	*	2414.3	4	*
3116,5	1		2724,2	1	*	2412,3	1	* †
3107,7	1		2710,4	1	*	2407,6	4	*
3096.0	2		2705,5	1	*	2399,6	2	†
—	—	3095,4 * †	2702,7	2	*	2390,3	1	*
3093,3	1		2699,5	3	†	2380,1	1	s. undeutlich
3090,6	1		2686,7	2	* † verbr.	2378,4	3	* †
3085,4	1	* † s. versch.	2675,2	1	†	2374,1	1	* undeutlich
3051,0	2	* † „	2672,8	1	* †	2369,3	2	*
3038,7	2	* scharf	2664,5	1		2354,3	1	* scharf
3027,6	2	†	2660,6	1	* †	2353,6	1	
3023,7	2	†	2658,6	1	* † undeutl.	2352,6	1	undeutlich
3021,6	3	* †	2655,3	2	* †	2345,4	2	* †
3011,2	1	† s. verbr.	2653,9	2	* †	2341,9	1	*
3007,0	2	* † „	2652.2	3	* †	2340,5	1	*
2972,8	1	scharf	2648,3	1	* †	2339,3	3	*
2967,4	8	* †	2642,7	2	* † verbr.	2335,1	1	* s. undeutl.
2955,3	1		2640,5	1		2327,5	1	„
2953,3	1	verschwom.	2629,0	1	s. undeutl.	2323,1	1	„
2947,5	3	*	2625,7	1		2321,0	1	* „
2942,6	1	undeutlich	2614,8	1		2315,0	1	* verbreitert
2941,3	1	verschwom.	2609,7	2	* †	2301,6	1	†
2939,8	1	2940,8 *	2605,3	2	* †	2296,4	1	*
2935,8	2	*	2603 1	3	*	2292,0	2	* verschwom.
2925,5	7	* †	2598,3	1	s. undeutl.	2284,0	1	
2916,4	3	*	2584,7	2	*	2264,0	2	* st. verbr.
2915,5	1		2576,3	3	* †	2262,2	2	* †
2893,7	7	* †	2575,2	2	*	2260,4	2	* †
2886,8	1	*	2564,1	1	* †	2258,6	1	undeutlich
2882,2	1		2561,4	1		2252,9	2	* †
2873,3	2	* scharf	2558,0	1	*	2244,1	1	*
2865,1	2	* † s. verbr.	2540.4	2	* †	2230,0	2	*
2857,1	4	* †	2536,7	6	* †	2224,7	2	* † st. verbr.
2852,0	1	*	2534,9	3	* †	2191,3	1	*
2847,9	8	* †	2524,8	2	* † verbr.	2150,6	1	*

2. Bandenspectrum des Quecksilberi.

Wenn man durch die Capillare des Geisslerrohres bei sonst gleicher Versuchsanordnung wie oben beschrieben, statt eines Flaschenfunkens den Funken eines kräftigen Inductoriums ohne Leydnerflaschen durchschlagen lässt, so tritt ein wohlausgebildetes Spectrum auf, welches aus einzelnen sehr linienreichen Banden besteht.

Man erhitzt zu diesem Zwecke den retortenartigen Theil des Geisslerrohres (Fig. 1) mittels eines untergestellten Brenners und lässt, sobald das Quecksilber durch die Capillare überzudestilliren beginnt, den Funken eines kräftigen Inductoriums *ohne Leydenerflaschen* durchschlagen. Die Capillare erglänzt bei genügend kräftigem Strome in hellem, grünlichweissem Lichte, welches, mit dem Taschenspectroskop betrachtet, schwache Banden im Indigoblau und Violett erkennen lässt. In der Spectrumphotographie ist das Bandenspectrum ausserordentlich scharf und deutlich sammt allen seinen feinen Linien definirt, wie man es nach dem Anblicke, den es dem Auge gewährt, niemals erwarten sollte.

Sobald man Leydenerflaschen einschaltet, tritt das Bandenspectrum des Quecksilbers entweder gänzlich oder (bei wenigen Flaschen) bis auf einige Reste zurück und an seine Stelle tritt das linienreiche Spectrum, welches wir bereits beschrieben haben.[1]) Schaltet man die Leydenerflaschen aus, so tritt sofort das Bandenspectrum wieder hervor.

Die vorliegenden Messungen geben ein klares Bild über die Beschaffenheit des von uns entdeckten zweiten neuen Quecksilberspectrums, dessen Linienbau nunmehr sichergestellt ist; dasselbe ist als ein Bandenspectrum zu bezeichnen, dessen sämmtliche von uns beobachtete Banden mit einer intensiveren Kante gegen das weniger brechbare Ende zu liegen, während sie

1) Bei Anwendung von Wechselstrom tritt in der Capillare, wenn zahlreiche Flaschen angewandt werden, das linienreichste Quecksilberspectrum auf, während im weiteren Theile unmittelbar hinter der Capillare gleichzeitig das Bandenspectrum sehr schön hervortritt, jedoch sind in diesem Falle dem Bandenspectrum mehr Linien des eigentlichen Linienspectrums beigemengt.

gegen das Ultraviolett allmählich schwächer werden und die Linien weiter auseinanderliegen. Bei langer Belichtung greifen die einzelnen Banden ineinander über. Von denselben liegt die erste im Cyanblau, die zweite und dritte im Indigo, die vierte im Violett am Anfange des Ultraviolett, die fünfte und die folgenden im Ultraviolett. Diese Banden bestehen aus zahlreichen äusserst scharfen Linien, welche häufig zu Triplets geordnet scheinen. In jeder einzelnen dieser Banden lassen sich je *über Hundert* feine Linien erkennen, wir haben die Wellenlänge von mehr als 400 derartiger Linien bestimmt (vgl. Tabelle).

Wir haben es also hier mit keinen verwaschenen continuirlichen Banden zu thun, sondern mit Gruppen, welche aus hunderten von feinen Linien bestehen und den Eindruck canellirter Banden machen. Die weniger brechbare Kante dieser

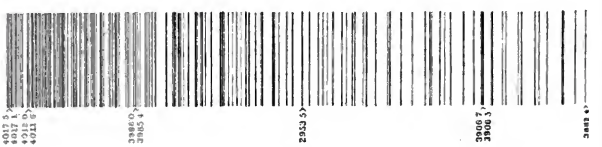


Fig. 2.

Banden besteht meist aus einer Doppellinie, neben welcher sich feine Linien gegen Ultraviolett abschattiren; in knapper Nachbarschaft dieser Kante liegt eine zweite intensivere Kante, welche ihrerseits wieder aus einer Doppellinie besteht und an welche sich nun die zahlreichen anderen feinen Linien anschliessen. Diese beiden einander benachbarten Anfangskanten charakterisiren den Anfang jeder dieser Banden; wir haben diese Kanten mit α und β bezeichnet (vgl. Tabelle). Die untenstehende Fig. 2 zeigt eine dieser Quecksilberbanden zu Beginn des Ultraviolett, deren Kante mit der Doppellinie $\lambda = 4017{,}5$ und 4017,1 beginnt; zur Orientirung haben wir in dieser Figur, welche mittels Photographie nach der Vergrösserung eines unserer Photogramme hergestellt wurde, die Wellenlängen einiger Linien eingetragen. Diese Figur (welche jedoch nicht alle in unserer Tabelle geführten Linien vollständig enthält) gibt eine gute Vorstellung über den Linienbau dieser Banden.

Es machen diese zweifachen, weniger brechbaren Anfangskanten der einzelnen Banden, von welchen die weiteren Liniengruppen sich gegen Ultraviolett abheben, den Eindruck, als ob jede Hauptbande aus zwei ineinander geschobenen benachbarten Nebenbanden gebildet würde.

Zwischen die schattirten Banden lagert sich mehr oder weniger intensiv das Linienspectrum des Quecksilbers, welches im Geisslerrohre bei Inductionsfunken (ohne Flaschen) entsteht und welches sich niemals ganz aus dem Bandenspectrum entfernen lässt. Die Erkennung dieser Linien ist an der Hand unserer Tabelle des Linienspectrums übrigens leicht durchführbar.

Bandenspectrum des Quecksilbers.
(Bezogen auf Rowland's Normalspectrum.)

Eder und Valenta			Eder und Valenta		
Farbe	λ	i	Farbe	λ	i
Grün	Kante α 4517,1	2 [1]	Grün	4474,6	1
	β 4514,3	2		4465,5	3
	4513,0	1		4462,6	1
	4510,5	2		4451,4	2
	4508,7	2		4448,8	1 [4]
	4505,2	2		4434,8	1 [5]
	4502,5	2 [2]		4433,4	1
	4497,9	2	Indigo	Kante α 4396,3	3 [6]
	4495,4	1		4395,0	3
	4493,4	1 [3]		β 4393,2	4
	4489,3	3		" 4392,6	3
	4487,2	3		4391,5	2
	4484,9	1		4390,4	3
	4478,8	3		4389,4	3
	4477,0	3		4388,1	3

1) Erste Quecksilkerbande; Anfangskante der gegen das stärker brechbare Ende abschattirten canellirten Bande. — Dieselbe ist von sämmtlichen Quecksilberbanden die am wenigsten vollkommen entwickelte und gibt kein deutliches Bild des Baues derselben.

2) Vielleicht doppelt.

3) Sehr schwach.

4) Vielleicht doppelt.

5) Sehr schwach.

6) Durchwegs feine, scharfe Linien. — Die starke Doppellinie blieb die Anfangskante der *zweiten Bande*, daneben tritt gewissermaassen als Kante eines eingelagerten, stärkeren und ausgedehnteren Nebenbandes die Doppellinie 4393 und 4392 auf.

Eder und Valenta			Eder und Valeuta		
Farbe	λ	i	Farbe	λ	i
Indigo	4386,5	4	Indigo	4332,0	1
	4385,2	3		4330,6	2
	4384,4	3		4330,1	2
	4382,8	2		4328,7	3
	4382,0	2		4326,4	1
	4381,3	3		4321,1	1
	4380,0	2		4319,6	1
	4378,3	2		4318,0	2
	4378,0	2		4317,6	2
	4376,2	2		4315,2	1
	4374,9	1		4308,3	1
	4374,5	1		4307,3	1
	[4372,6	3] [1]		4305,6	3
	4370,6	2		4303,2	1
	4369,4	1		4294,8	2
	4369,1	1		4292,4	2
	4368,3	1		4291,2	2
	4366,1	3		4289,8	1
	4364,0	2		4282,3	1
	[4358,6	10] [2]		4278,1	2
	4353,2	2		4275,3	1
	4352,6	2		4266,5	1
	4350,0	3		4262,9	1
	[4347,7	10] [3]		4260,6	1
	4344,0	2		4250,7	1
	4343,1	2		4246,1	1
	4340,6	3		4243,6	1
	[4339,5	10] [4]		4233,8	1 [6]
	4338,4	1 [5]	Violett	Kante α 4218,9	3 [7]
	4336,8	2		4218,3	3
	4332,8	1		4218,0	1

1) Ist eine dem Linienspectrum des Hg zukommende Linie, welche sich dem Bandenspectrum beigesellt.

2) Sehr verbreitert; Hauptlinie des Linienspectrums; verdeckt wahrscheinlich einige feine Linien des Bandenspectrums.

3) Sehr verbreiterte Hauptlinie des Linienspectrums; wie vorhin.

4) Verbreiterte, sehr starke Linie; Hauptlinie des Linienspectrums des Hg.

5) Vielleicht doppelt?

6) Es folgen noch zahlreiche, sehr schwache Linien, welche sich bis zum Beginn der nächsten (dritten) Quecksilberbande erstrecken.

7) Diese Doppellinie bildet die Anfangskante der dritten Quecksilberbande; ihr folgen mehrere feine Linien, dann beginnt mit einer kräftigen Doppellinie (4214, 4213) ein neues, unmittelbar darangelagertes Nebenband. Das ganze dritte Hauptband (das lichtstärkste der Quecksilberbanden) ist gegen das brechbare Ende abschattirt (cannellirt), im selben Sinne, wie alle fünf Hg-Banden.

Eder und Valenta				Eder und Valenta		
Farbe		λ	i	Farbe	λ	i
Violett		4217,6	2	Violett	4172,0	2
		4216,8	1		4170,0	3
		4215,9	1		4169,1	1
		4215,0	1		4167,8	3
	Kante β	4214,1	4		4167,2	1
		4213,8	4		4166,2	2
		4212,9	5		4164,9	3 [3]
		4212,1	1		4164,1	1
		4211,2	4 [1]		4162,1	3
		4210,2	1		4160,0	3
		4209,1	3		4157,9	2
		4208,7	2		4156,7	4
		4207,6	2		4155,0	1
		4207,2	2		4153,9	3
		4206,7	1		4152,0	4
		4206,3	3		4149,0	1
		4204,5	2 [2]		4148,4	3
		4204,7	2		4145,2	1
		4203,5	1		4144,6	1
		4202,8	1		4143,3	4
		4201,9	2		4142,4	1
		4201,3	2		4139,4	4
		4199,8	1		4139,1	3
		4198,6	1		4138,4	1 [4]
		4197,6	1		4134,6	3
		4197,0	3		4133,7	3
		4195,2	1		4129,9	2
		4194,4	2		4129,5	2
		4192,8	1		4128,8	2
		4192,3	1		4124,0	2
		4191,6	2		4123,8	2
		4190,3	1		4123,3	2
		4189,1	2		4121,7	1
		4187,1	4		4119,6	2
		4185,9	2		4118,9	2
		4185,1	2		4117,5	1
		4183,6	3		4113,3	2
		4181,3	3		4112,8	1
		4181,0	1		4109,8	1
		4180,2	1		4109,0	1
		4179,7	2		4108,2	4
		4178,8	2		4105,2	1
		4177,2	3		4101,9	3
		4175,0	4		4101,6	2
		4173,9	2		4100,6	2
		4172,5	3		4097,8	1

1) Vielleicht doppelt?
2) Ist wahrscheinlich doppelt.
3) Verbreitert, wahrscheinlich doppelt.
4) Sehr schwach.

Eder und Valenta			Eder und Valenta		
Farbe	λ	i	Farbe	λ	i
Violett	4096,7	1	Violett	4035,1	2
	4096,2	1 [1])		4034,6	1
	4091,8	1		4034,2	1
	4089,9	3		4032,8	1
	4087,3	2		4031,6	1
	4085,5	2		4030,8	1
	4084,5	2		4029,8	2
	4079,5	1		4027,8	1
	4079,0	2		4026,8	1
	[4078,1	8] [2])		4026,2	1
	4077,1	3		4025,4	1
	4076,6	2		4024,2	1
	4075,5	1		4022,2	1
	4073,0	2		4020,4	1
	4071,7	2		4020,2	1
	4063,9	2		4018,8	1 [5])
	4062,0	1	Kante α	4017,5	4 [6])
	4059,6	1		4017,1	4
	4058,4	2		4016,2	2 [7])
	[4057,9	3] [3])	Ultraviolett	4015,1	3
	4050,7	1		4014,9	1
	4049,8	2		4013,5	2
	4049,0	1		4013,2	1
	4048,1	1	Kante β	4012,0	4 [8])
	4047,6	8		4011,6	4
	[4046,8	10] [4])		4010,8	3
	4044,5	3		4010.6	3
	4042,0	1		4009,8	3
	4040,6	1		4009,2	1
	4038,7	1		4008,6	3
	4037,1	1		4008,0	2

1) Sehr schwach.

2) Starke Linie des Linienspectrums Hg, welche auch im Bandenspectrum auftritt.

3) Scharfe Linie des Linienspectrums von Hg, welche sich dem Bandenspectrum beigesellt.

4) Verbreiterte Hauptlinie des Linienspectrums.

5) Es folgen hier noch zahlreiche feine, schwache Linien, welche (immer schwächer werdend) den Raum bis zur Anfangskante der folgenden Bande erfüllen.

6) Mit nebenstehender starker Doppellinie beginnt die Kante der vierten Quecksilberbande.

7) Wahrscheinlich doppelt.

8) Mit dieser Doppellinie beginnt im Innern der vierten Hauptbande eine neue Kante eines abschattirten Nebenbandes, analog den anderen Banden.

Eder und Valenta			Eder und Valenta		
Farbe	λ	i	Farbe	λ	i
Ultraviolett	4007,1	3	Ultraviolett	3963,8	3
	4006,3	1		3962,8	2
	4006,1	1		3962,0	2
	4005,2	6		3960,9	1
	4004,4	2		3959,6	4
	4003,9	2		3958,9	3
	4003,1	7		3957,4	8
	4001,8	3		3956,1	1
	4000,9	2		3955,7	2
	4000,4	4		2953,5	4
	3999,7	2 [1]		3952,3	2
	3998,9	2		3950,6	2
	3997,3	5		3949,0	3
	3996,1	1		3946,7	3
	3995,6	3		3945,2	3
	3994,0	4		3943,0	2
	3993,9	4		3941,1	2
	3991,8	5		3941,0	1
	3990,9	1		3939,6	3
	3990,1			3938,5	2
	3989,9	4		3936,7	1
	3987,6	3		3935,1	2
	3987,3	3		3934,6	2
	3986,0	4		3932,7	1
	3985,4	4		3931,9	3
	3983,3	3		3929,9	2
	3982,4	3		3926,9	2
	3981,5	4		3923,9	3
	3980,6	3		3921,8	3
	3980,3	3		3918,9	2
	3978,4	3		3918,1	2
	3976,9	2		3917,6	1
	3976,6	3		3915,8	3
	3975,4	2		3914,6	1
	3875,0	2		3913,2	2
	3974,2	1		3910,3	2
	3973,1	3		3908,4	1
	3971,2	5		3906,7	3
	3970,7	1		[3906,6	5] [2]
	3970,1	1		3904,3	1
	3969,7	3		3902,2	1
	3969,1	2		3901,5	2
	3967,8	3		3898,5	1
	3965,7	4		3897,7	3
	3965,4	4		3895,0	2

1) Wahrscheinlich doppelt.

2) Scharfe Linie des Linienspectrums des Quecksilbers, welche auch im Bandenspectrum auftritt.

Eder und Valenta			Eder und Valenta		
Farbe	λ	i	Farbe	λ	i
Ultraviolett	3894,0	1	Ultraviolett	3715,9	1 [5]
	3892,1	2		3715,2	3
	3888,1	3		3714,2	1
	3887,8	1		3713,2	3
	3885,1	1		3712,0	2
	3882,4	2		3711,0	3
	3878,0	2		3709,4	1
	3876,6	1		3708,7	1
	3875,1	2		3708,4	1
	3872,4	2		3706,9	1
	3870,7	1		3706,4	1
	3967,6	3		3706,0	1
	3864,7	2		3705,5	1
	3861,7	1		3703,1	1
	3856,6	2		3702,6	1
	3853,8	1		3700,6	1
	3852,2	1		3699,7	1
	3850,9	1		3698,8	1
	3845,2	1		3697,1	1
	3833,2	1		3696,1	1
	3830,7	1 [1]		3695,3	1
	3820,6	1		3694,8	1
	3807,3	1		3694,5	1
Kante α	3728,6	2 [2]		3693,2	1
	3728,0	1		3692,3	1
	3726,2	3		3690,7	1
	3725,1	1		3689,2	1
	3723,6	1		3688,2	1
	3722,6	2		3686,3	1
	3722,3	1		3686,1	1
Kante β	3721,4	3		3684,1	1
	3721,1	1 [3]		3681,6	1
	3720,4	1 [4]		4680,7	1
	3719,6	3		3679,8	1
	3718,3	3		3676,6	1
	3717,0	3		3676,0	1

1) Es folgen hier noch zahlreiche schwache, kaum ausmessbare Linien, dann eine andere, sehr schwache Bande (analog gebaut wie die anderen), welche wir nicht ausmaassen.

2) Anfangskante der fünften Quecksilberbande. Der Bau der canellirten Bande ist analog dem vorigen.

3) Undeutlich.

4) Undeutlich.

5) Wahrscheinlich doppelt.

Eder und Valenta			Eder und Valenta		
Farbe	λ	i	Farbe	λ	i
Ultra-violett	3675,1	1	Ultra-violett	Kante α 3500,1	[2]
	3671,1	1		„ β 3495,0	
	3670,6	1		„ α 3274,5	[3]
	3669,9	1 [1]		„ β 3268,1	

Rückschluss auf die Natur von Banden- und Linienspectren der Elemente im allgemeinen.

Die von uns gemachten Beobachtungen gestatten einen Rückschluss auf die Natur der Banden- und Linienspectren der Elemente im allgemeinen, über welche mannigfache Anschauungen geäussert wurden.

Plücker und Hittorf[4]) fanden in ihrer berühmten Abhandlung über die Spectren der Gase:

1) dass die Spectren von Stickstoff, Wasserstoff und anderen Gasen eine Veränderung erleiden, wenn die Intensität der electrischen Entladung sich ändert; sie fanden, dass bei electrischen Entladungen geringerer Spannungen ein *„Bandenspectrum"* oder wie sie es nannten *„Spectrum 1. Ordnung"* entstehe; dagegen bei Erhöhung der Temperatur ein *„Linienspectrum"* auftritt — *„Spectrum 2. Ordnung"*. Als Erklärung für diese Erscheinung nahmen sie an, dass z. B. Stickstoff ähnlich wie Sauerstoff in verschiedenen allotropischen Modificationen existire und dass durch Aenderungen in der Intensität der Entladung Aenderungen in diesen allotropen Zuständen hervorgerufen werden.[5])

Angström schloss sich später der Idee Plücker und

1) Es folgen noch zahlreiche, schwache, unmessbare Linien.

2) Anfangskanten der sechsten Quecksilberbande (mittels des Quarzspectographen erhalten).

3) Anfangskanten der siebenten Quecksilberbande, welche beiden denselben Charakter wie die vorhergehenden Banden haben und aus zahlreichen Linien bestehen. — Daran schliessen sich noch zahlreiche feine Linien an, welche weniger regelmässig zu sein scheinen. — Das ganze ultraviolette *Bandenspectrum* des Hg ist mit den Linien des einfachsten Quecksilber-*Linienspectrum*, wie es in Geisslerröhren bei geringem Druck und Inductionsfunken (ohne Flaschen) auftritt, durchsetzt.

4) Plücker u. Hittorf, Phil. Trans. 1885.

5) Vgl. Roscoë, Spectralanalyse. 3. Aufl. p. 120. 1890.

Hittorf's an[1]) und stellte die Hypothese auf, dass, wenn das Gas verschiedene Spectren zeige, dies daher rühre, dass die Atome des Gases Verbindungen zu verschiedenen Molecülen eingehen und diese gewissermaassen allotropen Verbindungen ihre eigenen Spectren haben können, wenn sie, ohne in ihre Atome zu zerfallen, zum Glühen gebracht werden.

Später führte Lockyer[2]) weiter aus, dass die Gase, so lange ihre Molecüle aus mehreren Atomen bestehen, Bandenspectren zeigen sollen, dagegen, wenn mit steigender Temperatur die Molecüle zu Atomen zerfallen, Linienspectren geben müssen. Diese Anschauung wurde seither ziemlich allgemein acceptirt.[3]) Auch Kayser schreibt die Bandenspectren den Molecülen, sowohl von Elementen, als auch von Verbindungen zu, während er die Linienspectren durch die Schwingungen der einzelnen Atome (welche durch Dissociation der Molecüle entstehen) erklärt. Gegen diese Anschauung wendet sich insbesonders Wüllner. Derselbe sagt: Die allmähliche Entwicklung der Bandenspectren der Gase (*Stickstoff, Sauerstoff*) aus dem Linienspectrum sei ein Beweis dafür, dass ein so qualitativer Unterschied zwischen den Plücker-Hittorff'schen[4]) Spectren erster und zweiter Ordnung nicht vorhanden ist, wie die Auffassung, dass das eine Spectrum dem Molecüle, das andere dem Atome (wie sie durch Zerreissung der Molecüle entstehen) entspricht, es verlangt.[5]) Wüllner hält die Linien der sogenannten Linienspectren nur für Theile der vollständigen Spectren der betreffenden Gase, welch letztere sich zeigen, wenn man hinreichend tiefe Schichten der Gase auf die zur Hervorrufung der Linien erforderliche Temperatur bringt. Später modificirte Wüllner[6]) seine Ansicht dahin, „dass zunächst bei niedriger

1) Hittorf, Pogg. Ann. Jubelbd.; Wüllner, Experimentalphys. 4. Aufl. II. p. 300. 1883.

2) Lockyer, Proc. of Lond. Roy. Soc. XXI; auch Wüllner, Experimentalphys. p. 300.

3) Vgl. Ostwald, Lehrb. d. allg. Chemie. 1. 2. Aufl. p. 259 u. 261.

4) Plücker u. Hittorf, Lehrb. d. Spectralanalyse. p. 98. 1883.

5) H. Wüllner, Ueber den allmählichen Uebergang der Gasspectren in ihre verschiedenen Formen. Sitzungsb. d. königl. preuss. Akad. d. Wiss. Berlin (25. Juli) 1889.

6) Die allmähliche Entwicklung des Wasserstoffspectrums. Desgl. (12. Dec.) 1889.

Temperatur, bei welcher die Moleküle mit geringer Geschwindigkeit aneinander prallen, die materiellen und die Aethertheilchen der einzelnen Atome des Moleküles in schwingende Bewegung gerathen und durch diese Schwingungen das Bandenspectrum liefern. Erst wenn die Temperatur eine erheblich höhere geworden ist, die Moleküle also mit erheblich grösserer Geschwindigkeit aneinander fliegen, gerathen die Complexe, die wir als Atome im Molekül ansehen, gegen einander in Schwingung, und diese Schwingungen geben die Linien des Linienspectrums" . . .

. . . „Ganz besonders steht mit dieser Auffassung im Einklange, dass die verschiedenen Linien mit steigender Temperatur erst nach und nach sichtbar werden. Im Linienspectrum sieht man zuerst die Wellenlängen, für welche das Emissionsvermögen den grössten Werth hat, erst wenn die Stösse stärker werden, erhalten die den übrigen Wellenlängen entsprechenden Schwingungen eine hinreichende Amplitude, um wahrgenommen zu werden. Die Stösse müssen um so stärker werden, je geringer das Emissionsvermögen für die betreffenden Schwingungen ist; dass dasselbe z. B. (beim Wasserstoff) für H_1 und H_2 am geringsten ist, soll ja nichts anderes ausdrücken, als die Thatsache, dass H_1 und H_2 niemals die Helligkeit von H_α und besonders von H_β erhalten".[1]) „Mit der Auffassung, dass das Bandenspectrum und das Linienspectrum des Wasserstoffes einem verschiedenen Bau des strahlenden Moleküles zuzuschreiben sind, vermag ich die Beobachtungen (bei *H*, *N* und *O*) nicht zu vereinigen."

W. Ostwald[2]) bemerkt zu den verschiedenen Annahmen über die Ursache der mehrfachen Spectren der Gase: „Es scheint näherliegend, von einer Formveränderung der ponderablen Masse der Atome ganz abzusehen und die Entstehung der Linienspectren den Schwingungen des Aethers, um seine

1) Um Missverständnissen vorzubeugen sei erwähnt, dass bei vielen Elementen das „Emissionsvermögen" für gewisse Schwingungen nicht constant ist, sondern schwache Linien mit steigender Temperatur zu Hauptlinien werden und umgekehrt, wofür es viele Beispiele (Zn, Pb Sn, Tl etc.) giebt, wie wir für Cadmium erst kürzlich ausführlich beschrieben haben. Eder und Valenta.

2) Ostwald, Lehrbuch d. allgem. Chemie. 2. Aufl. p. 262. 1891.

durch die ponderable Masse des Atomes bestimmte Gleichgewichtslage allein zuzuschreiben. Die Unabhängigkeit der Wellenlänge von der Amplitude ist dann leicht zu verstehen." Dazu ist indessen zu bemerken (wie Ostwald a. a. O. hervorhebt), dass nach Wiedemann[1]) die Annahme, der Aether sei der Träger des „Leuchtenergieinhaltes", mit den aus den Voraussetzungen der kinetischen Gastheorie folgenden Vorstellungen über die Mechanik des Leuchtens sich nicht wohl in Uebereinstimmung bringen lässt. Anderseits aber hat H. Ebert[2]) gezeigt, dass auch in anderer Weise die Anschauungen der kinetischen Gastheorie mit den spectroskopischen Thatsachen in Widerspruch kommen. Somit muss man, wie Ostwald ausführt, entweder die gemachten Voraussetzungen der kinetischen Gastheorie aufgeben, oder man muss annehmen, dass das Leuchten nicht von bewegten Molekülen ausgeht, sondern nur im Momente des Zusammenstosses stattfindet. Es stimmen somit die Ansichten über die Natur des Linien- und Bandenspectrums, sowie über variable Spectren eines und desselben Elementes bei verschiedenen Temperaturdruck- und electrischen Entladungsverhältnissen nicht überein.

Deshalb erscheint uns das genauere Studium von Spectralerscheinungen solcher Elemente von Interesse, deren Spectren unter verschiedenen Verhältnissen deutliche Verschiedenheiten zeigen und deren Dampf *nicht aus Molekülen*, sondern *nur aus Atomen besteht.* Solche Elemente sind eben Cadmium und Quecksilber; in ihrem Dampfe hat man es nach den bisher herrschenden Anschauungen nur mit Atomen zu thun, während Sauerstoff, Stickstoff, Wasserstoff, Schwefel und die anderen Elemente, bei welchen bisher Bandenspectren beobachtet wurden, in Dampfform nicht aus freien Atomen, sondern aus Molekülen bestehen. Es liegen aber beim Cadmium sehr bemerkenswerthe Verschiedenheiten im Bogen- und Funkenspectrum vor,[3]) welche wir in einer früheren Abhand-

1) Wiedemann, Wied. Ann. **37.** p. 179. 1889.

2) Ebert, Wied. Ann. **36.** p. 466. 1889. — Ostwald l. c.

3) Es zeigen bekanntlich noch viele Elemente ähnliche Erscheinungen, z. B. Zn, Pb, Al, Sn u. a., aber in diesen Fällen muss man annehmen, dass deren Moleküle aus mehreren Atomen bestehen.

lung[1]) genau klarlegten und bei denen man nicht zur Erklärung greifen kann, dass in dem einen Falle das Molekül, in dem anderen das Atom in Anspruch genommen wird, weil der Dampf des Cadmiums aus Atomen besteht, indem das Molekulargewicht gleich dem Atomgewichte ist. Beim Cadmium liegen wohl nur Linienspectren (Plücker'sche Spectren II. Ordnung) vor, bei welchen entsprechend der steigenden Temperatur neue Liniengruppen auftauchen (respective heller werden) und andere verschwinden; ein Bandenspectrum des Cadmiums konnten wir bis jetzt nicht erhalten. Der von uns erbrachte Nachweis, dass dem Quecksilber verschiedene Linienspectren und ein von diesen vollkommen verschiedenes Bandenspectrum zukommt, gewährt aber einen tieferen Einblick in das Wesen der Spectren, weil wir es hier mit Spectren erster und zweiter Ordnung im Sinne Plückers zu thun haben. Anderseits ist die Annahme herrschend, dass der Quecksilberdampf nicht aus Molekülen, sondern aus einzelnen Atomen bestehe.[2]) Damit stimmen sowohl Dampfdichtebestimmungen, als auch Kundt's und Warburg's Versuche überein, welche zeigten (bei Studien über die Schallgeschwindigkeit im Quecksilberdampfe), dass die Moleküle dieses Dampfes keine innere Bewegung haben, also auch nicht aus mehreren Atomen bestehen können.[3])

Betrachten wir die spectroskopisch festgestellten Thatsachen und vergleichen wir sie mit den verschiedenen Anschauungen über das Wesen der Linien- und Bandenspectren, so ergiebt sich Folgendes:

Dem Quecksilberdampfe kommt ein Linienspectrum zu, welches im galvanischen Lichtbogen und im Geisslerrohre unter der Einwirkung des Inductionsfunkens ohne Flaschen die wenigsten Linien aufweist, jedoch sind die beiden Spectren nicht identisch, wie oben ausführlich erörtert wurde; besser entwickelt, d. h. linienreicher ist das Funkenspectrum des Quecksilbers (im Flaschenfunken zwischen Quecksilberelek-

1) Eder und Valenta, Ueber das Spectrum des Kaliums, Natriums und Cadmiums bei verschiedenen Temperaturen (Denkschriften der kais. Akad. d. Wissensch. in Wien. Mathem.-naturw. Cl. 1894).

2) Vgl. Ostwald, Lehrbuch d. allgem. Chemie.

3) Graham-Otto, Lehrb. d. organ. Chemie. 2. 5. Aufl. I. Abth. p. 77. Einleitung. 1879.

troden), das linienreichste Spectrum (am vollkommensten ausgebildetes Linienspectrum) wird aber erhalten, wenn man den Flaschenfunken durch Geisslerrohre, deren Capillare von Quecksilberdämpfen durchströmt wird, schlagen lässt. Von diesem variablen Linienspectrum, *im Charakter vollkommen verschieden*, ist das Bandenspectrum des Quecksilbers, *welches keineswegs als ein besser oder schlechter entwickeltes Linienspectrum des Quecksilbers anzusehen ist;* obwohl demselben stets die einfachsten Linien, welche im Linienspectrum des Quecksilberdampfes im Vacuum sich zeigen, beigemengt sind, treten doch keine von den anderen Quecksilberlinien hervor, welche im Flaschenfunken an der Luft oder im galvanischen Lichtbogen stets auftreten.

Es liegt wohl nahe, zur Erklärung des Entstehungsgrundes der Quecksilberspectren erster und zweiter Ordnung, die jeweilig herrschenden Temperaturen nebst Druckverhältnissen heranzuziehen. Ohne Zweifel kommt das Bandenspectrum einer niedrigeren Temperatur zu.[1]) Nicht nur die Temperatur spielt beim Auftreten der verschiedenen Quecksilberspectren eine Hauptrolle, sondern selbstverständlich auch der im Geisslerrohre herrschende Gasdruck, vielleicht ist auch die Art der electrischen Erregung von Einfluss, welchen die Durchführung einer Destillation von Quecksilber durch die Capillare und Condensation im weiten rückwärtigen Theile des Rohres auf die Entwicklung des Linien- und Bandenspectrums nimmt; es wird das Entstehen dieser Spectren durch diese Umstände nur sehr begünstigt, jedoch nicht ausschliesslich bedingt.

Das Linien- sowohl wie das Bandenspectrum wurden von uns nach einander in derselben Röhre mit longitudinaler Aufsicht erhalten, bei derselben Dicke der leuchtenden Schichte von 10 cm Länge (im Capillarrohre[2]); *es hat somit die Dicke*

1) Dafür spricht die Thatsache, dass das Bandenspectrum unter gewissen Umständen im weiten Theile der Röhren auftritt, wenn Flaschenfunken verwendet werden, in der Capillare aber am leichtesten dann zu Stande kommt, wenn der Funke ohne Flaschen zur Verwendung gelangt, sowie der Umstand, dass das Bandenspectrum sich weniger weit ins Ultraviolett erstreckt als das Linienspectrum.

2) Auch gibt die Photographie der *Seitenansicht* der Röhre je nach den Versuchsbedingungen bald das Linien-, bald das Bandenspectrum.

der Schichte unter den gegebenen Verhältnissen keinen entscheidenden Einfluss auf das Auftreten des Banden- oder Linienspectrums, wie mitunter angenommen wird (z. B. von Wüllner, vgl. oben).

Wir können somit in unseren experimentellen Beobachtungen keine Bestätigung der Annahme finden, dass Banden- und Linienspectren verschieden vollkommene Entwickelungsstadien ein und desselben Hauptspectrums vorstellen, denn wir haben gesehen, dass das Linienspectrum des Quecksilbers sich in verschiedenen schwankenden Entwickelungsstadien zu einem vollkommenen, sehr linienreichen Spectrum ausbildet, welches vom Bandenspectrum gänzlich verschieden ist. Da somit dem Quecksilber unter sich qualitativ vollkommen verschiedene Linien- und Bandenspectren zukommen und ferner zur Erklärung dieser Erscheinung die Annahme von Molekularvibrationen einerseits, neben Atomvibrationen anderseits in unserem Falle nicht herangezogen werden kann, so liefert diese letztere, von anderer Seite gemachte Annahme (s. oben), jedenfalls keine allgemein giltige Erklärung für das Auftreten der sogenannten Spectren erster und zweiter Ordnung.[1]) Es erscheint uns somit folgerichtiger, diese Annahme überhaupt nicht zur Erklärung der Banden- und Linienspectren der Elemente heranzuziehen.

Am besten dürfte Ostwald's Anschauung mit den vorliegenden Beobachtungen übereinstimmen.

Diese Ausführungen haben zur Voraussetzung, dass gemäss der herrschenden Anschauung das Molekulargewicht des Quecksilbers gleich dem Atomgewichte ist.

Vergleicht man schliesslich in unseren Tabellen jene Linien des Quecksilberspectrums, welche in allen Formen des Linienspectrums auftreten und sogar, wenn auch in beschränkter Anzahl, als untrennbare Begleiter des Bandenspectrums auftauchen, so drängt sich die Anschauung auf, dass diesen Linien eine besondere Bedeutung zukommen müsse. Es entsprechen diese Linien den sogenannten *„basischen Linien"* Lockyer's.

1) Wir sprachen hier nur von den Spectren der Elemente. Dass bei den Bandenspectren von *Verbindungen* die molecularen Vibrationen und eventuell die intermolecularen Vorgänge eine grosse Rolle spielen, soll damit keineswegs angezweifelt werden. Eder und Valenta.

Ferner ist die Erscheinung des ziemlich unvermittelten Aufblitzens des linienreichsten Spectrums bei hochgradig gesteigerter Stärke des Flaschenfunkens und gleichzeitigem Erhitzen der Capillare, besonders das Auftauchen zahlreicher neuer Hauptlinien, welche früher nicht oder kaum sichtbar waren, und mancher Doppellinien an Stelle von einfachen Linien, eine derartige, dass sie zu Lockyer's Theorie der Dissociation der Elemente passen würde, wenn man überhaupt die Zerlegbarkeit unserer Elemente in die Discussion ziehen will.

5. *Ueber den axialen Charakter der Magnetkraftlinien, ein Schluss aus der Existenz des Hall'schen Phänomens;* von *Franz Koláček.*

(Aus den Sitzungsber. der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. Math.-naturw. Klasse. 1894; vorgelegt vom Hrn. Verf.)

Bekanntermaassen hat Maxwell zwischen den zeitlichen Aenderungen der electrischen und magnetischen Kräfte und den Kräften selbst gewisse Beziehungen festgestellt, welche zum Schlusse führen, dass sich die genannten Energien mit endlicher Geschwindigkeit im Raume fortpflanzen. Für isolirende Stoffe (Dielectrica) sind diese theoretischen Schlussfolgerungen durch Hertz und andere Forscher in ausreichender Weise bestätigt worden. Die erwähnten Beziehungen haben folgenden Charakter:

Aendern sich die Kräfte einer Art (etwa die dielectrischen), so werden in der Aequatorialebene der Kraftrichtung Kräfte der anderen Art geweckt (in diesem Falle magnetische), welche sich der ersten Kraftrichtung so zuordnen, wie eine Wirbelbewegung zu ihrer Axe. Dabei ist der Arbeitswerth der geweckten Kräfte längs einer (kleinen) geschlossenen Linie bis auf einen vom Stoffe abhängigen Factor identisch mit dem Producte aus der umschriebenen Fläche und der Aenderungsgeschwindigkeit der primären Kraft.

Diese Beziehungen sind in vollkommen isolirenden isotropen Substanzen vollkommen reciprok. Die Parität oder Gleichwerthigkeit der Kräfte magnetischer und electrischer Art besteht jedoch nicht mehr in leitenden Stoffen und auch nicht in dem Falle, wo die Stärke der Kräfte in isolirenden Stoffen ein gewisses Maass überschreitet. Ist das electrostatische Feld hinlänglich stark, so findet ein Ausgleich in einem electrischen Funken statt; für die Existenz eines *magnetischen* Funkens ist jedoch trotz der grossen schon errichteten Feldstärken durchaus kein Anzeichen vorhanden. Zwischen den Kräften beiderlei Art bestehen demnach trotz der Maxwell-Hertz'schen Gleichungen wesentliche Unterschiede, mit denen

jede künftige Theorie rechnen muss, welche den tieferliegenden ursächlichen Zusammenhang beider Energiearten aufklären wollte. Neue Theorien[1]) gehen dabei von der Vorstellung aus, dass den magnetischen Erscheinungen in sich zurücklaufende Bewegungen um die sogenannte Magnetkraftlinie als Axe zu Grunde liegen. Man hat hierfür einige Anhaltspunkte. Bekanntermaassen hat schon Ampère den polaren Ursprung der magnetischen Kräfte geleugnet, und an die Stelle der magnetischen Massen Molecularströme gesetzt.

Zu einer ähnlichen Anschauung drängt ein Schluss, den Sir William Thomson aus der Thatsache der magnetischen Drehung der Polarisationsebene[2]) gezogen hat. Fasst man mit Fresnel den sich hier abspielenden Lichtvorgang als kinematisches Ergebniss der verschiedenen Geschwindigkeiten der links und rechts circularen Wellen auf, so ist es sehr wahrscheinlich, dass sich die nächstliegende Ursache dieser Verschiedenheit, die magnetische Kraft, an diesem Vorgange nur vermittels einer Eigenschaft betheiligen kann, die mit den Umlaufsrichtungen der Aethermolecüle gleiche oder entgegengesetzte Richtung besitzt. Die Beweiskräftigkeit des Thomson'schen Schlusses ist offenbar an gewisse optische Vorstellungen gebunden. Gelegentlich einer vor einigen Jahren angestellten Wiederholung des Hall'schen Versuches drängte sich mir eine Schlussfolgerung auf, die es zur Gewissheit macht, dass eine Magnetkraftlinie keine Richtung, sondern eine Axe ist. Mit Bezug auf das Interesse, welches diese Frage gegenwärtig in Anspruch nimmt, sei mir an dieser Stelle die Mittheilung derselben gestattet.

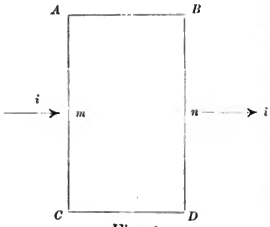


Fig. 1.

Es sei (Fig. 1) $ABCD$ ein dünnes Goldblatt, welches in der Richtung AC von einem constanten Strom J gleichmässig

1) Man vgl. beispielsweise Ebert, Wied. Ann. **51**, 1894; Richarz, Münch. Sitzungsber. 1894.

2) Sir W. Thomson, Proc. Roy. Soc. 1856. Man vgl. auch Maxwell, Treatise (1) **2**. p. 415.

durchsetzt wird. Zwei Punkte $m\,n$ seien mit einem sehr empfindlichen Galvanometer verbunden und so gewählt, dass keine Ablenkung stattfindet. Erzeugt man nun in der nächsten Nähe des Goldblattes ein starkes, etwa homogenes magnetisches Feld, dessen Richtung zur Goldblattebene normal ist, so entsteht im Galvanometer ein dauernder Ausschlag, der sich dem Sinne nach umkehrt, wenn entweder der primäre Strom J oder die Richtung des Magnetfeldes umgekehrt wird. Diesen „Hall"-strom nennen wir i.

Wir werden zeigen, dass seine Existenz blos mit einem axialen Charakter der Magnetkraftlinien verträglich ist.

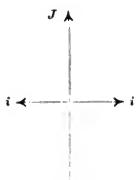


Fig. 2.

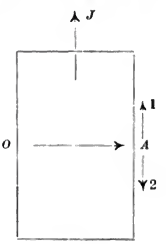


Fig. 3.

Der Kürze wegen nennen wir einen Vector Richtung, wenn sich längs desselben etwas vollzieht; geschieht etwas um seine Richtung herum, so nennen wir ihn Axe. Ein galvanischer Strom ist eine Axe, wenn wir den Fall des electrostatischen Potentials längs des Drahtes in Betracht ziehen, jedoch eine Axe mit Bezug auf das ihn begleitende Magnetfeld. Mit Bezug auf das Hall'sche Phänomen gibt es nun folgende Möglichkeiten.

A) Beide Ströme, d. h. der primäre Strom J und der „Hallstrom" i, sind „Richtungen". Errichte ich nun senkrecht zur Goldblattebene eine magnetische Kraftlinie und ist diese gleichfalls eine „Richtung", so ist ein Halleffect unmöglich. Denn aus Symmetriegründen sind die beiden einander entgegengesetzten Richtungen (i) des Halleffectes (Fig. 2) gleichberechtigt.

B) Sind beide Ströme Axen, so ist der Primärstrom J durch etwas charakterisirt, was auf der Vorderfläche des Blattes etwa in der Richtung $O\,A$ vor sich geht (Fig. 3). Ist die

magnetische Kraftlinie wieder **nur** eine Richtung, so sind die Richtungen 1 und 2, welche diesmal den Secundärstrom, der ja auch eine Axe sein soll, bestimmen, gleichwerthig; der Halleffect ist also wieder unmöglich. Man kann auch folgendermaassen schliessen.

C) Besitzt der Strom in Bezug auf seine verschiedenen Qualitäten die Eigenschaften einer Richtung und Axe zugleich, so findet für den Fall, dass ich die magnetische Kraftlinie, die eine Richtung sein soll, umkehre, aus Symmetriegründen keine Umkehrung des Hallstromes statt, was der Erfahrung widerspricht.

Diese Widersprüche verschwinden, falls die Magnetkraftlinie eine Axe ist. Dasjenige, was im Goldblatte infolge dieser Annahme als Merkmal des magnetischen Zustandes etwa an der Verbindungslinie $m\,n$ vor sich geht, kann der Richtung nach mit dem Hallstrom übereinstimmen, oder ihm entgegengesetzt sein. Jedenfalls ist hierdurch die Richtung des Hallstromes festgestellt, wenn die Richtung des obigen Merkmals gegeben ist. Daruus folgt, dass sich bei Umkehrung der Magnetfeldrichtung auch der Hallstrom umkehren muss, da ja der supponirten axialen Beschaffenheit der Kraftlinie zufolge auch die Richtung des Merkmals sich umkehrt.

Ob die magnetische Kraftlinie die Axe einer statischen in sich zurücklaufenden Polarisation oder einer gleichbeschaffenen zeitlichen Aenderung ist, lässt der Hall'sche Versuch allerdings unbeantwortet. Die Erscheinungen der Induction sprechen für das letztere, schwierig bleibt dann das Verständniss des permanenten Magnetismus, so gewiss es auch ist, dass sein Ursprung kein polarer sein kann.

6. *Ueber die Leitung der Electricität durch heisse Gase*[1]*; von E. Pringsheim.*

Wenn schon die experimentellen Resultate der verschiedenen Untersuchungen über die Electricitätsleitung heisser Gase einander nicht nur in quantitativer, sondern zum Theil auch in qualitativer Beziehung widersprechen, so herrscht noch viel weniger Uebereinstimmung in den theoretischen Ansichten über das Wesen dieser Leitung und über das Wesen der Electricitätsbewegung in Gasen überhaupt.

Zur experimentellen Untersuchung dieses Gegenstandes scheint es mir vor allem erforderlich zu sein, dass man die heissen Gase unter möglichst einfachen und bekannten äusseren Bedingungen beobachtet. Dieser Anforderung genügte der von mir früher[2]) beschriebene Ofen. Ein Porzellanrohr von 60 cm Länge und 3,6 cm lichter Weite wurde in seinem mittleren Theile in einer Länge von 22 cm von den Flammen umspült und in gleichmässige Gluth versetzt. Die Enden des Rohres waren durch aufgekittete Messingfassungen luftdicht verschlossen und wurden durch Wasserspülung gekühlt. Ein Ansatzrohr in der einen Messingfassung führte zu einem Dreiweghahn, durch welchen man das Porzellanrohr abwechselnd nach Belieben mit einer Luftpumpe, einem Kohlensäure- oder einem Wasserstoffapparat in Verbindung setzen konnte. Vor dem Eintritt in das Porzellanrohr hatten die zu untersuchenden Gase eine U-Röhre mit Chlorcalcium zu passiren; der Wasserstoff wurde durch zwei Woulff'sche Flaschen mit übermangansaurem Kali und mit concentrirter Schwefelsäure geleitet. In das Porzellanrohr waren zwei Electroden so eingeführt, dass sie im Innern das Rohr nirgends berührten und nur in den gekühlten Messingfassungen, voneinander vollkommen isolirt, befestigt waren. Als Electroden dienten zunächst kreisförmige

1) Der wesentliche Inhalt dieser Arbeit ist schon in den Berliner Ber. **18.** p. 331—334. 1895 veröffentlicht.

2) E. Pringsheim, Wied. Ann. **45.** p. 428. 1892.

Platinbleche von 1 cm Durchmesser und 1 mm Dicke, welche sich in der festen Entfernung von etwa 3 mm in der Mitte des Rohres vertical einander gegenüber befanden. Sie wurden von langen Platindrähten gehalten, welche ihrer ganzen Länge nach in Capillarröhren von Porzellan eingeschlossen waren und von diesen getragen wurden. Diese Electroden konnten in einen Stromkreis eingeschaltet werden, in welchem sich ein Galvanometer von du Bois und Rubens befand; der Widerstand des Galvanometers betrug 8000 Ohm, einem Millimeter Ausschlag entsprach eine Stromstärke von etwa $2{,}10^{-10}$ Amp. Als Stromquelle konnten nach Belieben 1, 2, 5 oder 10 Trockenelemente von je etwa 1,6 Volt benutzt werden.

Die Versuche ergaben zunächst, dass Luft, CO_2 und H bei den angewendeten electromotorischen Kräften bei eben beginnender Rothgluth den electrischen Strom merklich zu leiten anfangen, und dass die Leitungsfähigkeit mit steigender Temperatur stark zunimmt. Dabei wächst die beobachtete Stromintensität schnell mit abnehmendem Drucke, sie ist unter sonst gleichen Umständen am grössten für H, kleiner für Luft, noch kleiner für CO_2. Die Leitung ist, obwohl die beiden Electroden einander möglichst genau gleich gemacht waren, deutlich von der Stromrichtung abhängig. Diese Beobachtungen bestätigen vollkommen die alten Angaben von E. Becquerel[1]); dass neuere Beobachter negative Resultate erhalten haben, ist wohl durch ungünstige Versuchsanordnungen verschuldet.

Die Leitung der heissen Gase zeigt starke Abweichungen vom Ohm'schen Gesetz; die Stromintensität steigt viel schneller als die electromotorische Kraft. Daher kann man nicht ohne weiteres von einem bestimmten Widerstand der Gase sprechen. Die Versuche führten zu einem empirischen Gesetz, durch welches bei constanter Temperatur (mässige Rothgluth) innerhalb der Beobachtungsfehler alle Beobachtungen mit vollkommener Genauigkeit dargestellt werden. Es lautet:

$$(1) \qquad i = \frac{e + a e^2}{w}.$$

Hier bedeutet i die Stromintensität, e die electromotorische

1) E. Becquerel, Ann. de chim. et de phys. (3) **39.** p. 355. 1853.

Kraft, a eine von der Natur der Electroden und von der Stromrichtung abhängige Constante; w ist bei constantem Druck ebenfalls constant und dem Drucke innerhalb des beobachteten Intervalles von 6—64 cm Quecksilberdruck nahezu proportional.

Wenn man die Abweichung vom Ohm'schen Gesetz als eine nur scheinbare auffasst, veranlasst durch Veränderungen, welche der Widerstand des Gases durch die Stromleitung selbst erfährt (eine Auffassung, welche im Folgenden ihre Stütze findet), so kann man auch schreiben:

$$i = \frac{e}{w'}, \tag{2}$$

wo w' den von der Stromleitung abhängigen variablen Widerstand bedeutet.

Dann folgt aus Gleichung (1)

$$w = w'(1 + a\,e).$$

Nimmt man also an, dass die Gleichung (1) bis zu dem Grenzwerth $e = 0$ gilt, so ist $w = w'$ für $e = 0$.

Man kann also w unter dieser Voraussetzung als den wirklichen Widerstand des unveränderten Gases auffassen.

Um die Gesetze der Gasleitung genauer untersuchen zu können, änderte ich die Versuchsanordnung so, dass ich die Entfernung der Electroden während der Versuche in messbarer Weise variiren konnte. Es zeigte sich eine starke Abnahme der Intensität mit zunehmendem Abstande der Electroden. Eine genaue Messung dieser Abhängigkeit wurde jedoch zunächst dadurch vereitelt, dass bei geringem Electrodenabstand, 0,5—1,5 mm, wobei die Stromintensität und die Stromdichtigkeit verhältnissmässig gross waren, das Galvanometer nicht in regelmässiger Weise um eine Ruhelage pendelte, sondern zunächst bei Stromschluss einen sehr grossen Ausschlag gab, oft mehrere tausend Scalentheile, darauf aber erst sehr schnell, dann allmählich immer mehr zurückging, um erst nach sehr langer Zeit, bis 10 Minuten und darüber, eine constante Lage anzunehmen — vorausgesetzt, dass es gelang, die äusseren Bedingungen, Temperatur, Druck etc., so lange Zeit vollkommen constant zu erhalten. Da diese Erscheinung auf den ersten Blick den Eindruck der Polarisation machte, so schaltete

ich, nachdem der Strom eine Zeit lang in bestimmter Richtung durch das Gas hindurchgegangen war, die Elemente aus und verband die beiden Electroden ohne äussere electromotorische Kraft direct mit dem Galvanometer. Es zeigte sich ein deutlicher Polarisationsstrom von entgegengesetzter Richtung wie der Ladungsstrom, welcher bei dauerndem Stromschluss erst schnell, dann allmählich zurückging. Dieser Polarisationsstrom ist im allgemeinen erheblich schwächer als der Ladungsstrom, seine Intensität hängt von der Dauer des Ladungsstromes ab. Vermindert man, während der Polarisationsstrom geschlossen ist, den Widerstand des Gases dadurch, dass man die Electroden einander nähert oder dass man den Gasdruck verringert, so nimmt die Intensität des Polarisationsstromes zu. Man kann dabei leicht Ausschläge von mehreren hundert Scalentheilen erhalten. In dem Augenblicke, in dem man die beiden Electroden so weit nähert, dass sie sich direct berühren, hört die Polarisation auf. Entfernt man die Electroden nach kurzer Zeit wieder voneinander, so zeigt das Galvanometer keinen Polarisationsstrom mehr an.

Der Polarisationszustand der Electroden kann sehr lange unverändert erhalten werden und nimmt nur sehr allmählich von selbst ab. Wenn man die geladenen Electroden ruhig stehen lässt, so kann man den Polarisationsstrom noch eine halbe Stunde nach der Ladung nachweisen. In einem Versuche löschte ich die Flammen des Ofens nach der Ladung aus und liess das Gas sich abkühlen, bis keine Gluth und keine Leitung mehr vorhanden war. Darauf wurde der Ofen wieder angeheizt, und als die Gluth sich wieder hergestellt hatte, etwa 15 Minuten nach der Ladung, stellte sich der Polarisationsstrom ohne neue Ladung wieder ein. Dagegen scheint ein starker Luftstrom die Polarisation zu zerstören; das ist wohl auch der Grund, weshalb es mir bisher nicht gelungen ist, die Erscheinung in einer frei brennenden Flamme zu beobachten.

Um die electromotorische Kraft der Polarisation zu messen, wurde eine Anzahl von Versuchen mit einem Thomson'schen Quadrantelectrometer vorgenommen. Es ergab sich, dass die maximale electromotorische Kraft der Polarisation unabhängig

ist von der electromotorischen Kraft des Ladungsstromes, dem Druck und der Stromintensität. Nur die Zeitdauer, welche der Ladungsstrom braucht, um die maximale Polarisation herbeizuführen, ist sehr verschieden und nimmt mit wachsender Stromdichtigkeit schnell ab. Ausserdem ist die electromotorische Kraft der Polarisation stark von der Temperatur abhängig und steht zweifellos in nahem Zusammenhange mit der Adsorption, für H und CO_2 scheint sie nur wenig von dem Werthe für Luft abzuweichen. Die höchste bisher beobachtete electromotorische Kraft der Polarisation an Platinelectroden beträgt für Luft etwa 0,5 Volt.

Auch bei Goldelectroden von gleichen Dimensionen wie die früher benutzten Platinelectroden gelang es, die electrische Leitung durch Luft, CO_2 und H und die Polarisation nachzuweisen. Dabei ergaben sich zum Theil sehr beträchtliche quantitative Unterschiede gegen die Versuche mit Platin. Ueberall ist die electromotorische Kraft der Polarisation bei Gold erheblich geringer als bei Platin; auch die Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze scheinen viel geringer zu sein.

Das Vorhandensein der galvanischen Polarisation bei einem electrischen Leitungsvorgange gilt wohl allgemein als sicherer Beweis dafür, dass es sich um einen electrolytischen Vorgang handelt. Die einfachste Erklärung der oben beschriebenen Erscheinungen besteht daher in der Annahme, dass die heissen Gase — und wohl ebenso die Gase überhaupt, soweit sie die Electricität leiten — gleich den meisten Flüssigkeiten als electrolytische Leiter zu betrachten sind. Diese Annahme erklärt alle beobachteten Erscheinungen ungezwungen. Sie wird gestützt durch die auffallende Aehnlichkeit, welche die beschriebenen Vorgänge mit denjenigen Erscheinungen [1]) besitzen, welche bei der Electricitätsleitung durch schwach leitende verdünnte Lösungen beobachtet worden sind. Das Auftreten der Polarisation auch bei elementaren Gasen, Luft und H, drängt zu der Annahme, dass durch den electrischen Strom z. B. ein H-Molecül in ein positiv und ein negativ geladenes H-Ion zerfällt, bez. dass diese Ionen schon im gasförmigen H

1) Kohlrausch und Heydweiller, Wied. Ann. **54.** p. 385. 1895; Warburg, Wied. Ann. **54.** p. 396 1895.

bei den Bedingungen, unter denen er leitet, vorhanden sind. Diese Annahme ist in Uebereinstimmung mit einer von H. v. Helmholtz [1]) ausgesprochenen Hypothese.

Der Verdacht, dass die hier beobachtete Electricitätsleitung nicht von H bez. Luft, sondern von fremden gasförmigen Beimengungen herrührt, ist zwar nicht vollkommen ausgeschlossen, aber ausserordentlich unwahrscheinlich. Ich hoffe ihn durch eine genaue quantitative Untersuchung im Laufe des nächsten Winters eliminiren zu können.

Berlin, Physikalisches Institut.

1) H. von Helmholtz, Vorträge und Reden **2.** p. 297. 1884.

7. *Schwingungsvorgang in complicirten Erregern Hertz'scher Wellen;* von *Josef Ritter v. Geitler.*

(Aus den Sitzungsberichten der kaiserl. Akad. der Wissensch. in Wien, math.-naturw. Klasse; Bd. CIV. Abth. II. a. Febr. 1895.)

1. Die von E. Sarasin und L. de la Rive[1]) zuerst beschriebene und mit dem Namen der *multiplen Resonanz* bezeichnete Erscheinung besteht bekanntlich darin, dass die mit Hülfe des Resonators gemessene Länge electrischer Wellen lediglich von den Dimensionen des Resonators abhängt und sich mit diesen ändert, dagegen von den Dimensionen des Erregers in sehr weiten Grenzen unabhängig ist. Die genannten Physiker glaubten ihre Versuche in der Weise deuten zu müssen, dass dem gewöhnlichen Hertz'schen Primärkreis nicht eine bestimmte Periode zukomme, dass derselbe vielmehr ein ganzes Spectrum von Wellenlängen aussende und dass dem Resonator nur die Rolle zufalle, aus der Menge der ausgesendeten Schwingungen jene herauszugreifen, welche seiner eigenen Schwingungsdauer entsprechen. Diese den hergebrachten Anschauungen über den Schwingungsvorgang bei Condensatorentladungen widersprechenden Folgerungen gaben zu einem eingehenden Studium dieser Frage Veranlassung. Der nach den diesbezüglichen Arbeiten von Bjerknes[3]), Poincaré[3]), Hertz[4]), Garbasso und Aschkinass[5]) allein berechtigte Standpunkt dürfte wohl derjenige sein, von welchem aus man den Schwingungsvorgang im Hertz'schen Erreger sozusagen einheitlich als gedämpfte Sinusschwingung auffasst, zu deren Zerlegung in ihre Fourier'schen Bestandtheile uns

1) Sarasin et de la Rive, Arch. des scienc. phys. et natur. **23.** p. 113. 1890.

2) V. Bjerknes, Wied. Ann. **44.** p. 74, 92, 513. 1891; **54.** p. 58. 1895.

3) H. Poincaré, Electr. et Opt. **2.** p. 249. Paris, 1891.

4) Die Darlegung von H. Hertz ist in dem Anmerkung 3 citirten Werke von Poincaré, p. 250 ff., mitgetheilt.

5) A. Garbasso u. E. Aschkinass, Wied. Ann. **53.** p. 534. 1894.

die experimentellen Mittel in Gestalt der Resonatoren zu Gebote stehen.[1]) Mit dem Ausdrucke Periode eines gewissen Erregers wird man demnach einen ganz bestimmten Sinn verbinden können, wenn man darunter die Periode des ungedämpft schwingenden Erregers verstehen will. Man kann dann behaupten, dass der gewöhnliche Hertz'sche Erreger, solange er sich in genügender Entfernung von störenden Objecten, insbesondere schwingungsfähigen Systemen befindet, eine und nur eine Periode besitze.

2. Bei diesem Stande der Dinge schien es mir nicht ohne Interesse zu sein, *solche Erreger Hertz'scher Wellen herzustellen und den in denselben stattfindenden Schwingungsvorgang zu untersuchen, von welchen man voraussetzen konnte, dass ihnen mehr als nur eine Periode zukomme.* Die für diesen Zweck endgültig gewählte Form des Erregers ist aus Fig. 1 zu ersehen. Die nähere Beschreibung folgt weiter unten. Jede andere ähnlich combinirte Form würde natürlich ähnliche Dienste leisten.

Um den Schwingungsvorgang eines solchen complicirten Kreises zu untersuchen, stehen dieselben beiden Wege offen, welche von V. Bjerknes[2]) beim einfachen Kreise betreten worden sind. Entweder kann man die Wellen an sehr langen Drähten fortleiten und mit Hülfe ihrer mechanischen Wirkungen die Vertheilung der Intensität beobachten, welche in dem am Ende der Leitung sich ausbildenden Gebiete stehender Wellen stattfindet: Die Form der Intensitätscurve würde unmittelbar den Verlauf der Schwingung im primären Kreise wiedergeben — oder man kann die Oscillationen des Erregers durch Anwendung von Resonatoren analysiren: auf diesem Wege erhält man unmittelbar die Wellenlängen, sowie auch das Perioden- und Amplitudenverhältniss der dem Kreise zukommenden Schwingungen. Die ursprüngliche Absicht ging dahin, beide Methoden gleichzeitig anzuwenden. Es wäre dann möglich gewesen, die Resultate beider Methoden miteinander zu ver-

1) Vgl. von Lommel, Wied. Ann. **3.** p. 251 ff. 1877; G. Jaumann, Sitzungsber. der kais. Akad. der Wissensch. in Wien CIII, Abth. II. a, Mai 1894 oder Wied. Ann. **53.** p. 832. 1894; A. Garbasso, Accad. delle Scienze di Torino. **33.** 16. December 1894.

2) V. Bjerknes, l. c.

gleichen und aneinander zu controlliren. Aus Gründen, welche ich vielleicht später ausführlicher darzulegen hoffe, wurde schliesslich nur die Resonatormethode angewendet. Einer der Gründe, weshalb ich von der ersteren Methode abging, war die auch von mir bemerkte Thatsache, auf welche P. Lebedew[1]) aufmerksam macht; ein zweiter, eine störende Erscheinung, welche mir im Verlaufe der Versuche entgegentrat, über welche ich jedoch noch nicht das genügende Beobachtungsmaterial besitze, um an dieser Stelle näher auf dieselbe eingehen zu können.

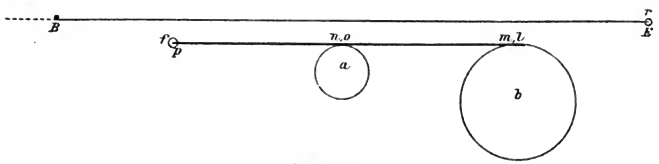


Fig. 1a.

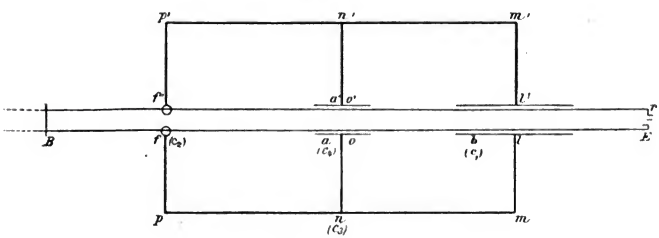


Fig. 1b.

3. *Die Versuchsanordnung* ist in Fig. 1 angedeutet. Der Erreger bestand aus zwei Condensatoren (kreisrunde Zinkplatten $a\,a'$, $b\,b'$), welche durch die 2 mm starken Kupferdrähte $l\,m\,p\,f$ und $b\,n\,p\,f$ (bez. $l'\,m'\,p'\,f''$ und $b'\,n'\,p'\,f''$) mit der von zwei Messingkugeln (Radius = 2 cm) gebildeten gemeinsamen Funkenstrecke $f\,f''$ in Verbindung standen. Von den Kugeln führten dünne Verbindungsdrähte zu den Polen eines grossen Ruhmkorff'schen Inductoriums mit Quecksilberunterbrecher, welches durch drei Bunsenelemente getrieben wurde.

1) P. Lebedew, Wied. Ann. **52**. p. 628, Fig. 7. 1894.

Das Inductorium konnte vom Platze des Beobachters aus mit Hülfe eines Schnurlaufes in und ausser Gang gesetzt werden. Der Erreger war auf einem Holzgerüst derart montirt, dass behufs Aenderung der Capacität die Platten $a\,a'$, $b\,b'$ einander genähert oder durch Platten von anderen Dimensionen ersetzt werden konnten. Der Draht $m\,p$, bez. $m'p'$ war, um die bei Veränderung der Capacität nothwendigen kleinen Deformationen zu gestatten, nicht ganz straff gespannt. Durch Wegnahme des Theiles $n\,m\,l\,b\,n'\,m'\,l'\,b'$ oder $n\,o\,a\,n'\,o'\,a'$ konnten auch einfache Hertz'sche Erreger nach Blondlot'schem [1]) Muster hergestellt werden. Es waren die Längen der Drähte bei den weiter unten mitgetheilten Versuchen:

$$l\,m = n\,o = p\,f = l'\,m' = n'\,o' = p'\,f' = 28 \text{ cm}$$

$$m\,n = n\,p = m'\,n' = n'\,p' = 58 \text{ cm}.$$

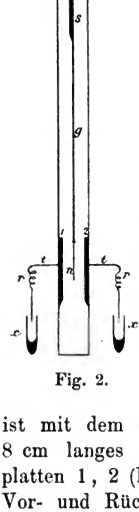


Fig. 2.

Die Angaben über Radius und Distanz der Platten $a\,a'$, $b\,b'$ finden sich in der Beschreibung der Versuche. *Der Resonator* bestand aus zwei 1 mm starken, in der gegenseitigen Entfernung von 3 cm gehaltenen Kupferdrähten, welche centrisch-symmetrisch in einer Höhe von 7 cm über dem Erreger ausgespannt waren. Bei E waren die Enden der Drähte mit den Platten eines kleinen *Electrometers* verbunden. Die Einrichtung desselben ist aus der Fig. 2 ersichtlich. An dem feinen, ca. 0,5 cm langen Quarzfaden q hängt das Spiegelchen s. Dieses ist mit dem rechteckigen Aluminiumblättchen n durch ein 8 cm langes Glasstäbchen starr verbunden. Die Messingplatten 1, 2 (Radius = 1 cm) sind an der Innenseite der die Vor- und Rückwand des Gehäuses bildenden Glasplatten in der normalen Distanz von 1 cm derart angekittet, dass ihre inneren Ränder von der Symmetrieebene des Electrometers tangirt werden. Die kurzen Stiele t der Platten treten durch die Glaswände ins Freie. An den Stielen sind ganz kurze

1) R. Blondlot, Compt. rend. **114.** p. 283. 1892 oder Graetz' Revue **1.** p. 308. 1892.

Stücke r aus sehr dünnem Messingband und an diesen wieder ganz kurze amalgamirte Kupferdrähte angelöthet, welche in die beiden Quecksilbernäpfe (xx) eintauchen; in diese Näpfe tauchen auch die Enden der Resonatordrähte ein. Diese Anordnung ist getroffen, um das wegen seiner grossen Empfindlichkeit gegen mechanische Erschütterungen auf einem isolirten Pfeiler aufgestellte Electrometer vor den Erzitterungen zu bewahren, welche dasselbe ohne Zwischenschaltung der Stücke r beim Laufen des Inductoriums etc. erleiden würde. Die Ablesung der Electrometerausschläge geschah mit Hülfe eines 2 m vom Electrometer aufgestellten Scalenfernrohres. Das Electrometer, welches seinen Nullpunkt infolge der vorzüglichen Eigenschaften der Quarzfadensuspension in sehr befriedigender Weise constant erhielt, wurde mit einer Zink-Kupfer-Wasserbatterie von 40 Elementen geaicht. Die Empfindlichkeit des Instrumentes für kleine Kräfte war leider gering. Aus naheliegenden Gründen empfahl es sich jedoch, ein Electrometer von kleiner Capacität und Schwingungsdauer zu wählen, wodurch die Empfindlichkeit naturgemäss heruntergedrückt wurde. Mit Hülfe der Brücke B konnte dem Resonator jede beliebige Länge, bez. Schwingungsdauer ertheilt werden. Die Stellung der Brücke wurde an einer Theilung abgelesen, welche parallel dem Resonator von E ausgehend gespannt war.

4. Die Beobachtungen wurden in der folgenden Weise ausgeführt: Für eine bestimmte Configuration des Erregers wurde durch allmähliches Verschieben die Brücke B die Länge des Resonators verändert. Bei jeder neuen Lage der Brücke wurde das Inductorium in Gang gesetzt und der erste Ausschlag des Electrometers abgelesen. Auf diese Weise konnte festgestellt werden, bei welchen Lagen der Brücke Resonanz eintrat; auch war es leicht, die Form der Resonanzcurve zu ermitteln. Bei der Kleinheit der Electrometercapacität und der geringen Distanz der Resonatordrähte wird wohl kaum etwas dagegen einzuwenden sein, wenn in erster Annäherung die Länge rB (Fig. 1) gleich der Viertelwellenlänge der dem betreffenden Resonator entsprechenden Schwingung gesetzt wird.[1]) Dies wird im Weiteren geschehen. Die einigermaassen

1) Vgl. P. Drude, Wied. Ann. **53.** p. 728, 729. 1894.

exacte Feststellung des Intensitätsverhältnisses zweier Punkte derselben, oder der Maxima zweier verschiedener Resonanzcurven war, wegen der Unregelmässigkeit der Primärfunken, nur durch Ausführung einer sehr grossen Zahl abwechselnder Einzelbeobachtungen zu erreichen. Bei dem Grade der Empfindlichkeit, welchen das Electrometer hatte, war ausserhalb der Gebiete der Resonanz kein Ausschlag vorhanden.

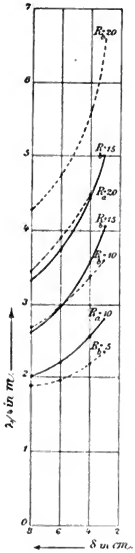


Fig. 3.

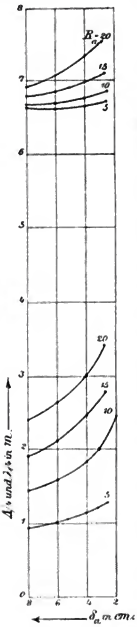


Fig. 4.

5. *Die Ergebnisse einiger Versuche* sind in den folgenden Tabellen und Figuren dargestellt. Es bedeuten darin:

R_a den Radius der Condensatorplatten aa' in Centimetern,

R_b den Radius der Condensatorplatten bb' in Centimetern,

δ_a die Distanz der Condensatorplatten aa' in Centimetern,

δ_b die Distanz der Condensatorplatten bb' in Centimetern,

$\lambda/4$ die Länge rB (Fig. 1), für welche Resonanz eintrat, in Metern.

Tabelle I.

	$\lambda/4$					$\lambda/4$			
δ =	8	6	4	3	δ =	8	6	4	3
R_a = 5	—	—	1,5	1,625	R_b = 5	1,9	2,0	2,15	2,3
R_a = 10	2,0	2,2	2,525	2,85	R_b = 10	2,7	2,9	3,3	3,7
R_a = 15	2,65	2,95	3,5	4,05	R_b = 15	3,5	3,9	4,55	5,1
R_a = 20	3,35	3,75	4,45	5,1	R_b = 20	4,3	4,8	5,7	6,55

Aus Tab. I und Fig. 3 ist ersichtlich, dass bei der gewählten Aufstellung den verschiedenen *einfachen Kreisen*, durch

deren Combination die zu untersuchenden complicirten Erreger gebildet wurden, in dem eingangs definirten Sinne eine und nur eine bestimmte Periode zukommt.

In Tab. II und Fig. 4 sind verschiedene *Versuche mit complicirten Erregern* zusammengestellt. Bei allen diesen hier mitgetheilten Versuchen war der Condensator $b\,b'$ unverändert, und zwar hatte er die Bestimmungsstücke $R_b = 20$, $\delta_b = 3$. In dieser Tabelle bedeuten $\Lambda/4$ und $\lambda/4$ die Resonatorlängen r_B, bei welchen Resonanz eintrat, in Metern.

Tabelle II.

$\delta_a =$	8		6		5		4		3		2	
R_a	$\lambda/4$	$\Lambda/4$	$\lambda/4$	$\Lambda/4$	$\lambda/4$	$\Lambda/4$	$\lambda/4$	$\Lambda/4$	$\lambda/4$	$\Lambda/4$	$\lambda/4$	$\Lambda/4$
5	0,935	6,62	0,985	6,635	1,01	6,655	1,09	6,67	1,19	6,675	1,42	6,7
10	—	—	1,52	6,72	1,61	6,73	1,74	6,775	1,94	6,81	2,38	6,98
15	1,9	6,82	2,09	6,86	2,22	6,92	2,42	6,98	2,705	7,12	—	—
20	2,35	6,95	2,6	7,08	—	—	3,01	7,3	3,34	7,57	—	—

In Tab. II ist das Verhältniss Λ/λ angegeben:

Tabelle III.

$\delta_a =$	8	6	5	4	3	2
R_a	Λ/λ	Λ/λ	Λ/λ	Λ/λ	Λ/λ	Λ/λ
5	7,08	6,74	6,59	6,12	5,61	4,72
10	—	4,42	4,18	3,89	3,51	2,93
15	3,59	3,28	3,12	2,89	2,69	—
20	2,96	2,72	—	2,43	2,27	—

Aus diesen Tabellen folgt, dass für jede der in denselben verzeichneten Combinationen *zwei Resonanzmaxima* mit den vorhandenen Mitteln nachweisbar waren. Es erregt daher jede dieser (und ebenso eine grosse Zahl anderer, von mir untersuchter ähnlicher) Combinationen zwei und höchstwahrscheinlich nicht mehr als zwei gedämpfte Schwingungen verschiedener Periode. Was die Grösse der Perioden anbetrifft, so lässt sich der Satz aussprechen, dass die kürzere Periode des combinirten Kreises kleiner sei als die Periode des (electrisch) kleineren, die längere hingegen grösser als diejenige des (electrisch) grösseren einfachen Kreises, durch deren Zusammensetzung man den combinirten Kreis gebildet denken kann.

6. Was die Amplituden der dem combinirten Kreise zukommenden beiden Schwingungen anlangt, so fand ich, dass dieselben für jede bestimmte Combination in einem innerhalb der Beobachtungsfehler constanten Verhältnisse zu einander stehen. In der Fig. 5 ist das Verhältniss Λ/λ als Abscisse, das Verhältniss a/A als Ordinate verzeichnet. a und A bedeuten die Amplituden der kürzeren, bez. der längeren Schwingung der combinirten Kreise. Die Bestimmung des Amplitudenverhältnisses geschah in der p. 518 angedeuteten Weise; für jeden der beiden mittleren Ausschläge, welche den beiden Resonanzmaximis entsprachen, wurde bei jeder Combination nach der Empfindlichkeitscurve des Electrometers die Anzahl der Elemente bestimmt, welche denselben Ausschlag hervorgerufen hätte und das Verhältniss der Elementenzahlen als Amplitudenverhältniss angesehen. Die Curve, welche das Amplitudenverhältniss als Function des Periodenverhältnisses darstellt, weist ein ausgesprochenes Maximum in der Nähe von $\Lambda/\lambda = 3$ auf. Es hat daselbst den Werth 0,34. Die Curve scheint noch ein zweites, weniger scharfes Maximum bei $\Lambda/\lambda = 6$ zu besitzen. Jenseits von $\Lambda/\lambda = 7{,}08$ und $\Lambda/\lambda = 2{,}27$ war es mir nicht möglich, bei den verschiedenen daraufhin untersuchten Kreisen das der kleineren Schwingung zugehörige Maximum nachzuweisen, obwohl an seinem Vorhandensein zu zweifeln ein Grund nicht vorliegt. Es dürfte dies nur eine Folge der oben erwähnten unzureichenden Empfindlichkeit meines Electrometers gewesen sein. Ueber den Verlauf der Curve Fig. 5 jenseits der hier angegebenen Grenzen wüsste ich daher nichts auszusagen, was den Werth von mehr als einer blossen Vermuthung beanspruchen dürfte.

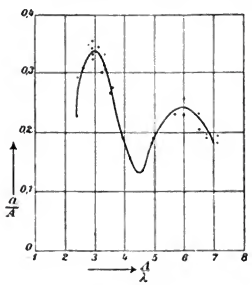


Fig. 5.

7. Kurz zusammengefasst ist also das Ergebniss der vorliegenden Versuche das folgende:

Erreger Hertz'scher Schwingungen von der in Fig. 1

angegebenen Gestalt erzeugen im allgemeinen zwei simultane Schwingungen, deren Amplitudenverhältniss für jeden bestimmten Erreger ein bestimmtes ist; doch könnte dasselbe von der Erregungsart abhängen. Die numerischen Werthe der Perioden der den combinirten Kreis bildenden einfachen Hertz'schen Erreger liegen zwischen denjenigen der Simultanschwingungen des entsprechenden combinirten Kreises.

8. Die Ergebnisse der beschriebenen Versuche stehen in guter Uebereinstimmung mit der Theorie. Man kann dieselbe unter Zugrundelegung der Kirchhoff'schen Annahmen ganz allgemein für ein beliebig complicirtes System aufstellen.[1])

Es sollen n punktförmige Capacitäten, $c_1, c_2, \ldots c_n$, welche auf die Potentiale $V_1, V_2, \ldots V_n$ geladen sind, in allen möglichen Combinationen zu je zweien durch capacitätsfreie und widerstandslose Drähte verbunden werden. Bedeutet J_{ik} die Stromstärke in dem die Capacitäten c_i und c_k verbindenden Drähte, von c_i nach c_k gezählt, so gelten zunächst die n Gleichungen:

$$-c_i \frac{dV_i}{dt} = J_{i1} + J_{i2} + \ldots + J_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Hierin ist $J_{ik} = -J_{ki}$, mithin $J_{ii} = 0$.

Sind die Drähte so angeordnet, dass ihre gegenseitige Induction vernachlässigt werden kann und bedeutet $L_{ik} = L_{ki}$ den Selbstinductionscoefficienten des die Capacitäten c_i und c_k verbindenden Drahtes, so gelten ferner die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gleichungen:

$$L_{ik}\frac{dJ_{ik}}{dt} = V_i - V_k \qquad (i = 1, 2, \ldots n;\ k = 1, 2 \ldots n).$$

Aus diesen Gleichungen folgt nach Elimination der J_{ik} das System von n simultanen Gleichungen für die Potentiale V_i:

$$(1) \qquad c_i \frac{d^2 V_i}{dt^2} = V_1 N_{i1} + V_2 N_{i2} + \ldots + V_i N_{ii} + V_n N_{in}.$$

1) Ich bin Hrn. Prof. G. Jaumann sehr zu Dank verpflichtet, welcher mir diese von ihm gelegentlich für andere Zwecke angestellte Rechnung zur Verfügung stellte.

Hierin ist N_{ik} für $1/L_{ik}$ gesetzt, und zur Definition der N_{ii} dient die Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=n} N_{ik} = 0. \tag{2}$$

Ein Integral der Gleichungen (1) ist jedenfalls

$$V_i = A_i \sin x t, \tag{3}$$

wo $x = 2\pi/T$ gesetzt wird und A_i die Amplitude, T die Dauer der Schwingung, t die Zeit bedeutet. In Verbindung mit Gleichung (1) ergiebt dies die folgenden Bedingungen für die Constanten der Schwingung:

$$\begin{aligned}
0 &= (N_{11} + c_1 x^2) \cdot A_1 + N_{12} A_2 \quad + \ldots + N_{1n} A_n \\
0 &= N_{21} \cdot A_1 + (N_{22} + c_2 x^2) A_2 + \ldots + N_{2n} A_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= N_{n1} \cdot A_1 + N_{n2} A_2 \quad + \ldots + (N_{nn} + c_n x^2) A_n.
\end{aligned}$$

Wegen der Homogenität dieser n Gleichungen in den A_i verschwindet die Determinante der Coefficienten dieser Grössen. Zur Bestimmung der x^2, bez. der T erhält man somit die Gleichung:

$$\begin{vmatrix}
(N_{11} + c_1 x^2), & N_{12}, & N_{13}, & \ldots & N_{1n} \\
N_{21}, & (N_{22} + c_2 x^2), & N_{23}, & \ldots & N_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
N_{n1}, & N_{n2}, & N_{n3}, & \ldots & (N_{nn} + c_n x^2)
\end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Mit Rücksicht auf Gleichung (2) lässt sich Gleichung (4) in die Form bringen:

$$\begin{vmatrix}
c_1, & N_{12}, & N_{13}, & \ldots & N_{1n} \\
c_2, & (N_{22} + c_2 x^2), & N_{23}, & \ldots & N_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
c_n, & N_{n2}, & N_{n3}, & \ldots & (N_{nn} + c_n x^2)
\end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Ein System von n Capacitäten vermag also mit höchstens $n-1$ durch Gleichung (4) oder Gleichung (5) definirten Schwingungsdauern zu schwingen.

Auf eine Anordnung dieser allgemeinen Form lässt sich jedes System zurückführen. Falls zwischen zwei Capacitäten c_i und c_k kein directer Verbindungsdraht vorhanden ist, so ist $N_{ik} = 0$ zu setzen. An solchen Verzweigungspunkten der Drähte, an welchen keine Capacität angebracht ist, ist die Capacität $c_i = 0$ einzuführen. Wenn zwei symmetrische Systeme durch einen Draht symmetrisch verbunden sind, so kann man in der Mitte dieses Drahtes eine unendlich grosse Capacität anbringen und dann auch die eine Hälfte des Systems fortlassen; die Schwingungsdauern des neuen Systems sind dieselben wie jene der symmetrisch verbundenen symmetrischen Systeme.

9. Auf den bei den obigen Experimenten vorliegenden Fall[1]) angewendet, ergiebt sich zur Berechnung der Schwingungen (vgl. Fig. 1) die Determinante:

$$\begin{vmatrix} (N_{11}+c_1x^2), & 0, & N_{13}, & 0 \\ 0, & (N_{22}+c_2x^2), & N_{23}, & 0 \\ N_{13}, & N_{23}, & N_{33}, & N_{34} \\ 0, & 0, & N_{34}, & (N_{44}+c_4x^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Da der Erreger um die Funkenstrecke ff' symmetrisch ist, so hat man bei ff'' eine Capacität $c_2 = \infty$ zu setzen und die eine Hälfte des Systems fortzudenken.

Es ergiebt sich:

$$(6)\quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{(L_{13}+L_{23})c_1+(L_{23}+L_{34})c_4}{2(L_{12}L_{23}+L_{13}L_{34}+L_{23}L_{34})c_1c_4} \\ \pm\sqrt{\left[\dfrac{(L_{13}+L_{23})c_1+(L_{23}+L_{34})c_4}{2(L_{12}L_{23}+L_{13}L_{34}+L_{23}L_{34})c_1c_4}\right]^2 - \dfrac{1}{(L_{12}L_{23}+L_{13}L_{34}+L_{23}L_{34})c_1c_4}} \end{cases}$$

1) Dieselbe Rechnung lässt sich auf die Versuche von A. J. v. Oettingen (Wied. Ann. **34.** p. 570. 1888) anwenden. Die dortige Versuchsanordnung bildet, von einer gewissen Unsymmetrie abgesehen, einen speciellen Fall der in Fig. 1 skizzirten Aufstellung, wenn man in letzterer die im weiteren mit l_{23} bezeichnete Länge gleich Null macht, sodass $n\,(n')$ mit $f\,(f')$ zusammenfällt. Dann ergiebt die Theorie den *Grenzfall*, dass die Schwingungen des complicirten Kreises gleich sind jenen der beiden Einzelkreise. Dies aber ist die v. Oettingen'sche Voraussetzung.

In Tabelle IV sind die aus Gleichung (6) sich ergebenden Viertelwellenlängen für einige der oben untersuchten Combinationen zusammengestellt und aus Tabelle II die entsprechenden beobachteten Werthe in Klammern beigefügt. Die Selbstinductionscoefficienten L_{13}, L_{23}, L_{34} sind nach der für geradlinige Drähte geltenden Formel

$$L_{ik} = 2\,l_{ik}\left[\log\text{nat}\,\frac{4\,l_{ik}}{d} - 0{,}75\right] \tag{7}$$

berechnet, worin l_{ik} die Länge, d den Durchmesser des die Capacitäten c_i und c_k verbindenden Drahtes in Centimetern bedeutet. Die Capacitäten c_1 und c_4 berechnen sich nach der Formel

$$c_i = \frac{1}{2}\cdot\frac{R_i^2}{4\,\delta_i}\cdot\frac{1}{9\,.\,10^{20}}, \tag{8}$$

wenn R_i den Radius, δ_i die Distanz der die Capacität c_i bildenden Platten in Centimetern ausdrückt.

Tabelle IV.

$\frac{\delta}{a}$	8		6		5		4		3	
$\frac{R}{a}$	$\lambda/4$	$\Lambda/4$	$\lambda/4$	$\Lambda/4$	$\lambda/4$	$\Lambda/4$	$\lambda/4$	$\Lambda/4$	$\lambda/4$	$\Lambda/4$
10	—	—	1,33 (1,52)	6,25 (6,72)	—	—	—	—	1,85 (1,94)	6,37 (6,81)
20	2,22 (2,35)	6,55 (6,95)	—	—	—	—	2,97 (3,01)	6,87 (7,3)	3,29 (3,34)	7,16 (7,57)

Die vorhandenen Unterschiede zwischen den beobachteten und berechneten Werthen erklären sich wohl ungezwungen einerseits aus den Vernachlässigungen, welche in den Voraussetzungen der mitgetheilten Theorie gemacht wurden (Annahme capacitätsloser Drähte und inductionsfreier Condensatoren), andererseits aus den Ungenauigkeiten, welche der Berechnung der L_{ik} und c_i nach Formel (7) und (8) von Natur aus anhaften.

Prag, Phys. Inst. der k. k. deutschen Universität.

8. *Ableitung der Gleichungen der electromagnetischen Lichttheorie aus den Erfahrungsthatsachen der Krystalloptik; von E. Ketteler.*

Die Maxwell'sche Theorie hat nicht nur in der eigentlichen Electricitätslehre, sondern auch in der theoretischen Optik einen gewaltigen Umschwung zu Wege gebracht. Nicht nur sind hier die meisten früheren Meinungsverschiedenheiten zum Ausgleich gekommen, sondern man vermag auch die Besonderheiten der früheren Einzelsysteme jetzt, wo sie Theile eines grösseren Ganzen bilden, sowohl in ihrer Stellung gegen einander, als gegenüber dem Ganzen völlig zu übersehen.

Man hat in den letzten Jahren vielfach in Büchern wie Vorlesungen die Optik gewissermassen als Anhang der Electricitätslehre betrachtet und das freilich insofern mit Recht, als uns für magnetische Aetherschwingungen nicht wie für electrische ein eigenes Organ gegeben ist, und als ja auch die Maxwell-Hertz'schen Gleichungen auf electrischem Gebiete entdeckt worden sind.

Gibt man indess zu, dass Neumann'sche Schwingungen senkrecht zu Strahl und Normale in der Polarisationsebene, Fresnel'sche Schwingungen senkrecht zur Normale, und Ketteler'sche Schwingungen senkrecht zum Strahle[1]), beide senkrecht zur Polarisationsebene, gleichzeitig neben einander bestehen, so lassen sich, wie ich im Folgenden zeigen möchte, die Maxwell-Hertz'schen Gleichungen in grosser Einfachheit direct aus den Erfahrungsthatsachen der Krystalloptik ableiten. Der hier angedeutete Weg ist überaus gangbar; es fallen für

1) Obwohl bereits Boussinesq, später Lord Rayleigh, Glazebrook, Sarrau, Briot u. A. sich mit sogenannten Quasitransversalschwingungen beschäftigt haben, so bin ich doch der Einzige gewesen, welcher „Strahlschwingungen und Strahlwellen" systematisch verfolgt und in durchaus richtiger und erfolgreicher Weise durchgeführt hat. Ich werde mir daher im Folgenden gestatten, dieselben Kürze halber als Ketteler'sche zu bezeichnen.

denselben fast alle die früheren umständlichen analytisch-geometrischen Rechnungen fort, und man ist oftmals überrascht über die Unmittelbarkeit der Folgerungen. Obwohl des Zusammenhangs wegen manche bekannte Gesetze und Gleichungen zu reproduciren sein werden, so erscheinen sie hier doch wenigstens in ihrer voll ausgeprägten Individualität als von verwandten ähnlichen verschieden. Vielleicht wird die kleine Arbeit solchen Physikern, welche bisher der electromagnetischen Lichttheorie nicht näher getreten sind, das Verständniss derselben fördern und insofern nicht unwillkommen sein.

Zuvor indess möchte ich mir einige Worte gestatten über die:

1. *Zulässigkeit sogenannter Strahlschwingungen, bezw. Strahlwellen.* In früheren Abhandlungen über Krystalloptik habe ich den Begriff des Strahles als der Richtung des Energieflusses an die Spitze gestellt und der Normalen nur insoweit Beachtung geschenkt, als dieselbe für den Lichtübergang in das Nachbarmedium erforderlich ist. Und doch erscheint dieselbe dadurch von principieller Bedeutung, dass gerade sie die Fortpflanzungsrichtung endlich ausgedehnter Wellebenen ist. Meine Bemühungen, zu einer mehr allseitig befriedigenden Auffassung zu gelangen, waren indess erst von Erfolg, als ich in der Maxwell'schen Theorie die nöthige und lange gesuchte Ergänzungsgleichung thatsächlich vorfand. Es bedarf daher das früher Gesagte einer theilweisen Erweiterung, bezw. Berichtigung.

Statt des früheren einfachen Tripels von Differentialgleichungen benutze ich nunmehr deren zwei. Dieselben sind mit den ihnen hinzugefügten Bedingungsgleichungen die folgenden:[1])

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 L}{\partial t^2} = \Delta_2 X - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial L}{\partial x} + \dfrac{\partial M}{\partial y} + \dfrac{\partial N}{\partial z}\right), \cdots \\ \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

sowie:

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 L}{\partial t^2} = \Delta_2 X - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z}{\partial z}\right), \cdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x} + \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

1) Zur Vereinfachung ist in diesem Aufsatz die Geschwindigkeit des Lichtes im Weltäther überall = 1 gesetzt.

Dabei werden zwischen den Vectorcomponenten X, Y, Z und L, M, N unter gewisser Voraussetzung die Beziehungen angenommen:

$$(3) \qquad \begin{cases} L = n_1^2 X, \; M = n_2^2 Y, \; N = n_3^2 Z \\ X = \frac{1}{n_1^2} L, \quad Y = \frac{1}{n_2^2} M, \quad Z = \frac{1}{n_3^2} N, \end{cases}$$

unter n_1, n_2, n_3 die drei Hauptbrechungsexponenten des Krystalles verstanden.

Die Gleichungen (2) und (3) verdankt man dem Maxwell'schen System[1]); sie beziehen sich auf die Fortpflanzung *endlich ausgedehnter* ebener Wellen in der Richtung der Normalen. Die Gleichungen (1) dagegen sind von mir mit der Beschränkung aufgestellt, dass sie sich auf die Fortpflanzung *unendlich kleiner* Wellebenen in der Richtung des Strahles beziehen sollen.[2])

Diese letzteren kommen im electromagnetischen System um desshalb nicht vor, weil dort bloss endlich grosse Wellebenen behandelt zu werden pflegen. Hätten sich freilich Maxwell oder Hertz die Aufgabe gestellt, im Interesse grösstmöglicher Anschaulichkeit, folglich unter Verzichtleistung auf complexe Grössen, die Gesetze der absorbirenden Krystalle zu entwickeln, so würden sie die Gleichungen (1) nicht wohl haben entbehren können. — Um sich in der That die Verträglichkeit der Gleichungen (1) und (2) wenigstens für durchsichtige Medien klar zu machen, denke man sich eine Reihe von äquidistanten parallelen Linien als Projection ebenso vieler beliebig breiter Wellen, die sich senkrecht zur Normalen fortpflanzen. Zu jedem Wellenelement zeichne man den zugehörigen Strahl, und in den Kreuzungspunkten von Wellen und Strahlrichtung senkrecht zu letzterer den entsprechenden Schwingungsausschlag (nach Maxwell der electrischen Kraft, nach mir der Aether- und Körpertheilchen), welcher in der That nach beiden Auffassungen auf dem Strahle senkrecht steht.

Ich ersetze dann die geradlinige Projection der ganzen Wellenbreite durch eine aus unendlich kleinen Zickzacken

1) Vgl. Drude, Physik des Aethers. Stuttgart 1894, p. 509.

2) Vgl. Ketteler, Theoretische Optik, gegründet auf das Bessel-Sellmeier'schs Princip. Braunschweig 1885, p. 288.

bestehende gebrochene Linie und zwar nach eben denselben Grundsätzen, nach denen die höhere Geometrie, sowie beispielsweise die mechanische Wärmetheorie bezüglich ihrer Kreisprocesse verfährt. Und da jetzt die Erscheinung gerade so verläuft, als erfolge die Wellenbewegung in lauter unendlich kleinen transversalen Wellebenen längs der Strahlrichtung und mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in dieser Richtung[1]), so ist damit das Gleichungensystem (1) legitimirt. Es wird sofort *überflüssig*, sobald man die Verwendung complexer Grössen zulässt und diese richtig zu deuten versteht.

Aehnliche Betrachtungen haben mich früher, wie man sich erinnern wird, auch die jetzt als richtig anerkannten Grenzbedingungen auffinden lassen.

Man kann den Gleichungen (1) und (2) die gemeinsame Form geben:

$$(4) \qquad n_1^2 \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \Delta_2 X + \frac{\partial V}{\partial x} = \Delta_2 (X + X^1) \ldots\ldots,$$

worin V ein aus allen drei Gleichungen des Tripels noch zu bestimmendes Potential, bezw. $X^1, \ldots$. gewisse daraus zu bestimmende Longitudinalcomponenten der Kraft bedeuten, und sie dann nach einander den Bedingungen unterwerfen:

$$(5) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

$$(6) \qquad n_1^2 \frac{\partial X}{\partial x} + n_2^2 \frac{\partial Y}{\partial y} + n_3^2 \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Bevor wir dieselben im folgenden Aufsatz versuchsweise auch auf absorbirende Krystalle in Anwendung bringen, mögen zur vorgängigen weiteren Klärung erst folgende Ausführungen dienlich sein.

2. *Die electromagnetischen integralen Grundgleichungen.* Wir beginnen mit gewissen Integralgleichungen, um von ihnen aus zu den Differentialgleichungen überzuführen. Ich mache dabei, wie schon bemerkt, die einzige Voraussetzung, dass die Neumann'schen Schwingungen (der magnetischen Kraft), die Fresnel'schen Schwingungen (der electrischen Polarisation)

1) Besonders begünstigt wird eine solche Vorstellung durch die Annahme, dass die mitschwingenden Körpermolecüle gegenüber ihrer Aetherumgebung discret geordnete, massige Punkte seien.

und die Ketteler'schen Schwingungen (der electrischen Kraft) gleichzeitig neben einander bestehen sollen.

Der magnetische Vector heisse K_m mit den Componenten A, B, C, so dass:

$$K_m^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$

der dielectrische Polarisationsvector sei K_p mit den Componenten L, M, N und daher:

$$K_p^2 = L^2 + M^2 + N^2.$$

Endlich heisse der Vector der electrischen Kraft K_e mit den Componenten X, Y, Z, folglich:

$$K_e^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Zunächst steht der Fresnel'sche Vector senkrecht erstens auf dem Neumann'schen Vector, zweitens auf der Normalen, und steht drittens der Neumann'sche Vector ebenfalls senkrecht auf der Normalen. Demgemäss bestehen die drei Gleichungen:

$$(7) \qquad \begin{cases} LA + MB + NC = 0 \\ Lu + Mv + Nw = 0 \\ Au + Bv + Cw = 0. \end{cases}$$

in welchen u, v, w die Richtungscosinus der Wellennormale bedeuten.

Aus den *ersten* beiden Gleichungen lassen sich L, M, N als Functionen von A, B, C und u, v, w ermitteln. Man erhalt z. B.:

$$\frac{L^2}{L^2 + M^2 + N^2} = \frac{(Cv - Bw)^2}{(Cv - Bw)^2 + (Aw - Cu)^2 + (Bu - Av)^2}.$$

Multiplicirt man jetzt Zähler und Nenner des rechts stehenden Bruches mit einem, etwa vorläufig unbestimmten Factor, so lassen sich Zähler und Nenner links und rechts einander gleich setzen. Wir wollen indess als jenen hypothetischen Factor geradezu das Quadrat des Brechungsexponenten n wählen, in der Erwägung nämlich, dass sich dann L, M, N bei Substitution der die Wellebene enthaltenden Schwingungsausdrücke direçt als Differentialquotienten nach den Coordinaten x, y, z darstellen werden. Demnach setzen wir:

$$(8)\qquad \begin{cases} L = (Cv - Bw)n \\ M = (Aw - Cu)n \\ N = (Bu - Av)n \end{cases}$$

und erhalten schliesslich für das Quadrat des Vectors K_p:

$$(9)\qquad K_p^2 = L^2 + M^2 + N^2 = (A^2 + B^2 + C^2)n^2.$$

Was sodann den Neumann'schen Vector K_m betrifft, so steht derselbe senkrecht erstens auf dem Ketteler'schen Vector, zweitens auf dem Strahl, und steht drittens der Ketteler'sche Vector ebenfalls senkrecht auf dem Strahle. Man hat folglich die drei Gleichungen:

$$(10)\qquad \begin{cases} AX + BY + CZ = 0 \\ Au_s + Bv_s + Cw_s = 0 \\ Xu_s + Yv_s + Zw_s = 0, \end{cases}$$

unter u_s, v_s, w_s die Richtungscosinus des Strahles verstanden. Sofern indess der Neumann'sche Vector zugleich senkrecht steht auf der Normalen, so lassen sich die beiden *ersten* Gleichungen auch so schreiben:

$$(11)\qquad \begin{cases} AX + BY + CZ = 0 \\ Au + Bv + Cw = 0. \end{cases}$$

Aus ihnen erhält man durch eine ganz ähnliche Behandlung wie oben:

$$(12)\qquad \begin{cases} A = (Yw - Zv)n \\ B = (Zu - Xw)n \\ C = (Xv - Yu)n. \end{cases}$$

sowie für den resultirenden Neumann'schen Vector K_m:

$$(13)\quad K_m^2 = A^2 + B^2 + C^2 = [(X^2 + Y^2 + Z^2) - (Xu + Yv + Zw)^2]n^2.$$

Wie aus der Vergleichung der Gleichungen (10) und (11) hervorgeht, lassen sich dieselben ebensowohl für unendlich kleine Wellenebenen durch Strahlschwingungen von der Form:

$$(14\,a)\qquad K_s = \mathfrak{A}_s \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{n_s \delta_s}{\lambda}\right), \quad \delta_s = u_s x + v_s y + w_s z$$

als für endliche Wellebenen durch Normalschwingungen von der Form:

$$(14\,b)\qquad K_n = \mathfrak{A}_n \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{n_n \delta_n}{\lambda}\right), \quad \delta_n = u_n x + v_n y + w_n z$$

befriedigen, in welchen Ausdrücken T die Schwingungsdauer, λ die zugehörige Wellenlänge im Weltäther bedeutet. Es besteht dann für den Schnittpunkt (x', y', z') von Wellebene und Strahl die Beziehung: $n_n \delta_n = n_s \delta_s$ oder auch:

$$n_s = n_n \cos \vartheta, \tag{15}$$

wo ϑ den Winkel zwischen Strahl und Normale bedeutet. Ebenso lässt sich mit Hülfe dieser letzten Gleichung sowie in Erwägung, dass dem folgenden Paragraphen zufolge

$$\left(\frac{X u_n + Y v_n + Z w_n}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}\right)^2 = \sin^2 \vartheta$$

ist, zeigen, dass für Gleichung (13) die Identität besteht:

$$[(X^2 + Y^2 + Z^2) - (X u_n + Y v_n + Z w_n)^2]\, n_n^2 = (X^2 + Y^2 + Z^2) n_s^2.$$

Schliesslich befriedigen auch die Ausdrücke (14a) und (14b) je nach Wahl die beiden Gleichungensysteme (8) und (9).

3. *Die Bestimmungsstücke der Strahlrichtung.* Fortan sollen zur Abkürzung die Richtungscosinus des Neumann'schen (magnetischen) Vectors durch U_m, V_m, W_m, die des Fresnel'schen (Polarisations-)Vectors durch U_p, V_p, W_p und die des Ketteler'schen Vectors (der electrischen Kraft) durch U_e, V_e, W_e bezeichnet werden. Zur Bestimmung des Winkels zwischen Strahl und Normale hat man dann die folgenden Beziehungen:

$$\left\{\begin{array}{l} \cos \vartheta = U_e U_p + V_e V_p + W_e W_p \\ \cos \vartheta = u_n u_s + v_n v_s + w_n w_s \\ \sin \vartheta = U_p u_s + V_p v_s + W_p w_s \\ -\sin \vartheta = U_e u_n + V_e v_n + W_e w_n \end{array}\right. \tag{16}$$

Machen wir einstweilen von der letzten derselben Gebrauch, so ergeben die Gleichungen (13) und (9):

$$(X u_n + Y v_n + Z w_n)^2 = (X^2 + Y^2 + Z^2) - \frac{1}{n_n^2}(A^2 + B^2 + C^2)$$

$$= (X^2 + Y^2 + Z^2) - \frac{1}{n_n^4}(L^2 + M^2 + N^2)$$

und daraus schliesslich:

$$\cos \vartheta = \frac{1}{n_n^2} \sqrt{\frac{L^2 + M^2 + N^2}{X^2 + Y^2 + Z^2}}. \tag{17}$$

Zur Ermittelung der Strahlrichtung selber benutzten wir die beiden *letzten* der Gleichungen (10), nämlich:

$$A u_s + B v_s + C w_s = 0$$
$$X u_s + Y v_s + Z w_s = 0.$$

Mittels derselben erhält man beispielsweise:

$$u_s^2 = \frac{(Y C - Z B)^2}{(Y C - Z B)^2 + (Z A - X C)^2 + (X B - Y A)^2}$$

und in Berücksichtigung des rechten Winkels zwischen Neumann'schem und Ketteler'schem Vector für den Nenner den Werth:

$$(A^2 + B^2 + C^2)\ (X^2 + Y^2 + Z^2).$$

Demnach schreibt sich definitiv [1]):

$$(18) \qquad \begin{cases} u_s = \dfrac{Y C - Z B}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)\ (X^2 + Y^2 + Z^2)}} \\ v_s = \dfrac{Z A - X C}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)\ (X^2 + Y^2 + Z^2)}} \\ w_s = \dfrac{X B - Y A}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)\ (X^2 + Y^2 + Z^2)}} \end{cases}$$

Der Strahl ist nach der electromagnetischen Theorie die Flussrichtung der gesammten objectiv vorhandenen Energie; längs ihm strömt also gleichzeitig die magnetische wie die electrische Energie, während die Energie der dielectrischen Polarisation zufolge Gleichung (9) nur eine modificirte Form der magnetischen Energie darstellt.

Während die bisherigen Gleichungen sämmtlich ohne Rücksicht auf das gewählte Coordinatensystem gültig sind, lassen wir von jetzt ab die Axen desselben mit den Krystallaxen zusammenfallen. Sodann machen wir zur Verknüpfung der Richtungen von Polarisation und electrischer Kraft den von der Erfahrung bestätigten, schon durch die Gleichungen (3) ausgesprochenen, Ansatz:

$$(19) \qquad L = n_1^2 X, \quad M = n_2^2 Y, \quad N = n_3^2 Z,$$

sodass:

$$L^2 + M^2 + N^2 = n_1^4 X^2 + n_2^4 Y^2 + n_3^4 Z^2.$$

1) Vgl. Poynting, Philos. Transact. **2**. p. 343. 1884; Drude, Physik des Aethers, p. 320.

Dies vorausgesetzt, sollen jetzt noch die beiden folgenden Ausdrücke, welche im nächstfolgenden Paragraphen eine nicht unwichtige Rolle spielen, nämlich:

$$\frac{f_p}{n^2} = \frac{1}{n_1^2} U_p u + \frac{1}{n_2^2} V_p v + \frac{1}{n_3^2} W_p w$$
$$n_s^2 f_e^s = -(n_1^2 U_e u_s + n_2^2 V_e v_s + n_3^2 W_e w_s)$$

auf ihren kürzesten Ausdruck gebracht und dadurch zum Winkel ϑ in Beziehung gesetzt werden.

Man erhält zunächst für ersteren der Reihe nach:

$$\frac{f_p}{n^2} = \frac{\frac{1}{n_1^2} L u + \frac{1}{n_2^2} M v + \frac{1}{n_3^2} N w}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}} = \frac{X u + Y v + Z w}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}$$
$$= (U_e u + V_e v + W_e w) \sqrt{\frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

Ebenso findet man für den zweiten:

$$n_s^2 f_e^s = -\frac{n_1^2 X u_s + n_2^2 Y v_s + n_3^2 Z w_s}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} = -\frac{L u_s + M v_s + N w_s}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$
$$= -(U_p u_s + V_p v_s + W_p w_s) \sqrt{\frac{L^2 + M^2 + N^2}{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Ersetzt man schliesslich die resp. Factoren durch ihre Werthe nach Gleichungen (15), (16) und (17), so erhält man einfach:

$$f_p = f_e^s = -\operatorname{tg} \vartheta \tag{20}$$

4. *Die electromagnetischen Differentialgleichungen.* Nunmehr multipliciren wir sämmtliche Gleichungen (8) und (12) mit $2\pi/T$. Dieselben lassen sich dann in Rücksicht auf die Form der einzuführenden Schwingungsausdrücke (14) auch so schreiben:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} &= n_1^2 \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \\ \frac{\partial M}{\partial t} &= n_2^2 \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= n_3^2 \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

$$(22)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial t} = \dfrac{\partial Y}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial B}{\partial t} = \dfrac{\partial Z}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial z} \\ \dfrac{\partial C}{\partial t} = \dfrac{\partial X}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial x}. \end{cases}$$

Dies sind bekanntlich die Hauptgleichungen der electromagnetischen Lichttheorie, und haben sich dieselben also durch rein optische Betrachtungen in einfachster Weise ableiten lassen.

Wir machen von denselben folgende Anwendungen:

a) Differentiirt man die Gleichungen (22) in Beziehung auf t und eliminirt mit Hülfe von (21) die Componenten X, Y, Z, so erhält man für den Neumann'schen Vector die Differentialgleichungen:

$$(23a)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \dfrac{1}{n_3^2}\dfrac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \dfrac{1}{n_2^2}\dfrac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{n_3^2}\dfrac{\partial B}{\partial y} + \dfrac{1}{n_2^2}\dfrac{\partial C}{\partial z}\right) \\ \dfrac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \dfrac{1}{n_3^2}\dfrac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \dfrac{1}{n_1^2}\dfrac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{n_3^2}\dfrac{\partial A}{\partial x} + \dfrac{1}{n_1^2}\dfrac{\partial C}{\partial z}\right) \\ \dfrac{\partial^2 C}{\partial t^2} = \dfrac{1}{n_2^2}\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \dfrac{1}{n_1^2}\dfrac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{1}{n_1^2}\dfrac{\partial B}{\partial y} + \dfrac{1}{n_2^2}\dfrac{\partial A}{\partial x}\right) \end{cases}$$

mit der Bedingung:

$$(23b)\qquad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0,$$

welch letztere eine Umformung der letzten der Gleichungen (7) ist.

Substituirt man darin die Schwingungsausdrücke (14b), und eliminirt man W_m mittels der Beziehung $W_m w = -(U_m u + V_m v)$, so erhalten die beiden ersten Gleichungen (23) die Form:

$$U_m\left[\frac{1}{n_3^2}v^2 + \frac{1}{n_2^2}(u^2+w^2) - \frac{1}{n^2}\right] = \left(\frac{1}{n_3^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)V_m u v$$

$$V_m\left[\frac{1}{n_3^2}u^2 + \frac{1}{n_1^2}(v^2+w^2) - \frac{1}{n^2}\right] = \left(\frac{1}{n_3^2} - \frac{1}{n_1^2}\right)U_m u v$$

Durch Multiplication derselben erhält man nach einigen Umformungen die wichtige Beziehung:

$$(24)\qquad \frac{n_1^2 u^2}{n^2 - n_1^2} + \frac{n_2^2 v^2}{n^2 - n_2^2} + \frac{n_3^2 w^2}{n^2 - n_3^2} = 0.$$

Dieselbe repräsentirt bekanntlich die Geschwindigkeitsfläche der Wellennormalen.

Weniger einfach gestalten sich die Beziehungen zwischen den Grössen U_m, V_m, W_m und u, v, w. Man erhält dieselben durch umständliche Eliminirungen aus den ursprünglichen Gleichungen (23). Dieselben sollen später auf einfacherem Wege abgeleitet werden.

b) Differentiirt man die Gleichungen (21) in Beziehung auf t und eliminirt man mit Hülfe von (22) die Componenten A, B, C, so erhält man für den Fresnel'schen Vector der Polarisationsschwingungen, bez. für den Vector der electrischen Kraft die Differentialgleichungen:

$$(25\,a)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 L}{\partial t^2} = n_1^2 \dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \Delta_2 X - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z}{\partial z}\right) \\ \dfrac{\partial^2 M}{\partial t^2} = n_2^2 \dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \Delta_2 Y - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z}{\partial z}\right) \\ \dfrac{\partial^2 N}{\partial t^2} = n_3^2 \dfrac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \Delta_2 Z - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z}{\partial z}\right) \end{cases}$$

mit der Bedingung:

$$(25\,b)\quad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = n_1^2 \frac{\partial X}{\partial x} + n_2^2 \frac{\partial Y}{\partial y} + n_3^2 \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Dieselbe entspricht der mittleren der Gleichungen (7).

Lässt man zunächst die Polarisation ausser Acht und substituirt die Schwingungsausdrücke (14b), so erhält man für die Cosinus der electrischen Kraft die einfachen Gleichungen:

$$(26)\quad \begin{cases} U_e (n^2 - n_1^2) = f_e'' n^2 u \\ V_e (n^2 - n_2^2) = f_e'' n^2 v \\ W_e (n^2 - n_3^2) = f_e'' n^2 w, \end{cases}$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(26\,a)\quad f_e'' = U_e u + V_e v + W_e w$$

und für welche zunächst die Bedingung gilt:

$$(26\,b)\quad n_1^2 U_e u + n_2^2 V_e v + n_3^2 W_e w = 0.$$

Durch bekannte Behandlung ergeben sich aus ihnen die Gesetze:

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{n_1^2 u^2}{n^2 - n_1^2} = \dfrac{n_2^2 v^2}{n^2 - n_2^2} + \dfrac{n_3^2 w^2}{n^2 - n_3^2} = 0 \\ \dfrac{n^2 u^2}{n^2 - n_1^2} + \dfrac{n^2 v^2}{n^2 - n_2^2} + \dfrac{n^2 w^2}{n^2 - n_3^2} = 1, \end{cases}$$

$$n^2 = \frac{n^4_1 U_e^2 + n^4_2 V_e^2 + n^4_3 W_e^2}{n_1^2 U_e^2 + n_2^2 V_e^2 + n_3^2 W_e^2}. \tag{28}$$

$$f_e^n = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n^2 u}{n^2 - n_1^2}\right)^2 + \left(\frac{n^2 v}{n^2 - n_2^2}\right)^2 + \left(\frac{n^2 w}{n^2 - n_3^2}\right)^2}}. \tag{29}$$

Die erstere der Gleichungen (27), welche die Geschwindigkeitsfläche der Wellennormalen darstellt, ist identisch mit der Neumann'schen Gleichung (23).

c) Um auch den Componenten der dielectrischen Polarisation gerecht zu werden, so mögen in den Gleichungen (25) sämmtliche X, Y, Z durch L, M, N ersetzt werden. Die erste derselben wird dann beispielsweise:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} = \frac{1}{n_1^2} \Delta_2 L - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{n_1^2}\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{1}{n_2^2}\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{1}{n_3^2}\frac{\partial N}{\partial z}\right).$$

Daraus ergiebt sich weiter:

$$U_p (n^2 - n_1^2) = f_p n_1^2 u \tag{30a}$$

oder in anderer Schreibart und bei Hinzufügung der übrigen Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} U_p\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{f_p}{n^2} u \\ V_p\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{f_p}{n^2} v \\ W_p\left(\frac{1}{n_3^2} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{f_p}{n^2} w, \end{array}\right. \tag{30}$$

worin f_p (vgl. p. 533) die Bedeutung hat:

$$\frac{1}{n^2} f_p = \frac{1}{n_1^2} U_p u + \frac{1}{n_2^2} V_p v + \frac{1}{n_3^2} W_p w, \tag{30b}$$

und mit der Bedingungsgleichung:

$$U_p u + V_p v + W_p w = 0. \tag{30c}$$

Hieraus ergeben sich ausser den Gleichungen (27) die weiteren neuen Gesetze:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_1^2} U_p^2 + \frac{1}{n_2^2} V_p^2 + \frac{1}{n_3^2} W_p^2. \tag{31}$$

$$f_p = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n_1^2 u}{n^2 - n_1^2}\right)^2 + \left(\frac{n_2^2 v}{n^2 - n_2^2}\right)^2 + \left(\frac{n_3^2 w}{n^2 - n_3^2}\right)^2}} = -\operatorname{tang} \vartheta. \tag{32}$$

Man kann nun schliesslich auch die Cosinus der Neumann'schen (magnetischen) Schwingungen mittels der Glei-

chungen (12) und unter Beihülfe von (9) leicht als Functionen von u, v, w berechnen, indem man z. B. die erste derselben auf die Form bringt:

$$U_m = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{\frac{1}{n_2^2} M w - \frac{1}{n_3^2} N v}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}} n^2$$
$$= \left(\frac{1}{n_2^2} V_p w - \frac{1}{n_3^2} W_p v\right) n^2.$$

Beim Einsetzen der Werthe der Gleichungen (30) erhält man so:

$$(33) \quad \begin{cases} U_m = f_p n^2 \dfrac{(n_2^2 - n_3^2) v w}{(n^2 - n_2^2)(n^2 - n_3^2)} \\ V_m = f_p n^2 \dfrac{(n_3^2 - n_1^2) u w}{(n^2 - n_3^2)(n^2 - n_1^2)} \\ W_n = f_p n^2 \dfrac{(n_1^2 - n_2^2) u v}{(n^2 - n_1^2)(n^2 - n_2^2)} \end{cases}$$

mit der durch sie bereits erfüllten Bedingungsgleichung:

$$(33\,b) \qquad U_m u + V_m v + W_m w = 0.$$

Diese Schwingungscosinus hängen hier also von den Producten je zweier Richtungscosinus der Wellennormale ab.

Zum Schluss möge noch constatirt werden, dass die Wellen der magnetischen Kraft, der electrischen Kraft und der dielectrischen Polarisation sich mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzen.

5. *Die Geschwindigkeitsfläche der Strahlen.* Geht man nunmehr zu den Gleichungen (26) zurück, so sind dort die Werthe U_e, V_e, W_e mit der Bedingung der Gleichung (26c) als Functionen von u, v, w, n, bez. f_e^n gegeben. Die Erfahrung lehrt nun, dass man sie ebenso gut auch als Functionen neuer Variabeln u_s, v_s, w_s, n_s, bez. f_e^s ansehen kann, indem man beispielsweise die erste derselben schreibt:

$$U_e = f_e^n \frac{n_n^2 u_n}{n_n^2 - n_1^2} = f_e^s \frac{n_s^2 u_s}{n_s^2 - n_1^2},$$

und diese neuen Variabeln der letzten der Gleichungen (10) entsprechen lässt. So entsteht für den Vector der electrischen Kraft (diesmal als Vector der Ketteler'schen Strahlschwingungen) das Gleichungensystem:

$$(34)\qquad \begin{cases} U_e(n_e^2 - n_1^2) = f_e^* n_e^2 u_e \\ V_e(n_e^2 - n_2^2) = f_e^* n_e^2 v_e \\ W_e(n_e^2 - n_3^2) = f_e^* n_e^2 w_e \end{cases}$$

mit der Bedingung:

$$(34\,b)\qquad U_e u_e + V_e v_e + W_e w_e = 0.$$

Vergleicht man dieselben mit den Fresnel'schen Gleichungen (30), so geht die Form der einen durch Vertauschen der n gegen $1/n$ oder der $1/n$ gegen n in die der anderen über. Man erhält daher statt der Gleichungen (27), (28), (29), (31), (32) ohne weiteres:

$$(35)\qquad \begin{cases} \dfrac{n_e^2 u_e^2}{n_e^2 - n_1^2} + \dfrac{n_e^2 v_e^2}{n_e^2 - n_2^2} + \dfrac{n_e^2 w_e^2}{n_e^2 - n_3^2} = 0 \\ \dfrac{n_1^2 u_e^2}{n_e^2 - n_1^2} + \dfrac{n_2^2 v_e^2}{n_e^2 - n_2^2} + \dfrac{n_3^2 w_e^2}{n_e^2 - n_3^2} = 1 \end{cases}$$

$$(36)\qquad n_e^2 = n_1^2 U_e^2 + n_2^2 V_e^2 + n_3^2 W_e^2$$

$$(37)\qquad f_e^* = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{n_e^2 u_e}{n_e^2 - n_1^2}\right)^2 + \left(\dfrac{n_e^2 v_e}{n_e^2 - n_1^2}\right)^2 + \left(\dfrac{n_e^2 w_e}{n_e^2 - n_3^2}\right)^2}} = -\operatorname{tg}\vartheta.$$

Wie man sieht, ist der hier dargelegte Zusammenhang zwischen Strahl und Normale ein rein analytischer, welcher sich auf keinerlei geometrische Anschauungsformen stützt. So wenig daher insbesondere das bekannte Umhüllungsverfahren zum Ausgang dient — und darin liegt, wie ich wiederholt hervorgehoben habe, für die Theorie der absorbirenden Medien ein nicht gering zu schätzender Fortschritt —, so beleuchtet doch die in Rede stehende Auffassung auch das Verhältniss der beiden Geschwindigkeitsflächen zu einander.

Ueberhaupt wird es auffallen; wie wenige umständliche Rechnungen die electromagnetische Theorie gegenüber der älteren Krystalloptik verlangt, und wie sich vielmehr aus den einfachsten Voraussetzungen die allseitigsten Resultate ergeben. Sogar die Attribute der magnetischen Welle haben theilweise ihre frühere schwere Zugänglichkeit verloren. Dass freilich u. a. die Richtungscosinus u_e, v_e, w_e als Functionen von u, v, w eine keineswegs einfache Form erhalten, wird nicht gerade

auffallen. Es erhellt das schon aus den Ausdrücken (18), deren erster sich auf die Gestalt bringen lässt:

$$u_s = \left[V_e \left(\frac{1}{n_1^2} U_p v - \frac{1}{n_2^2} V_p u \right) - W_e \left(\frac{1}{n_3^2} W_p u - \frac{1}{n_1^2} U_p w \right) \right] n^2.$$

6. *Die Grenzgleichungen.* Diejenigen Gleichungen, welche den Uebergang der Aetherstrahlung von einem ersten in ein zweites anisotropes Medium vermitteln, sind *zuerst* von mir im Sinne der electromagnetischen Lichttheorie aufgestellt worden. Sie haben für ein Coordinatensystem, dessen Z-Axe mit der Richtung des Lothes und dessen XY-Ebene mit der Trennungsfläche zusammenfällt, die Form [1]):

$$(38\,a) \quad \left\{ \begin{array}{c} X_1 = X_2, \qquad Y_1 = Y_2, \\ \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right)_1 = \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right)_2, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right)_1 = \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right)_2. \end{array} \right.$$

Ersetzt man nach Gleichungen (22) die Drehcomponenten durch die magnetischen Componenten, so werden die Grenzgleichungen noch einfacher und verständlicher:

$$(38) \qquad X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2; \quad A_1 = A_2, \quad B_1 = B_2.$$

Dieselben lassen ersichtlicherweise wieder Strahlschwingungen wie Normalschwingungen zu. Dabei ist bemerkenswerth, dass die Componenten der dielectrischen Polarisation in sie nicht eintreten.

Münster i. W., im April 1895.

1) Vgl. Ketteler, Theoret. Optik, p. 334—372.

9. *Die Gesetze der Lichtbewegung in absorbirenden Krystallen; von E. Ketteler.*

Die Theorie der dispergirenden und absorbirenden anisotropen Medien hat mir seit Jahren als hochinteressantes, erstrebenswerthes Ziel vorgeschwebt. Insbesondere war es die bei manchen Krystallen bekannte Dispersion der Symmetrieaxen, welche mich veranlasste, das ganze Problem von dem früheren, mehr statischen Gesichtspunkte auf einen allgemeineren dynamischen zu erheben.

Wenngleich meine bisherige Behandlung dieses Themas sich auf „Strahlschwingungen" beschränkte und daher eine einseitige blieb, so reicht doch das in meinem Buche[1]) über durchsichtige Krystalle Gesagte vollständig hin, um die betreffenden Erscheinungen zu construiren. Dahingegen bedürfen die Entwickelungen bezüglich der absorbirenden Krystalle einer Ergänzung, die im Folgenden zunächst für einfache, nur aus einer einzigen Molecularqualität bestehende Medien gegeben werden soll. Die Erweiterung der Theorie auf complicirtere Medien ergiebt sich dann von selber.

Es möge vorab noch bemerkt werden, dass durch die jetzige völlige Coordinirung von Strahl und Normale die früher gebliebenen Unklarheiten beseitigt werden konnten, und dass, ungeachtet der rechnerischen Schwierigkeiten, welche die Auflösung biquadratischer Gleichungen mit sich bringt, das erhaltene Formelsystem ein so übersichtliches ist, dass es bei continuirlicher Abnahme der Reibungsconstante sich in stetiger und anschaulicher Weise den bekannten Formeln der durchsichtigen Krystalle nähert, um schliesslich in diese überzugehen.

Da bekanntlich in den absorbirenden Medien die Schwingungen im allgemeinen zur Wellebene schräg stehende (unter Umständen longitudinale) Ellipsen sind, so drängt sich u. a. die Frage auf, nach welchen Gesetzen sich die diesen elliptischen Schwingungen entsprechende Energie, d. h. die Summe

1) Ketteler, Theoretische Optik, p. 319—328.

der Quadrate der ohne Phasendifferenz zusammengelegten Amplitutencomponenten, also die Energie der sogenannten „restaurirten" Welle, fortpflanzen werde. Gerade das Aufwerfen dieser Frage hat wesentlich zur Lösung der Aufgabe beigetragen.

1. *Veranschaulichung der Begriffe der electrischen Kraft und der dielectrischen Polarisation mittels der Annahme des Zusammenschwingens von Aether und Molecülen.* Die in Betracht kommenden Differentialgleichungen sollen wieder auf die Symmetrieaxen des Krystalles als Coordinatenaxen bezogen werden; sie haben dann nach früherer Bezeichnung[1]) die Form:

$$(1)\qquad \begin{cases} m\,\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - B_1 m' \mathfrak{k}' \xi' = \mathfrak{e} A_2 (\xi + \xi') \\ m\,\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - B_2 m' \mathfrak{k}' \eta' = \mathfrak{e} A_2 (\eta + \eta') \\ m\,\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} - B_3 m' \mathfrak{k}' \zeta = \mathfrak{e} A_2 (\zeta + \zeta') \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} C + \dfrac{\partial^2\xi'}{\partial t^2} = -\mathfrak{k}'\xi' - \mathfrak{g}'\dfrac{\partial\xi'}{\partial t} \\ \dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2} C + \dfrac{\partial^2\eta'}{\partial t^2} = -\mathfrak{k}'\eta' - \mathfrak{g}'\dfrac{\partial\eta'}{\partial t} \\ \dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} C + \dfrac{\partial^2\zeta'}{\partial t^2} = -\mathfrak{k}'\zeta - \mathfrak{g}'\dfrac{\partial\zeta'}{\partial t}\ ^2) \end{cases}$$

Darin beziehen sich m, ξ, η, ζ auf Dichtigkeit und transversale Schwingungscomponenten des mit dem Weltäther als gleich angenommenen intermolecularen Aethers, m', ξ', η', ζ'

1) Vgl. Ketteler, Theor. Optik, p. 308; Wied. Ann. **49.** p. 524. 1893 und **53.** p. 830. 1894.

2) Der in den Gleichungen (2) u. a. enthaltene Satz, dass die Lage der Absorptionsstreifen in einem absorbirenden Krystall von der Orientirung zu den Krystallaxen unabhängig sei, ist einige Jahre nach seiner Aufstellung durch Beobachtungen von H. Becquerel (Compt. rend. Januar und März 1887) bestätigt worden. — Die streng electrische Dispersionstheorie der Hrn. v. Helmholtz und Drude darf man als eine entsprechende Umformung dieser Gleichungen betrachten; dieselbe ergiebt die nämlichen Resultate. — Die ältere mechanische Theorie von Helmholtz dagegen führte zu Gleichungen, welche in einer gewissen eigenthümlichen Verbindung des Princips der Reaction mit dem der Resonanz bestanden. Bekanntlich haben diese heute nicht mehr haltbaren Gleichungen seinerzeit eine fast allseitige Zustimmung gefunden.

auf die entsprechenden Grössen der Körpermolecüle und ξ^1, η^1, ζ^1 auf gewisse Longitudinalcomponenten des Aethers; ϵ ist die Deformationsconstante desselben, Δ_2 hat die bekannte Laplace'sche Bedeutung, und sind B_1, B_2, B_3, C, $\mathfrak{k}' = 4\pi/T_m^2$ und $\mathfrak{g}' = G\,2\pi/T_m$ Constanten.

Wir setzen jetzt in den Gleichungen (1):

$$\text{(3a)} \qquad \begin{cases} m\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - B_1 m'\mathfrak{k}'\xi' = m\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} \\ m\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - B_2 m'\mathfrak{k}'\eta' = m\dfrac{\partial^2\mu}{\partial t^2} \\ m\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} - B_3 m'\mathfrak{k}'\zeta' = m\dfrac{\partial^2\nu}{\partial t^2} \end{cases}$$

oder auch, wenn $\mathfrak{k}'\xi' \ldots$ mittels der Gleichungen (2) eliminirt werden:

$$\text{(3b)} \qquad \begin{cases} (m + m' B_1 C)\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + m' B_1\dfrac{\partial^2\xi'}{\partial t^2} + m' B_1\mathfrak{g}'\dfrac{\partial\xi'}{\partial t} = m\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} \\ (m + m' B_2 C)\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + m B_2\dfrac{\partial^2\eta'}{\partial t^2} + m' B_2\mathfrak{g}'\dfrac{\partial\eta'}{\partial t} = m\dfrac{\partial^2\mu}{\partial t^2} \\ (m + m' B_3 C)\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + m' B_3\dfrac{\partial^2\zeta'}{\partial t^2} + m' B_3\mathfrak{g}'\dfrac{\partial\zeta'}{\partial t} = m\dfrac{\partial^2\nu}{\partial t^2}. \end{cases}$$

In beiden Fällen dürfen wir die rechts stehenden Grössen bezeichnen als *die auf reinen Aether reducirten Componenten der bewegenden Kraft der Aether- und Körpertheilchen*, dieselbe gemessen durch die Beschleunigungen. Die letzten Gleichungen lassen sich ohne weiteres einmal in Beziehung auf t integriren, sodass z. B. die erste derselben wird:

$$(m + m' B_1 C)\frac{\partial\xi}{\partial t} + m' B_1\frac{\partial\xi'}{\partial t} + m' B_1\mathfrak{g}'\xi' = m\frac{\partial\lambda}{\partial t}.$$

Es bedeutet dann die rechts stehende Grösse *die auf reinen Aether reducirte Bewegungsquantität* ($\partial\lambda/\partial t$ *selber die Geschwindigkeitscomponente*) *der Aether- und Körpertheilchen.* Eine weitere Integration würde, sofern wenigstens die auf der linken Seite vorkommende Reibungsconstante $\mathfrak{g}'$ nicht verschwindet, die Anschaulichkeit stören, und soll aus diesem Grunde eine entsprechende Behandlung der Gleichungen (3a) überhaupt vermieden werden. Analytisch ist selbstverständlich eine solche Rücksichtnahme überflüssig und unter Umständen sogar schädlich.

Es liegt nun offenbar nahe, die ξ, η, ζ mit den Componenten der electrischen Kraft und die λ, μ, ν mit denen der dielectrischen Polarisation zu analogisiren. Schreibt man in der That die erste der Gleichungen (3a) so:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\left(1 + B_1 \mathfrak{f}' \frac{m' \xi'}{m \xi}\right)$$

und beachtet, dass nach späteren Entwickelungen der eingeklammerte Factor nichts anderes ist, als das Quadrat des Hauptbrechungsindex n_1, so erhält man nunmehr:

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} = n_1^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} = n_2^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} = n_3^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}.$$

Diese Substitutionen in Gleichungen (1) führen sie dann sofort in die Form der Gleichungen (4) des vorigen Aufsatzes über, wenn man auch hier, wie dort geschehen, $v^2 = c/m = 1$ setzt.

Den beiden Gleichungensystemen (1) und (2) fügen wir schliesslich die Bedingungen der Senkrechtheit hinzu:

$$(5) \qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \xi'}{\partial x} + \frac{\partial \eta'}{\partial y} + \frac{\partial \zeta'}{\partial z} = 0$$

für die Strahlschwingungen und:

$$(6a) \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}\right) = 0$$

für die Normalschwingungen. Letztere Gleichung schreibt sich in Rücksicht auf (3a) auch so:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left[m \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) - m' B_1 \mathfrak{f}' \frac{\partial \xi'}{\partial x}\right] + \left[m \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) - m' B_2 \mathfrak{f}' \frac{\partial \eta'}{\partial y}\right] \\ &\qquad + \left[m \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) - m' B_3 \mathfrak{f}' \frac{\partial \zeta'}{\partial z}\right] = 0. \end{aligned} \right.$$

In der Optik führt man die beiden ersten Bedingungen (5) auf ein Incompressibilitätsprincip zurück; bezüglich der letzten behalte ich mir besondere Darlegung vor.

2. *Die Schwingungsausdrücke und ihre Substitution.* Den Schwingungsausdrücken geben wir wie bisher die reellen Formen:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \mathfrak{A}_x e^{-\varkappa \delta'} \cos(\varphi - \psi_x) \\ \eta &= \mathfrak{A}_y e^{-\varkappa \delta'} \cos(\varphi - \psi_y) \\ \zeta &= \mathfrak{A}_y e^{-\varkappa \delta'} \cos(\varphi - \psi_z) \end{aligned} \right.$$

für die Transversalcomponenten der Aethertheilchen,

$$(8)\qquad \begin{cases} \xi' = \mathfrak{A}'_x\, e^{-\varkappa\delta'} \cos(\varphi - \psi_x - \Delta) \\ \eta' = \mathfrak{A}'_y\, e^{-\varkappa\delta'} \cos(\varphi - \psi_y - \Delta) \\ \zeta' = \mathfrak{A}_z\, e^{-\varkappa\delta'} \cos(\varphi - \psi_z - \Delta) \end{cases}$$

für die der Molecüle und:

$$(9)\qquad \begin{cases} \xi^l = \mathfrak{A}^l_x\, e^{-\varkappa\delta'} \cos(\varphi - \psi_x - l) \\ \eta^l = \mathfrak{A}^l_y\, e^{-\varkappa\delta'} \cos(\varphi - \psi_y - l) \\ \zeta^l = \mathfrak{A}^l_z\, e^{-\varkappa\delta'} \cos(\varphi - \psi_z - l) \end{cases}$$

für die Longitudinalcomponenten der Aethertheilchen. Darin bedeuten:

$$\delta' = u'x + v'y + w'z$$

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\nu(ux + vy + wz)}{\lambda}\right),$$

und sollen die hierin vorkommenden ν und $\varkappa$ als *Refractionscoefficient*, bez. *Extinctionscoefficient* bezeichnet werden, während λ wieder die Wellenlänge im Weltäther bedeutet.

Was dann zunächst die Integration der Gleichungen (2) betrifft, so liefert die Substitution der Ausdrücke (7) und (8) die Beziehungen:

$$(10)\qquad \mathfrak{A}'_x/\mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}'_y/\mathfrak{A}_y = \mathfrak{A}'_z/\mathfrak{A}_z = \mathfrak{A}'/\mathfrak{A},$$

$$(11)\qquad \frac{\mathfrak{A}'\cos\Delta}{\mathfrak{A}} = \frac{C\left(\frac{T^2}{T_m^2} - 1\right)}{\left(\frac{T^2}{T_m^2} - 1\right)^2 + G^2\frac{T^2}{T_m^2}}, \quad \frac{\mathfrak{A}'\sin\Delta}{\mathfrak{A}} = \frac{C\,G\,\frac{T}{T_m}}{\left(\frac{T^2}{T_m^2} - 1\right)^2 + G^2\frac{T^2}{T_m^2}}.$$

Ferner lässt sich die erste der beiden sogenannten Incompressibilitätsgleichungen (5) bezüglich der Strahlschwingungen auf die Gestalt bringen:

$$\mathfrak{A}_x f_x \sin(\varphi - \psi_x - \vartheta_x) + \mathfrak{A}_y f_y \sin(\varphi - \psi_y - \vartheta_y) + \mathfrak{A}_z f_z \sin(\varphi - \psi_z - \vartheta_z) = 0,$$

worin f_x, f_y, f_z; ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z die Bedeutung haben:

$$f_x = \sqrt{\nu^2 u^2 + \varkappa^2 u'^2}, \quad f_y = \sqrt{\nu^2 v^2 + \varkappa^2 v'^2}, \quad f_z = \sqrt{\nu^2 w^2 + \varkappa^2 w'^2}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta_x = \frac{\varkappa u'}{\nu u}, \quad \operatorname{tg}\vartheta_y = \frac{\varkappa v'}{\nu v}, \quad \operatorname{tg}\vartheta_z = \frac{\varkappa w'}{\nu w}.$$

Sie zerfällt bei Eliminirung der laufenden Zeit in die beiden Einzelgleichungen:

$$\mathfrak{A}_x f_x \cos(\psi_x + \vartheta_x) + \mathfrak{A}_y f_y \cos(\psi_y + \vartheta_y) + \mathfrak{A}_z f_z \cos(\psi_z + \vartheta_z) = 0$$
$$\mathfrak{A}_x f_x \sin(\psi_x + \vartheta_x) + \mathfrak{A}_y f_y \sin(\psi_y + \varphi_y) + \mathfrak{A}_z f_z \sin(\psi_z + \vartheta_z) = 0.$$

Diese auch für isotrope Medien geltende Doppelgleichung ist selbstverständlich unabhängig von der Richtung der Coordinatenaxen. Bezieht man sie auf ein erstes System, für welches etwa $v = 0$ wird, so fallen bei passendem Quadriren und Addiren die Phasen aus der resultirenden Gleichung heraus, und diese bleibt auch dann von ihnen frei, wenn die Axen durch Drehung in irgend welche neue Richtungen übergeführt werden. Demnach verlangt die Coexistenz beider Gleichungen, dass gleichzeitig:

$$(12) \qquad \begin{cases} \psi_x + \vartheta_x = \psi_y + \vartheta_y = \psi_z + \vartheta_z \\ \mathfrak{A}_x f_x + \mathfrak{A}_y f_y + \mathfrak{A}_z f_z = 0 \end{cases}$$

werde. Dividirt man die zweite durch $\sqrt{v^2 + x^2}$ und setzt, der Cosinusbedingung entsprechend:

$$(13)\ \mathfrak{u} = \sqrt{\frac{v^2 u^2 + x^2 u'^2}{v^2 + x^2}},\quad \mathfrak{v} = \sqrt{\frac{v^2 v^2 + x^2 v'^2}{v^2 + x^2}},\quad \mathfrak{w} = \sqrt{\frac{v^2 w^2 + x^2 w'^2}{v^2 + x^2}},$$

so schreibt sich dieselbe, unter $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ die Richtungscosinus der restaurirten electrischen Kraft verstanden, definitiv [1]):

$$(14) \qquad \mathfrak{U}\,\mathfrak{u} + \mathfrak{V}\,\mathfrak{v} + \mathfrak{W}\,\mathfrak{w} = 0.$$

Es ordnet sich also einer gegebenen Strahlrichtung u, v, w, eine gewisse Hülfsrichtung u, v, w *zu, welche senkrecht auf der restaurirten electrischen Kraft steht.* Dieselbe Folgerung ergiebt die zweite der Gleichungen (5).

3. *Fortsetzung.* Behandeln wir in ähnlicher Weise die für Normalschwingungen geltende Bedingungsgleichung (6), so geht beispielsweise das erste Glied derselben bei Substitution der Ausdrücke (7) und (8) über in:

$$-4\pi^2 f_x \left[m \frac{\mathfrak{A}_x}{T^2} \sin(\varphi - \psi_x - \vartheta_x) + m' B_1 \frac{\mathfrak{A}'_x}{T_m^2} \sin(\varphi - \psi_x - \vartheta_x - \Delta) \right]$$
$$= -\frac{4\pi^2}{T^2} f_x \left[\left(m \mathfrak{A}_x + m' B_1 \frac{T^2}{T_m^2} \mathfrak{A}'_x \cos \Delta \right) \sin(\varphi - \psi_x - \vartheta_x) \right.$$
$$\left. + m' B_1 \frac{T^2}{T_m^2} \mathfrak{A}'_x \sin \Delta \cos(\varphi - \psi_x - \vartheta_x) \right],$$

[1] In meiner Optik bin ich 1885 zu diesem Schlusse noch nicht direct, sondern auf theilweise mühsamen Umwegen gelangt (vgl. p. 303).

worin f_x die obige Bedeutung hat. Setzt man die eingeklammerten Factoren gleich $m\mathfrak{A}_x^{\prime}(1 + p D_1)$, bez. gleich $m\mathfrak{A}_x q D_1$ und schreibt abkürzungsweise:

$$(15)\qquad \begin{cases} \mathfrak{n}_1^2 = \sqrt{(1 + p D_1)^2 + (q D_1)^2} \\ \mathfrak{n}_2^2 = \sqrt{(1 + p D_2)^2 + (q D_2)^2}, \\ \mathfrak{n}_3^2 = \sqrt{(1 + p D_3)^2 + (q D_3)^2} \end{cases}$$

so lässt sich Gleichung (6) die Form geben:

$$\mathfrak{n}_1^2 \mathfrak{A}_x f_x \sin(\varphi - \psi_x - \vartheta_x - \beta_x) + \mathfrak{n}_2^2 \mathfrak{A}_y f_y \sin(\varphi - \psi_y - \vartheta_y - \beta_y) + \mathfrak{n}_3^2 \mathfrak{A}_z f_z \sin(\varphi - \psi_z - \vartheta_z - \beta_z) = 0.$$

Sie zerfällt vermöge einer ähnlichen Ueberlegung wie oben in zwei Einzelgleichungen, von denen die hier in Betracht kommende die definitive Gestalt bekommt:

$$(16)\qquad \mathfrak{n}_1^2 \mathfrak{U} \mathfrak{u} + \mathfrak{n}_2^2 \mathfrak{B} \mathfrak{v} + \mathfrak{n}_3^2 \mathfrak{W} \mathfrak{w} = 0.$$

Die darin vorkommenden Grössen p, q; D_1, D_2, D_3 erhalten durch Zuziehung der Gleichungen (11), wenn in diesen noch die Quotienten T/T_m durch die ihnen proportionalen λ/λ_m ersetzt werden, die Bedeutung:

$$(17)\qquad \begin{cases} D_1 = \dfrac{m'}{m} B_1 C, \quad D_2 = \dfrac{m'}{m} B_2 C, \quad D_3 = \dfrac{m'}{m} B_3 C \\ p = \dfrac{1 - \dfrac{\lambda_m^2}{\lambda^2}}{\left(1 - \dfrac{\lambda_m^2}{\lambda^2}\right)^2 + G^2 \dfrac{\lambda_m^2}{\lambda^2}}, \quad q = \dfrac{G \dfrac{\lambda_m}{\lambda}}{\left(1 - \dfrac{\lambda_m^2}{\lambda^2}\right)^2 + G^2 \dfrac{\lambda_m^2}{\lambda^2}}, \end{cases}$$

während nach wie vor $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ durch die Ausdrücke (13) definirt sind. Schreiben wir Gleichung (16) so:

$$(16\,\mathrm{b})\qquad \mathfrak{U}_p \mathfrak{u} + \mathfrak{B}_p \mathfrak{v} + \mathfrak{W}_p \mathfrak{w} = 0,$$

so lässt sich sagen: *Jeder gegebenen Normalrichtung u, v, w ordnet sich eine gewisse Hülfsrichtung* $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ *zu, welche senkrecht auf der restaurirten dielectrischen Polarisation steht.*

Was nunmehr schliesslich die Integration der Differentialgleichungen (1) betrifft, so führt dieselbe, wie bereits früher[1]) gezeigt, zu dem definitiven Gleichungensystem:

[1]) Vgl. Ketteler, Theoret. Optik, p. 310. 1885; Wied. Ann. 49. p. 526. 1893.

Auf dem *kürzesten* Wege erhält man diese Gleichungen, wenn

$$(18)\quad \begin{cases} \sqrt{p^2+q^2}\,(D_1 - D)\,\mathfrak{U} = \operatorname{tang}\Theta\,\sqrt{(\nu^2-\varkappa^2)+4\,\nu^2\varkappa^2\cos^2\varrho}\,.\,\mathfrak{u} \\ \sqrt{p^2+q^2}\,(D_2 - D)\,\mathfrak{V} = \operatorname{tang}\Theta\,\sqrt{(\nu^2-\varkappa^2)+4\,\nu^2\varkappa^2\cos^2\varrho}\,.\,\mathfrak{v}. \\ \sqrt{p^2+q^2}\,(D_3 - D)\,\mathfrak{W} = \operatorname{tang}\Theta\,\sqrt{(\nu^2-\varkappa^2)+4\,\nu^2\varkappa^2\cos^2\varrho}\,.\,\mathfrak{w} \end{cases}$$

Darin entspricht die Variable D den Gleichungen:

$$(19)\qquad \nu^2 - \varkappa^2 = 1 + p\,D, \quad 2\,\nu\,\varkappa\cos\varrho = q\,D$$

und ist sonach:

$$(19\,\mathrm{b})\quad \begin{cases} \sqrt{(\nu^2-\varkappa^2)^2+4\,\nu^2\varkappa^2\cos^2\varrho} = \sqrt{(1+p\,D)^2+(q\,D)^2} = \mathfrak{n}^2, \\ \sqrt{(\nu^2-\varkappa^2-1)^2+4\,\nu^2\varkappa^2\cos^2\varrho} = \sqrt{p^2+q^2}\,.\,D. \end{cases}$$

ϱ ist der Winkel zwischen Propagationsrichtung und Extinctionsrichtung und daher in unserem Falle gleich dem Brechungswinkel r, sodass

$$(20)\qquad \cos\varrho = \cos r = u\,u' + v\,v' + w\,w'.$$

Endlich ist $\operatorname{tg}\Theta = \mathfrak{U}'/\mathfrak{U}$ der Quotient der restaurirten Longitudinal- und Transversalschwinguugen des Aethers (der elektrischen Kraft), und Θ selbst misst den Winkel zwischen der restaurirten electrischen Kraft und der restaurirten dielectrischen Polarisation oder den gleich grossen Winkel zwischen den Richtungen $\mathfrak{u}_s$, $\mathfrak{v}_s$, $\mathfrak{w}_s$ und $\mathfrak{u}_n$, $\mathfrak{v}_n$, $\mathfrak{w}_n$.

---

man in Ansehung der ebenfalls zulässigen, complexen Schwingungsausdrücke:

$$\xi = \mathfrak{A}_x(\cos\psi_x + \sqrt{-1}\sin\varphi_x)$$

$$\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{[\nu u+\sqrt{-1}\,\varkappa u']x+[\nu v+\sqrt{-1}\,\varkappa v']y+[\nu w+\sqrt{-1}\,\varkappa w']z}{\lambda}\right)\ldots$$

in den Hauptgleichungen (26) p. 535, und zwar in der Form:

$$A_x(n^2 - n_1^2) = (n\,f\,A)\,n\,u = F\,n\,u \ \ldots$$

die Substitutionen macht:

$$A_x = \mathfrak{A}_x(\cos\psi_x + \sqrt{-1}\sin\psi_x), \quad F = F_1 + F_2\sqrt{-1}$$

$$n^2 = 1 + (p + q\sqrt{-1})\,D, \qquad n\,u = \nu\,u + \varkappa u'\sqrt{-1}\ldots$$

Durch Trennung des Reellen und Imaginären spaltet sich dann jede dieser Gleichungen in zwei einzelne, und durch Quadriren und Addiren derselben erhält man schliesslich:

$$\sqrt{p^2+q^2}\,(D_1 - D)\,\mathfrak{A}_x = \sqrt{F_1^2+F_2^2}\,\sqrt{\nu^2 u^2 + \varkappa^2 u'^2}\ldots,$$

welche Gleichungen materiell mit denen des Textes übereinstimmen.

4. *Die Gesetze der Doppelbrechung und Doppelabsorption.* Von jetzt ab werde ich Strahlrichtung und Normalrichtung durch angehängte s und n unterscheiden.

Man erhält zunächst durch bekannte Behandlung der Hauptgleichungen (18) in Verbindung mit der Bedingungsgleichung (14) der Strahlschwingungen:

$$\frac{\mathfrak{u}_s^2}{D_1 - D_s} + \frac{\mathfrak{v}_s^2}{D_2 - D_s} + \frac{\mathfrak{w}_s^2}{D_3 - D_s} = 0 \tag{21}$$

$$D_s = D_1 \mathfrak{U}^2 + D_2 \mathfrak{V}^2 + D_3 \mathfrak{W}^2 \tag{22}$$

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\mathfrak{n}_s^2 \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{u}_s}{D_1 - D_s}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{v}_s}{D_2 - D_s}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{w}_s}{D_3 - D_s}\right)^2}}. \tag{23}$$

$$\begin{cases} \nu_s^2 - \varkappa^2 - 1 = p\, D_s \\ 2\, \nu_s \varkappa \cos r_s = q\, D_s. \end{cases} \tag{24}$$

Dagegen liefert die Verbindung der Gleichungen (18) mit der Bedingungsgleichung (16) der Normalschwingungen:

$$\frac{\mathfrak{n}_1^2\, \mathfrak{u}_n^2}{D_1 - D_n} + \frac{\mathfrak{n}_2^2\, \mathfrak{v}_n^2}{D_2 - D_n} + \frac{\mathfrak{n}_3^2\, \mathfrak{w}_n^2}{D_3 - D_n} = 0 \tag{25}$$

$$D_n = \frac{\mathfrak{n}_1^2 D_1 \mathfrak{U}^2 + \mathfrak{n}_2^2 D_2 \mathfrak{V}^2 + \mathfrak{n}_3^2 D_3 \mathfrak{W}^2}{\mathfrak{n}_1^2 \mathfrak{U}^2 + \mathfrak{n}_2^2 \mathfrak{V}^2 + \mathfrak{n}_3^2 \mathfrak{W}^2} \tag{26}$$

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\mathfrak{n}_n^2 \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{u}_n}{D_1 - D_n}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{v}_n}{D_2 - D_n}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{w}_n}{D_3 - D_n}\right)^2}}. \tag{27}$$

$$\begin{cases} \nu_n^2 - \varkappa^2 - 1 = p\, D_n \\ 2\, \nu_n \varkappa \cos r_n = q\, D_n. \end{cases} \tag{28}$$

Dabei ist zu bemerken, dass nur der Refractionscoefficient ν, nicht aber der Extinctionscoefficient $\varkappa$ für Strahl und Normale verschiedene Werthe hat. [1])

Sofern nun die Gleichungen (21) und (25) für eine gegebene Richtung $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ zwei verschiedene D liefern, so er-

1) Dass in der That $\varkappa_n = \varkappa_s = \varkappa$ sein muss, ergiebt sich am einfachsten aus der p. 531 aufgestellten Bedingungsgleichung $n_n \delta_n = n_s \delta_s$, sofern man darin zunächst die Ausdrücke (14) und sodann für absorbirende Medien die in der Anmerkung auf p. 547 benutzten complexen Ausdrücke einführt. Sie zerfällt so in die Einzelgleichungen: $\nu_n \delta_n = \nu_s \delta_s$, $\varkappa_s = \varkappa_n$.

hält man bei successivem Einsetzen derselben in die Gleichungen (24) und (28) und Auflösen dieser letzteren in Beziehung auf ν und $\varkappa$ zwei verschiedene Paare von Refractions- und Extinctionscoefficienten, welche sich dieser Richtung zuordnen. Der Krystall zeigt also zugleich doppelte Brechung und doppelte Absorption.

Dies vorausgesetzt, denken wir uns die Normale einer an den Krystall geschliffenen ebenen Fläche zugleich als Einfallsloth und als Extinctionsnormale durch die auf die Krystallaxen bezogenen Cosinus u', v', w' gegeben. Als anstossendes Medium wurde der Einfachheit halber der dispersionslose Aether angenommen. Der Krystall selbst möge durch seine axialen Attribute D_1, D_2, D_3, sowie durch seine charakteristische Wellenlänge λ_m und seine Reibungsconstante G vollständig bestimmt sein. Es soll dann für eine beliebige Farbe zu jeder im Inneren desselben gegebenen Strahlrichtung die zugehörige Normale und die entsprechende äussere Welle und zu jeder im Inneren gegebenen Normale die coordinirte Strahlrichtung und äussere Welle gefunden und gleichzeitig Refractions- und Extinctionscoefficient berechnet werden.

I. Gegeben sei eine Krystallrichtung als *Strahl*richtung durch die Cosinus u_s, v_s, w_s und durch den sich nach Gleichung (20) ergebenden Strahlbrechungswinkel r_s. Die Gleichungen (24) ergeben dann in Verbindung mit (21) und (13) folgende Formen:

$$(29)\quad \begin{cases} \nu_s^2 - \varkappa^2 - 1 = p\, D_s = p\, F_s(\nu_s,\ \varkappa;\ u_s,\ v_s,\ w_s;\ u',\ v',\ w') \\ 2\,\nu_s\,\varkappa \cos r_s = q\, D_s = q\, F_s(\nu_s,\ \varkappa;\ u_s,\ v_s,\ w_s;\ u',\ v',\ w'), \end{cases}$$

worin F_s ein Functionszeichen bedeutet. Diese Gleichungen seien in Beziehung auf ν_s und $\varkappa$ aufgelöst. Man erhält dann sofort aus Gleichungen (13) die der Richtung u_s, v_s, w_s sich zuordnende Richtung $\mathfrak{u}_s$, $\mathfrak{v}_s$, $\mathfrak{w}_s$, sowie aus Gleichung (19b) den Werth von $\mathfrak{n}_s^2$ und weiter aus Gleichung (23) den Winkel Θ. Um die Ebene kennen zu lernen, in welcher derselbe an $\mathfrak{u}_s$, $\mathfrak{v}_s$, $\mathfrak{w}_s$ anzulegen ist, um die Richtung $\mathfrak{u}_n$, $\mathfrak{v}_n$, $\mathfrak{w}_n$ zu erhalten, construire man an Fläche der Gleichung (21) im Schnittpunkt mit dem gegebenen Hülfsstrahle eine Tangentialebene und fälle vom Mittelpunkt auf dieselbe ein Perpendikel; die Ebene von Perpendikel und Strahl ist dann aus Symmetrie-

gründen die gesuchte Ebene. Ist so $\mathfrak{u}_n$, $\mathfrak{v}_n$, $\mathfrak{w}_n$ gefunden, so gibt Gleichung (25) das entsprechende D_n, und man erhält weiter sowie aus Gleichungen (28) die Werthe von ν_n und $\cos r_n$. Schliesslich geben die Beziehungen:

$$\nu_s / \nu_n = \cos \vartheta, \quad \nu_n \sin r_n = \sin e$$

den Winkel ϑ zwischen Strahl und Normale sowie den Austritts- oder Einfallswinkel e. — Für senkrechten Eintritt wird insbesondere:

$$u_s = u' = \mathfrak{u}_s, \; v_s = v' = \mathfrak{w}_s, \; w_s = w' = \mathfrak{w}_s; \; r_s = 0$$

und sind die Gleichungen (24) ohne weiteres auflösbar.

II. Gegeben sei eine Krystallrichtung als *Normal*richtung durch die Cosinus u_n, v_n, w_n und durch den Normalbrechungswinkel r_n. Die Gleichungen (28) ergeben dann in Verbindung mit (25) und (13) die Formen:

$$(30) \quad \begin{cases} \nu_n^2 - \varkappa^2 - 1 = p\, D_n = p\, F_n(\nu_n, \varkappa; u_n, v_n, w_n; u', v', w') \\ 2\, \nu_n \varkappa \cos r_n = q\, D_n = q\, F_n(\nu_n, \varkappa; u_n, v_n, w_n; u', v', w'). \end{cases}$$

Diese Gleichungen seien in Beziehung anf ν_n und $\varkappa$ aufgelöst. $\nu_n \sin r_n$ gibt dann sofort den Einfallswinkel e. Weiter erhält man aus Gleichungen (13) die der Richtung u_n, v_n, w_n sich zuordnende Richtung $\mathfrak{u}_n$, $\mathfrak{v}_n$, $\mathfrak{w}_n$ sowie aus Gleichung (27) den Winkel θ. Um wieder die Ebene dieses Winkels kennen zu lernen, bilde man zur Fläche der Gleichung (25) die Enveloppe und suche denjenigen Berührungspunkt, welchen die am Endpunkte der Richtung $\mathfrak{u}_n$, $\mathfrak{v}_n$, $\mathfrak{w}_n$ senkrecht zu derselben construirte Ebene mit der Enveloppe gemein hat. Eine durch diese Normale und den Berührungspunkt hindurchgelegte Ebene ist alsdann aus Symmetriegründen die gesuchte Ebene. Ist so durch Anlegung des Winkels θ an $\mathfrak{u}_n$, $\mathfrak{v}_n$, $\mathfrak{w}_n$ die Richtung $\mathfrak{u}_s$, $\mathfrak{v}_s$, $\mathfrak{w}_s$ gefunden, so gibt Gleichung (21) das entsprechende D_s, und man erhält schliesslich aus Gleichungen (24) die Werthe von ν_s und $\cos r_s$. Der Quotient von ν_s und ν_n liefert wiederum ϑ. — Für senkrechten Eintritt wird insbesondere:

$$u_n = u' = \mathfrak{u}_n, v_n = v' = \mathfrak{v}_n, w_n = w' = \mathfrak{w}_n; r_n = e = 0,$$

und sind die Gleichungen (28) ohne Weiteres auflösbar.

5. *Specialisirung für die Hauptschnitte.* Leider sind die hier verlangten Rechnungen ziemlich verwickelt und umständlich. Sie vereinfachen sich natürlich beträchtlich für optisch einaxige Medien sowie für die Hauptschnitte der optisch zweiaxigen.

Nehmen wir nun an, dass die XZ-Ebene ein solcher Hauptschnitt sei, dass also Strahl und Normale in ihr liegen und folglich $v_s = v_n = 0$ seien.

Für die *extraordinären*, ebenfalls im Hauptschnitt liegenden Schwingungen erhalten dann die auf den *Strahl* bezüglichen Gleichungen (20) die Form:

$$(29\,b)\qquad \begin{cases} v_s^2 - \varkappa^2 - 1 = p\left(D_1 \dfrac{v_s^2 w_s^2 + \varkappa^2 w'^2}{v_s^2 + \varkappa^2} + D_3 \dfrac{v_s^2 u_s^2 + \varkappa^2 u'^2}{v_s^2 + \varkappa^2}\right) \\ 2\, v_s\, \varkappa \cos r_s = q\left(D_1 \dfrac{v_s^2 w_s^2 + \varkappa^2 w'^2}{v_s^2 + \varkappa^2} + D_3 \dfrac{v_s^2 u_s^2 + \varkappa^2 u'^2}{v_s^2 + \varkappa^2}\right) \end{cases}$$

Man leitet daraus ab:

$$(31)\qquad \begin{cases} v_s^4 - \varkappa^4 - v_s^2 A - \varkappa^2 B = 0 \\ v_s^2 - \varkappa^2 - 1 - 2\, v_s \varkappa\, C = 0, \end{cases}$$

in welchen Gleichungen A, B, C die Bedeutung haben:

$$A = p\,(D_1 w_s^2 + D_3 u_s^2),\quad B = p\,(D_1 w'^2 + D_3 u'^2)$$

$$C = \frac{p \cos r_s}{q}.$$

Eliminirt man aus ihnen den Brechungsindex v, so erhält man den Extinctionsindex $\varkappa$ mittels einer Gleichung IV. Grades.[1]) Sind so v_s und $\varkappa$ und weiter u_s, w_s gefunden, so gewinnt man θ mittels der einfacheren Gleichung:

$$(23\,b)\qquad \operatorname{tang}\Theta = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{u_s^2 \sqrt{\left(\dfrac{u_s}{D_1 - D_s}\right)^2 + \left(\dfrac{w_s}{D_3 - D_s}\right)^2}} = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}\,(D_1 - D_3)}{u_s^2}\, u_s\, w_s,$$

1) Die sämmtlichen Coefficienten derselben habe ich Wied. Ann. **59.** p. 529. 1893, mitgetheilt. — Für den speciellen Fall der Totalreflexion an anisotropen Medien ist übrigens die Lösung der Gleichungen (29 b) schon 1885 in meinem Buche p. 370—372 gegeben und ist daselbst ausdrücklich auf den hier bearbeiteten allgemeinen Fall hingewiesen worden.

und die Ebene dieses Winkels ist die Ebene des Hauptschnittes selber.

Nachdem auch u_n, w_n bekannt, gibt Gleichung (25) in der einfacheren Form:

$$D_n = \frac{n_1^2 D_2 u_n^2 + n_3^2 D_1 w_n^2}{n_1^2 u_n^2 + n_3^2 w_n^2} \tag{25 b}$$

den Werth von D_n.

Wäre dagegen die *Normalrichtung* gegeben, so würde die erste der Gleichungen (30) vermöge des vorstehenden Werthes von D_n sich auf die Form bringen lassen:

$$v_n^2 - x^2 - 1 = p D_n = p \frac{v_n^2 P + x^2 Q}{v_n^2 R + x^2 S},$$

und so würden die zusammengehörigen Gleichungen:

$$\begin{cases} v_n^4 R - v_n^2 x^2 (R - S) - v_n^2 (P + R) - x^2 (Q + S) - x^4 S = 0 \\ v_n^2 - x^2 - 1 - 2 v_n x M = 0, \end{cases} \tag{32}$$

deren Coefficienten P, Q, R, S, M den oben stehenden A, B, C ähnlich gebaut sind. Für Θ und D_s gelten die Beziehungen:

$$\tang \Theta = \frac{\sqrt{p^2 + q}}{n_n^2 \sqrt{\left(\frac{u_n}{D_1 - D_n}\right)^2 + \left(\frac{w_n}{D_3 - D_n}\right)^2}} \tag{27 b}$$

$$D_s = D_1 w_s^2 + D_3 u_s^2. \tag{22 b}$$

Was endlich die auf dem Hauptschnitt senkrechten *ordinären* Schwingungen betrifft, so fallen für dieselben Strahl und Normale zusammen, und D, welches von der Orientirung unabhängig wird, erlangt den constanten Werth D_2.

Man erhält dann einfach mittels der Gleichungen (24) oder (28) in der Form:

$$\begin{cases} v^2 - x^2 = 1 + p D_2 \\ 2 v x = \frac{q D_2}{\cos r} \end{cases} \tag{33}$$

die Auflösung:

$$\begin{cases} 2 v^2 = \sqrt{(1 + p D_2)^2 + \left(\frac{q D_2}{\cos r}\right)^2} + (1 + p D_2) \\ 2 x^2 = \sqrt{(1 + p D_2)^2 + \left(\frac{q D_2}{\cos r}\right)^2} - (1 + p D_2). \end{cases} \tag{34}$$

Sofern übrigens $v \cos r = \sqrt{\nu^2 - \sin^2 e}$, so lässt sich vorstehendes Gleichungenpaar auch durch das folgende ersetzen:

$$\begin{aligned} \nu^2 - \varkappa^2 &= 1 + p D_2 \\ 2 \varkappa \sqrt{\nu^2 - \sin^2 e} &= q D_2. \end{aligned} \tag{35}$$

Mittels desselben erhält man:

$$\left\{ \begin{aligned} 2 \nu^2 &= \sqrt{(1 + p D_2 - \sin^2 e)^2 + (q D_2)^2} + (1 + p D_2 + \sin^2 e) \\ 2 \varkappa^2 &= \sqrt{(1 + p D_2 - \sin^2 e^2) + (q D_2)^2} - (1 + p D_2 - \sin^2 e). \end{aligned} \right. \tag{36}$$

Im Falle der ordinären Schwingungen kann man daher ebenso wie für isotrope Medien nach Willkür sowohl die äussere wie die innere Welle zum Ausgang der Behandlung wählen. Die letzten Gleichungen gewähren zugleich eine Uebersicht über die Abhängigkeit des Refractions- wie Extinctionsindex vom Einfallswinkel.

Lässt man in allen vorstehenden Formeln die Reibungsconstante G fort und fort stetig abnehmen, so gehen dieselben successive in die bekannten Formeln der durchsichtigen Medien über.

Beziehen sich dieselben sämmtlich auf ein nur aus einer einzigen Molecülart bestehendes Medium, so würde nunmehr der Uebergang zu Medien, die aus beliebig vielen Molecülarten bestehen, selbst für den Fall nicht schwierig sein, dass dieselben nicht um drei identische Symmetrieaxen, sondern um beliebig viele, aber je unter sich rechtwinklige Axen geordnet sind.[1])

Endlich sind auch die Formeln für die Metallreflexion der Krystalle[2]) durch die vorstehenden beiden Abhandlungen in ihrer Handhabung sehr viel bequemer geworden, als sie es früher waren.

Die gesammte Dioptrik wie Katoptrik der anisotropen Medien ist demnach gegenwärtig mit wesentlicher Beihülfe der Maxwell'schen Ideen zu einem gewissen definitiven Abschluss gekommen. Mitarbeiter habe ich bei diesen meinen Bestrebungen[3]) meines Wissens nicht gehabt, wohl aber vielfache Angriffe und Ausfälle über mich ergehen lassen müssen.

1) Vgl. Ketteler, Theor. Optik p. 319–328.

2) Ebendaselbst p. 355–364.

3) Freilich sind manche meiner Sätze und Formeln unter fremder Bezeichnung und ohne Quellenangabe in die Arbeiten Anderer übergegangen.

Nachtrag. Wenn man, wie p. 548 und 549 geschehen ist, zunächst ν und $\varkappa$ direct berechnet, so erhält man weniger übersichtliche Formeln, als wenn man sofort das entsprechende D berechnet. Beispielsweise lassen sich für die extraordinären Schwingungen im Hauptschnitt ($v = v' = 0$) Gleichungen (21) und (25) mittels (13) auf die gemeinsame Form bringen:

$$\nu^2(\alpha - \beta D) + \varkappa^2(\alpha' - \beta' D) = 0, \tag{37}$$

worin die Coefficienten α, β; $\alpha' \beta'$ die folgende Bedeutung haben.

Für die Normalrichtung ist:

$$\alpha = n_1^2 D_3 u^2 + n_3^2 D_1 w^2, \quad \beta = n_1^2 u^2 + n_3^2 w^2$$
$$\alpha' = n_1^2 D_3 u'^2 + n_3^2 D_1 w'^2, \quad \beta' = n_1^2 u'^2 + n_3^2 w'^2$$

und für die Strahlrichtung:

$$\alpha = D_3 u^2 + D_1 w^2, \quad \beta = 1$$
$$\alpha' = D_3 u'^2 + D_1 w'^2, \quad \beta' = 1.$$

Combinirt man vorstehende Gleichung mit den für ein beliebiges D geltenden Ausdrücken (34), so geht dieselbe über in:

$$\left\{\begin{array}{l}\left[(1 + pD)^2 + \left(\frac{q}{\cos r} D\right)^2\right][(\alpha + \alpha') - (\beta + \beta') D]^2 \\ \quad = (1 + pD)^2 [(\alpha - \alpha') - (\beta - \beta') D]^2,\end{array}\right. \tag{38}$$

aus welcher sich D unmittelbar als Function von u, w; u'; w', r berechnen lässt. Die vier Wurzeln dieser Gleichung beziehen sich gleichmässig auf diejenigen beiden möglichen Stellen, von welchen die eine durch Vertauschung von ν und $\varkappa$ und damit zugleich der Propagationsrichtung und Extinctionsrichtung aus der anderen hervorgeht ($\nu_2 = \nu_1 \sqrt{-1}$, $\varkappa_2 = \varkappa_1 \sqrt{-1}$).

Bringt man dieselbe noch schliesslich auf die Form:

$$D^2 - \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'}{\beta'}\right) D + \frac{\alpha}{\beta} \frac{\alpha'}{\beta'} + \frac{Q^2}{4\beta\beta'} [(\alpha + \alpha') - (\beta + \beta') D]^2 = 0,$$

so lässt sie sich, so lange wenigstens bei nicht zu starker *Absorption* das Quadrat des Ausdrucks:

$$Q = \frac{q D}{[1 + pD] \cos r}$$

oder bei nicht zu starker *Doppelbrechung* und *Refraction* das Product von Q^2 in seinen eingeklammerten Factor als kleine

Grösse betrachtet werden darf, näherungsweise als *quadratische* Gleichung auflösen; den ersten Näherungswerth von D erhält man dann für $Q = 0$.

Für mässige Absorption, verbunden mit mässiger Doppelbrechung und mässiger Refraction, darf man daher überhaupt ohne nennenswerthen Fehler die beiden Richtungen u, v, w und $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ *behufs Berechnung der Variablen D als identisch ansehen und demgemäss auch in den Hauptgleichungen* (18) *die eine durch die andere ersetzen.*

Durch diesen Nachweis wird jedenfalls die praktische Verwerthung der hier vorgetragenen Formeln in wünschenswerthester Weise vereinfacht.

Weitere Anwendungen der Gleichungen (37) und (38) sollen in einem dritten Aufsatze mitgetheilt werden.

Münster i. W., im Mai 1895.

10. *Expansionsluftpumpe; von A. Raps.*

(Hierzu Taf. IV Fig. 9—13.)

Das Bestreben, die Verbesserungen auch dem Laboratorium nutzbar zu machen, welche an der in der Glühlampentechnik in sehr grossem Maassstabe angewandten *selbstthätigen* Luftpumpe[1]) angebracht wurden, führten mich zu der Construction, welche in Folgendem beschrieben werden soll.

Der ganze Steuermechanismus für das *selbstthätige* Heben und Senken des Quecksilbers ist geblieben, ebenso die Anordnung der Theile der Glasluftpumpe, welche sich sehr gut bewährt haben und zu Aenderungen keinerlei Veranlassung boten. Sie sollen deshalb auch nicht weiter erwähnt werden und wird in Betreff derselben auf die früheren Abhandlungen verwiesen. Es sind vielmehr nur Verbesserungen vorgenommen worden, welche das Heben und Senken des Quecksilbers ganz bedeutend beschleunigen und damit ein viel schnelleres Evacuiren gestatten. Da in Laboratorien sich die Druckluft, mit welcher die Pumpen in der Technik betrieben werden, schwieriger als verdünnte Luft herstellen lässt, so habe ich für Laboratoriumszwecke Luft von atmosphärischer Dichte und verdünnte Luft zum Heben und Senken des Quecksilbers benutzt, wie dies auch schon von Neesen, Schuller und vielen Anderen geschehen ist. Dies konnte jetzt mit Erfolg geschehen, da die ausgezeichnete Construction der Körting'schen Ejectoren die den gewöhnlichen Wasserluftpumpen anhaftenden Mängel beseitigt hat und hierdurch auch im Laboratorium ein schnelles Evacuiren erreichen lässt.

Die bisher beschriebenen Formen der automatischen Luftpumpe litten an dem Uebelstande, dass man das Quecksilber nur langsam aufsteigen lassen konnte, damit beim Anschlagen an den verengten Theil *a* der Pumpenkugel *A* (s. Fig. 9) kein Zertrümmern der Pumpe eintrat, namentlich wenn bei hoher

1) A. Raps, Wied. Ann. **43**. p. 624. 1891.

Verdünnung ein Luftpuffer nicht mehr vorhanden war. Durch eine sehr einfache und sicher wirkende Vorrichtung kann man das Quecksilber aber mit grosser Gewalt in die Pumpenkugel stürzen lassen gerade bis zum Punkte *a*, dasselbe dann anhalten und beliebig langsam die kritische Stelle passiren lassen. Um diese Vorrichtung besser verstehen zu können, wollen wir das Spiel der automatischen Pumpe an der Hand der schematischen Skizze Fig. 9 betrachten. Angenommen, es sei die Luft in der Pumpe *A* und über der Pumpenkugel *C* sehr verdünnt; steht dann die Wippe *D* und die Hähne *E* und *F* in der in Fig. 9 gezeichneten Lage, so kann die atmosphärische Luft durch die enge Bohrung *b* des Dreiwegehahnes *G*, das Rohr *c*, Hahn *E*, Schlauch *d* auf das in der Kugel *C* enthaltene Quecksilber drücken und dasselbe in der Pumpe *A* hochtreiben. Sobald die nöthige Menge Quecksilber aus der Kugel *C* in die Pumpe getrieben ist, bekommt die Masse *K* Uebergewicht, die Wippe stellt sich in die gestrichelt angedeutete Lage ein, indem sie die Hähne *E* und *F* in der durch Fig. 10 angegebenen Weise umstellt. Hierdurch kann jetzt die Luftpumpe *J* die über *C* befindliche Luft absaugen und ein Fallen des Quecksilbers bewirken, bis sich die Wippe wieder umstellt und das Spiel von Neuem beginnt.

Während nun das Quecksilber fiel, konnte die atmosphärische Luft durch die enge Oeffnung *b* in das Volum *B* entströmen, so lange, bis *B* sich mit Luft von atmosphärischer Dichte gefüllt hatte. In dem Augenblick nun, in welchem sich die Wippe umstellt, expandirt nun die in *B* enthaltene Luft durch die weiten Bohrungen und Canäle in die Kugel *C*, indem sie das Quecksilber mit grosser Gewalt und Schnelligkeit in die Pumpe schleudert, so lange, bis die sich bildende Quecksilbersäule der in *B* expandirten Luft das Gleichgewicht hält. Dieser Punkt kann ganz genau durch Abmessung des Volums *B* bestimmt werden. Nunmehr kann die Luft nur noch sehr langsam durch die fein regulirbare Oeffnung *b* durchströmen und daher passirt das Quecksilber den gefährlichen Theil so sanft und langsam, wie man will.

In gleicher Weise wird auch das Herabfallen des Quecksilbers während des Aufsteigens schon vorbereitet durch das Volum *H*, indem während letzterer Periode *H* von

der sehr schnell arbeitenden Wasserluftpumpe *J* ziemlich weit evacuirt wird. Stellt sich dann die Wippe um, so expandirt die in *C* enthaltene Luft mit Gewalt in den Raum *H*, und das Quecksilber stürzt sehr schnell herab; während des anderen Halbhubes wird dann *H* wieder entleert. Auf diese Weise werden die einzelnen Phasen umschichtig vorbereitet und ein zwei bis dreimal so schnelles Arbeiten erzielt, wie ohne diese Expansionsgefässe möglich wäre.

Damit sich diese Expansionsgefässe in die Luftpumpe einfügen lassen, sind jedoch noch einige Aenderungen nothwendig geworden.

Da in dem Gefässe *L*, in welches die Luftblasen geschafft werden, immer sehr verdünnte Luft sein muss, kann dasselbe mit der Wasserluftpumpe nicht beständig in Verbindung stehen; in dem Augenblicke nämlich, in welchem sich die Wippe in die gestrichelte Lage einstellt, muss die in *C* befindliche Luft auch nach *L* gelangen und ein Ablaufen der Quecksilberventile zur Folge haben. Es ist deshalb in die Verbindung zwischen *L* und *e* noch ein gleichzeitig mit *E* gesteuerter Hahn *F* eingeschaltet, welcher während des Absaugens der in *C* enthaltenen Luft geschlossen ist (Einstellung Fig. 10) und nur dann geöffnet wird, wenn die grösste Verdünnung durch die Wasserluftpumpe erreicht ist.

Das An- und Abstellen der Pumpe erfolgt einfach durch Umstellen des Dreiwegehahnes *G*.

Beim Beginn des Pumpens steht der Dreiwegehahn *G* in der Stellung Fig. 11. Jetzt saugt die Wasserluftpumpe durch *e*, *F*, *i*, *L*, sowohl die in *A* enthaltene Luft weg, als auch durch *f*, *B*, *c*, *d* die Luft aus *C*. Das Quecksilberniveau wird hierdurch nicht verändert. Ist die Verdünnung hinreichend vorgeschritten, so dreht man einfach den Hahn *G* um, die Luft kann durch *b* einströmen und das Pumpen beginnt.

Will man aufhören zu arbeiten, so stellt man den Hahn wieder in die Lage Fig. 11, wodurch das Quecksilber herabsinkt und unter der Einmündungsstelle des Rohres *h* stehen bleibt.

Fig. 13 zeigt die constructive Anordnung der Expansions-Luftpumpe.

An der Glaspumpe sind erhebliche Aenderungen nicht

vorgenommen, nur ist sie bedeutend niedriger geworden; auch fehlt das im Rohr früher enthaltene Ventil, sodass jetzt gar kein festes Ventil in der Pumpe mehr enthalten ist. Die Pumpe ist durch einen sehr biegsamen, innen durch eine Spirale geschützten Schlauch *r* mit dem Glasrohr *S* verbunden, welches in dem Gummistopfen der Kugel *C* steckt. Dieser Gummistopfen ist einfach in den Hals der Kugel eingesetzt und wird durch den Atmosphärendruck stets in die Kugel hineingepresst. Arbeitet die Pumpe nicht, so kann man ihn behufs Eingiessens und Herausnehmens des Quecksilbers leicht entfernen. Die übrigen Verbindungen tragen die gleichen Buchstaben wie in Fig. 9, bedürfen daher keiner besonderen Beschreibung mehr. Sehr einfach und brauchbar ist das Controlventil des Hahnes *G* (Fig. 13). Dasselbe besteht aus einem Zapfen, dessen horizontale Bohrung mit einem Gewinde versehen ist, In dieses Gewinde ist die Schraube *o* (mit Gegenmutter *p*) eingeschraubt. Das Gewinde der Schraube *o* ist in der aus der Figur ersichtlichen Weise konisch abgedreht, so dass sich die atmosphärische Luft durch die Oeffnung *b* an den Gewindegängen von *o* vorbeipressen muss. Je nachdem nun die Schraube *o* weiter heraus- oder hereingeschraubt ist, muss sich die Luft an mehr oder weniger Gewindegängen vorbeipressen und es ist auf diese Weise eine ausserordentlich feine und sichere Regulirung erreicht worden.

Die Aufstellung der Pumpe ist sehr einfach. Es wird in die Kugel *C* die nöthige Quecksilbermenge eingegossen, dann der Gummistopfen aufgesteckt und die Verschraubung des Schlauches *d* auf den Hahn *E* geschraubt. Dann verbindet man die Schlauchhülle *x* des Hahnes *E* mittels dickwandigen Gummischlauches (oder Gummischlauch mit einer inwendig eingezogenen Spirale) mit dem Hahn *n* der Glasluftpumpe. Die Wasserluftpumpe wird (unter Einschaltung eines Hahnes) in der aus der Figur ersichtlichen Weise mit dem Gefässe *H* und dem Rohr *y* bei *z* verbunden.

Will man die Pumpe in Betrieb setzen, so öffnet man die Hähne *n*, *m*, bringt den Hahn *G* in die Stellung Fig. 11 (Griff parallel zur Axe des Gefässes *B*) und setzt die Wasserluftpumpe in Thätigkeit. Den Hebel *T* hat man hochgeklappt und das Stiftrad *v* so gestellt, dass der Stift *a* in die Aus-

sparung im Stiftenrade einfällt. Ist nun das Vorpumpen mit der Wasserluftpumpe weit genug vorgeschritten (ca. 15 cm Quecksilber), so schliesst man den Hahn m, stellt G um (Lage Fig. 9) und das Spiel der Pumpe beginnt. Nachdem die grössten Luftmassen entfernt sind, schliesst man n und öffnet m. Ist die aus dem Rohr ε entweichende Luftblase noch 2—3 cm lang, so klappt man den Hebel T herunter, wodurch die kleinen Luftblasen fünfmal nach δ und dort zu einer einzigen grösseren Blase vereinigt, nach L geschafft werden.

Die Punkte, bis zu welchen das Quecksilber in der Glaspumpe aufsteigen soll, regulirt man durch Verstellen der Anschläge β, γ und η wie früher.

Zum Abstellen der Pumpe dreht man einfach den Hahn G um (Fig. 11). Wenn das Quecksilber nunmehr ganz herabgefallen ist, kann man die Wasserluftpumpe ausser Thätigkeit setzen. Die Wasserluftpumpe darf man selbstverständlich nicht eher abstellen, bis man den in die Leitung der Pumpe eingeschalteten Hahn geschlossen hat, da sonst Wasser in C eindringen würde.

Was die Leistungen der Expansionsluftpumpe betrifft, so sind die erreichbaren Grade der Verdünnung dieselben, als wie bei der früheren Construction der automatischen Luftpumpe angegeben wurde. Erreicht wurden Verdünnungen, bei welchen der Partialdruck der Luft zwischen $^1/_{600000}$ bis $^1/_{800000}$ mm Quecksilber schwankt.

Ein Pumpenzug dauert aber bei einem Volumen der Kugel A von ca. 600 ccm jetzt nur noch 15 bis 20 Secunden, so dass ein Raum von 400 ccm in etwa 5 bis 6 Minuten auf ca. $^1/_{1000}$ mm Quecksilber, und ein Raum von 4 l in etwa einer halben Stunde auf denselben Druck gebracht werden konnte.

Die Expansionsluftpumpe wird von M. Stuhl, Berlin N, Philippstrasse, angefertigt.

Berlin, März 1895.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1895. ANNALEN № 8.
DER
PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND 55.

1. *Der Temperatureinfluss auf die innere Reibung von Benzol und Aethyläther oberhalb ihres Siedepunktes;* von *Adolf Heydweiller.*

1. Einleitung.

Wenn die äusserst zahlreichen Versuche, durch Erforschung physikalischer Eigenschaften zu einer Kenntniss des Molecularzustandes der Flüssigkeiten zu gelangen, bisher nur verhältnissmässig geringen Erfolg gehabt haben, so liegt das gewiss zum grossen Theil an der unzureichenden Bestimmung des Temperatureinflusses. Die bei weitem meisten Untersuchungen beschränken sich auf gewöhnliche Temperaturen oder ein kleines Temperaturintervall, das sich nur in wenigen Fällen über den Siedepunkt hinaus erstreckt.

Die überraschend einfachen Ergebnisse der schönen Untersuchungen von Eötvös[1]), sowie von Ramsay und Shields[2]) über die Oberflächenspannung von Flüssigkeiten in Berührung mit ihrem gesättigten Dampf zwischen Siede- und kritischer Temperatur lassen auch für die analogen Untersuchungen anderer Eigenschaften ähnlichen Erfolg erhoffen.

Eine zweite wichtige Constante, die der inneren Reibung, ist bisher, soviel mir bekannt, nur für zwei Flüssigkeiten in dem erwähnten Temperaturintervall bestimmt worden, erstens für Methylchlorid durch Hrn. Stoel[3]) und Hrn. de Haas[4]),

1) Eötvös, Wied. Ann. **27.** p. 452. 1886.
2) Ramsay u. Shields, Zeitschr. f. phys. Chem. **12.** q. 433. 1893.
3) Stoel, Dissertation. Leyden, 1891; Comm. Lab. of Phys. Nr. 2. Leyden, 1891.
4) de Haas, l. c. Nr. 12. 1894.

zweitens für Kohlensäure durch die Hrn. Warburg und v. Babo[1]), für letztere nur in dem engen der kritischen Temperatur naheliegenden Intervall von 5—29°.

Diese Bestimmungen auf eine Anzahl anderer Flüssigkeiten auszudehnen habe ich unternommen. Im Folgenden soll zunächst die Anordnung der Versuche und ihre Anwendung auf zwei Beispiele, Benzol und Aethyläther, beschrieben werden.

2. Versuchsanordnung.

Bei der Wahl der Methode war weniger die Rücksicht auf Erreichung einer grösstmöglichen Genauigkeit maassgebend, als der Wunsch, eine ausgedehntere Anwendbarkeit durch Vermeidung kostspieliger und umständlicher Apparate zu ermöglichen.

Die Flüssigkeit wurde über Quecksilber zur Erzeugung ausreichenden Ueberdrucks in eine Röhre gebracht, der Raum oberhalb der Flüssigkeit luftleer gepumpt und die Röhre zugeschmolzen.

Die Form der ersten Röhre, in welcher Aethyläther untersucht wurde, zeigt Fig. 1 in $^1/_4$ natürl. Grösse. $a\,b$ ist eine Capillare von 9—10 cm Länge und 0,01 cm innerem Durchmesser, der übrige Theil der Röhre hat 0,45 cm innere Weite. Die Gesammtlänge der Röhre ist ca. 30 cm. Die Flüssigkeit wird durch geeignetes Neigen unter die Capillare gebracht und von dem Ueberdruck des Quecksilbers durch diese hindurchgetrieben; die Aenderungen im Niveauunterschied des letzteren werden in bestimmten Intervallen mit dem Kathetometer zugleich mit den entsprechenden Zeitunterschieden gemessen.

Diese Form hat die Nachtheile, dass erstens leicht winzige Quecksilberkügelchen in die obere Erweiterung der Capillare gelangen und dort Störungen verursachen, und dass zweitens kleine Temperaturunterschiede an den beiden freien Flüssigkeitsoberflächen Unterschiede des Dampfdrucks bewirken, die in höheren Temperaturen eine beträchtliche und störende Grösse erreichen können. Ich bin daher beim Benzol zu der Form der Fig. 2 übergegangen, die sich besser bewährt hat

1) Warburg u. v. Babo, Wied. Ann. **17**. p. 390. 1882.

und in Zukunft ausschliesslich benutzt werden soll. Die Dimensionen sind ungefähr dieselben, wie die der ersten Röhre.

Die Röhren wurden sorgfältig gereinigt und getrocknet mittels Durchsaugen von Luft unter starker Erwärmung, wozu ein nachher zugeschmolzener Rohransatz am unteren Ende diente; dann wurde reines und gleichfalls scharf getrocknetes Quecksilber eingefüllt.

Die Flüssigkeiten waren als chemisch rein von Kahlbaum bezogen. Der über Natrium destillirte Aether wurde längere Zeit mit Quecksilber ausgeschüttelt, wobei sich noch reichlich schwarzer Niederschlag bildete. Sie wurden in die Röhren hineindestillirt, die ganz gefüllten Röhren dann an die Wasserluftpumpe angesetzt und zugeschmolzen, wenn etwa die Hälfte der Flüssigkeit wieder abdestillirt war, sodass den Raum oberhalb der Flüssigkeit wesentlich nur gesättigter Dampf erfüllte. Jedenfalls war der Druck der etwa noch zurückgebliebenen Luft gegen den des Dampfes bei allen angewendeten Temperaturen zu vernachlässigen.

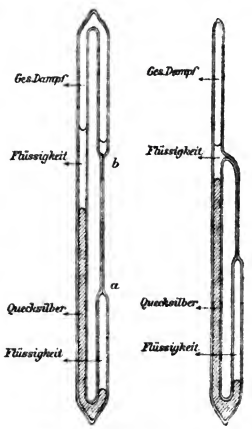


Fig 1. ¼ natürl. Grösse. Fig. 2. ¼ natürl. Grösse.

Die Röhren wurden in ein Glycerinbad eingesetzt, das durch Dampf in der von Fürst Galitzin [1]) beschriebenen Weise auf constante höhere Temperaturen erwärmt wurde. Ein in Grade getheiltes, mit Aichschein der Reichsanstalt versehenes Thermometer, dessen Kugel dicht neben dem unteren Ende der Capillaren lag, gab die Temperatur an. In dem Glycerinbad befand sich ein Messingdraht als Rührer.

1) Galitzin, Wied. Ann. **50.** p. 521. 1893; vgl. die Figur auf p. 528 daselbst.

Nachdem die Temperatur längere Zeit constant geblieben war, wurde die Röhre gebrauchsfertig gemacht durch Einbringen des grösseren Theiles der Flüssigkeit zwischen Quecksilber und Capillare.[1]) Bei nicht zu hohen Temperaturen wurde die Röhre sammt Thermometer zu diesem Zwecke auf $^1/_2$—2 Min. aus dem Bade herausgenommen und möglichst schnell wieder eingesetzt. Bis zum Beginn der Beobachtungen vergingen dann noch mehrere Minuten, während welcher das Thermometer sich wieder nahe constant einstellte und dann höchstens noch um einige Zehntel Grade im Verlauf der Beobachtungsreihe stieg. Bei den höheren Temperaturen wurde die Füllung dadurch bewirkt, dass Bad und Dampfmantel in nahezu horizontale Lage gebracht wurden, sodass der Quecksilberdruck die Flüssigkeit durch die Capillare in den unteren Theil der Röhre trieb. Zur Beobachtung wurde das Ganze dann wieder aufgerichtet. Hierbei geschieht es nun leicht, dass sich infolge kleiner Temperaturungleichheiten am unteren Ende der Capillare Dampfblasen bilden, die sich schnell zu vergrössern pflegen und wieder entfernt werden müssen. Hierdurch wird diese Art von Füllung etwas zeitraubend und ermüdend, und die Ausdehnung der Beobachtungen auf Temperaturen, die der kritischen nahe liegen, ist mir nicht gelungen.

Das Kathetometer wurde auf die aufsteigende Quecksilberkuppe im Capillarschenkel der Röhren gerichtet und die Durchgangszeiten des Niveaus durch das Fadenkreuz des Fernrohrs mittels einer $^1/_4$ Sec. schlagenden Uhr in Abständen von 1, $^1/_2$, $^1/_4$ cm je nach der Geschwindigkeit der Bewegung beobachtet. Zu jeder Reihe gehören sechs bis zehn solcher Beobachtungen. Nach hinreichender Verlangsamung der Bewegung wurde durch abwechselndes Einstellen auf die Quecksilbermenisken in beiden Schenkeln der Niveauunterschied für eine bestimmte Stellung des Kathetometers bestimmt; bei der Aetherröhre auch die Höhen der Aethersäulen in beiden Schenkeln. Hier war ausserdem auf eine einseitige Capillardepression des Quecksilbers

1) Man muss dafür sorgen, dass zwischen Quecksilber und Glaswand keine erheblichen Flüssigkeitsmengen hängen bleiben, da diese zu Unregelmässigkeiten Veranlassung geben; man entfernt sie durch mehrmaliges Aufstossen.

Rücksicht zu nehmen, die daher rührt, dass das Quecksilber an der mit Aether benetzten Röhrenwandung nicht unbeträchtlich adhärirt, und hierdurch der aufsteigende Meniscus sich stärker wölbt, der sinkende sich abflacht. In welcher Weise diese Depression durch die Berechnung ausgemerzt wurde, wird im nächsten Abschnitt gezeigt werden.

Auf die Röhren geritzte feste Marken erlaubten die Unveränderlichkeit der gegenseitigen Lage von Röhre und Kathetometer während einer Beobachtungsreihe zu prüfen.

3. Theorie und Berechnung der Versuche.

Im Folgenden ist die Theorie ausführlich nur für die Röhre 2 gegeben; für Röhre 1 erfährt dieselbe einige Abänderungen, die indessen nur auf die Grösse und Berechnung der Temperaturcorrection von Einfluss sind. Es sei

R der innere Halbmesser des weiteren Theiles der Röhre,

r derjenige der Capillaren,

$2h$ der Niveauunterschied des Quecksilbers in den beiden Schenkeln zur Zeit t,

s und σ die Dichten von Quecksilber und Flüssigkeit bei der Versuchstemperatur,

g die Beschleunigung der Schwerkraft.

Das Quecksilber und die Flüssigkeit bewegen sich in der weiten Röhre mit der Geschwindigkeit dh/dt, in der Capillaren mit der mittleren Geschwindigkeit $(R^2/r^2).dh/dt$.

Die Abnahme des Quecksilberdrucks in der Zeit dt ist $2dh$, der entsprechende Verlust des Systems an potentieller Energie:

$$2\pi R^2 g(s-\sigma)h\,dh, \tag{1}$$

da das Quecksilbervolumen $\pi R^2 dh$ um die Höhe $2h$ herabsinkt und das gleiche Flüssigkeitsvolumen um dieselbe Höhe gehoben wird.

In der Zeit dt wird ferner die Flüssigkeitsmasse $\pi R^2 \sigma dh$ durch die Capillare hindurchgetrieben. Hiervon strömt durch eine cylindrische Schicht von der Dicke $d\varrho$ im Abstande ϱ von der Axe der Capillare die Menge

$$\sigma.2\pi\varrho\,d\varrho.v\,dt,$$

wenn v die Geschwindigkeit in dieser Schicht bezeichnet und die kinetische Energie diese Menge ist

$$\tfrac{1}{2}\sigma \cdot 2\pi\varrho\, d\varrho\, v^3\, dt = \pi\sigma\, dt\, v^3\varrho\, d\varrho.$$

Die gesammte in der Zeit dt der Flüssigkeit in der Capillare ertheilte kinetische Energie ist mithin

$$\pi\sigma\, dt \int_0^r v^3\varrho\, d\varrho. \tag{2}$$

Nun nimmt die Geschwindigkeitsänderung $-dv/d\varrho$ von der Mitte der Capillaren nach der Wand proportional mit ϱ zu und man kann setzen

$$\frac{dv}{d\varrho} = -2k\varrho, \qquad v = k(r^2-\varrho^2),$$

wo k eine Constante ist, die sich durch die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ in der Capillare ausdrücken lässt.

Es ist nämlich

$$\bar{v} = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r 2\pi\varrho\, v\, d\varrho$$

$$= \frac{2k}{r^2}\int_0^r (r^2-\varrho^2)\varrho\, d\varrho$$

$$= \frac{k r^2}{2}.$$

Auf der anderen Seite ist auch

$$\bar{v} = \frac{R^2}{r^2}\frac{dh}{dt},$$

mithin

$$k = \frac{2R^2}{r^4}\frac{dh}{dt}$$

und

$$v = \frac{2R^2}{r^4}\frac{dh}{dt}(r^2-\varrho^2). \tag{3}$$

Dies in Ausdruck (2) eingesetzt, ergiebt für diesen den Werth

$$\pi\sigma\frac{R^6}{r^4}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 dh. \tag{2a}$$

Da r klein ist gegen R, so ist die kinetische Energie in der weiten Röhre gegen die in der Capillare zu vernachlässigen und die Differenz der Ausdrücke (1) und (2a) stellt die durch innere Reibung in der Capillare in der Zeit dt in Wärme verwandelte Energie dar; dieselbe ist also:

$$(4) \qquad 2\pi R^2 g(s-\sigma) h\, dh \left\{1 - \frac{1}{2gh} \cdot \frac{\sigma}{s-\sigma} \cdot \frac{R^4}{r^4} \left(\frac{dh}{dt}\right)^2\right\}.$$

Ist ferner

l die Länge der Capillaren,

η der Reibungscoefficient der Flüssigkeit,

so ist die Reibungskraft in der ersteren

$$2\pi r l \eta \left[\frac{dv}{d\varrho}\right]_{\varrho=r} = -8\pi l \eta \frac{R^2}{r^2} \frac{dh}{dt}.$$

Die Arbeit derselben in der Zeit dt, der eine Verschiebung der Flüssigkeit um die Strecke $(R^2/r^2)dh$ entspricht, ist

$$(5) \qquad -8\pi l \eta \frac{R^4}{r^4} \frac{dh}{dt} dh.$$

Gleichsetzung der äquivalenten Ausdrücke (4) und (5) ergiebt:

$$(6) \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{g(s-\sigma)}{4l\eta} \cdot \frac{r^4}{R^2} \cdot h \left\{1 - \frac{1}{2gh} \cdot \frac{\sigma}{s-\sigma} \cdot \frac{R^4}{r^4} \left(\frac{dh}{dt}\right)^2\right\}.$$ [1])

Zur Abkürzung setze ich

$$c = \frac{4l\eta}{g(s-\sigma)} \cdot \frac{R^2}{r^4}$$

$$c_1 = \frac{1}{2g} \cdot \frac{\sigma}{s-\sigma} \cdot \frac{R^4}{r^4},$$

so wird die Gleichung (6):

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{h}{c} + \frac{c_1}{c} \left(\frac{dh}{dt}\right)^2$$

---

1) Dass der Factor $1/\sqrt[3]{2}$, den nach Hrn. Hagenbach das Correctionsglied in der Klammer noch haben sollte, auf einem Irrthum beruht, ist schon von Hrn. Finkener (vgl. Gartenmeister, Zeitschr. f. phys. Chem. **6.** p. 524. 1890) und Hrn. Wilberforce (Phil. Mag. (5) **31.** p. 407. 1891) bemerkt worden.

und ihr Integral

$$t = -c \log \text{nat} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \tfrac{4 c_1}{c^2} h} \right\} - c \sqrt{1 + \tfrac{4 c_1}{c^2} h} + \text{const.}$$

Unter Vernachlässigung des Quadrates des gegen 1 kleinen Gliedes $(4 c_1/c^2) h$ folgt hieraus

$$\frac{t}{c} = -\log \text{nat}\, h - \frac{c_1 h}{c^2} + \text{const.} = -\log \text{nat}\, h \left(1 + \frac{c_1}{c^2} h\right) + \text{const.},$$

oder wenn $h = H$ für $t = 0$

$$h \left(1 + \frac{c_1}{c^2} h\right) = H \left(1 + \frac{c_1}{c^2} H\right) e^{-\frac{t}{c}} \tag{7}$$

und bei Berücksichtigung weiterer Glieder:

$$\left\{ \begin{aligned} & h \left(1 + \frac{c_1}{c^2} h - \frac{7}{2} \left(\frac{c_1}{c^2} h\right)^2 + \frac{25}{6} \left(\frac{c_1}{c^2} h\right)^3\right) \\ & \quad = H \left(1 + \frac{c_1}{c^2} H - \frac{7}{2} \left(\frac{c_1}{c^2} H\right)^2 + \frac{25}{6} \left(\frac{c_1}{c^2} H\right)^3\right) e^{-\frac{t}{c}}. \end{aligned} \right. \tag{7a}$$

Sind h_1 und t_1, h_2 und t_2 zusammengehörige Werthe von h und t, so erhält man abgekürzt:

$$c = \frac{t_2 - t_1}{\log \text{nat}\, h_1 \left(1 + \frac{c_1}{c^2} h_1\right) - \log \text{nat}\, h_2 \left(1 + \frac{c_1}{c^2} h_2\right)}$$

oder

$$c' = 2{,}303 \,.\, c = \frac{t_2 - t_1}{\log h_1 \left(1 + \frac{c_1}{c^2} h_1\right) - \log h_2 \left(1 + \frac{c_1}{c^2} h_2\right)}.$$

Hat man eine grössere Anzahl zusammenhängender Werthepaare von h und t, so lässt sich durch geeignete Combination derselben, bez. nach der Methode der kleinsten Quadrate c berechnen. Die erstere Berechnungsweise gestattet gleichzeitig das Poiseuille'sche Gesetz, bez. die Richtigkeit der angewandten Correction zu prüfen.

In den Correctionsgliedern genügt natürlich ein Näherungswerth von c; c_1 ist leicht zu berechnen; die Werthe von σ wurden den Tabellen von Ramsay und Shields[1]) entnommen.

1) Ramsay u. Shields, Zeitschr. f. phys. Chem. **12**. p. 433. 1893. Die Compressibilität der Flüssigkeiten durch den Quecksilberdruck ist zu vernachlässigen.

r wurde mit dem Mikroskop und R durch Auswägen der Röhren mit Quecksilber bestimmt, wobei zugleich das gute Kaliber der letzteren geprüft wurde.

Aus

$$c = \frac{4\,l\,\eta}{g\,(s-\sigma)} \cdot \frac{R^2}{r^4}$$

folgt, wenn man die Grössen ohne Index auf die Temperatur ϑ^0, mit Index 0 auf eine gewisse Normaltemperatur, etwa 0^0, bezieht und mit α die linearen Ausdehnungscoefficienten des Glases bezeichnet:

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{c}{c_0} \cdot \frac{s-\sigma}{s_0-\sigma_0} \cdot \frac{1}{1+\alpha\,\vartheta} = \frac{c'}{c'_0} \cdot \frac{s-\sigma}{s_0-\sigma_0} \cdot \frac{1}{1+\alpha\,\vartheta}. \tag{8}$$

Die Methode gibt die relativen Werthe der Reibungscoefficienten bei verschiedenen Temperaturen; die Kenntniss des absoluten Werthes für *eine* Temperatur genügt dann zur Bestimmung der übrigen.

Da, wie schon bemerkt, in der Aetherröhre die genaue Bestimmung von h selbst auf Schwierigkeiten stiess, während die Unterschiede $H-h$ sehr scharf zu messen waren, wurde hier eine andere Berechnungsweise vorgezogen.

Aus (7) folgt:

$$(H-h)\left(1+\frac{c_1}{c^2}\,h\right) = H\left(1-e^{-\frac{t}{c}}\right). \tag{9}$$

Mit Hülfe dieser Gleichung wurden aus den beobachteten Werthen von $H-h$ und t die Constanten H und c, für die Näherungswerthe leicht zu erhalten waren, nach der Methode der kleinsten Quadrate abgeleitet.

Es wird in diesem Falle

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{c}{c_0} \cdot \frac{s}{s_0} \cdot \frac{1}{1+\alpha\,\vartheta}. \tag{8a}$$

4. Beobachtungen.

Als Beispiel seien zunächst zwei Beobachtungsreihen mit Benzol bei den Temperaturen 47^0 (Schwefelkohlenstoffdampf) und 185^0 (Anilindampf) angeführt.

In den Tabellen 1 und 2 bezeichnen:

ϑ die abgelesene Temperatur (ohne Thermometercorrection),

t die Zeit der Durchgänge der Quecksilberkuppe durch

den Faden des Kathetometerfernrohres von dem ersten ab gerechnet,

$2h$ den beobachteten Niveauunterschied des Quecksilbers in den beiden Schenkeln zur Zeit t,

$2h'$ die wegen der Ausflussgeschwindigkeit corrigirte, d. h. mit $1 + (c_1/c^2)h$ multiplicirten Werthe von $2h$,

$a = \frac{\lg h_1 - \lg h_2}{t_2 - t_1}$, bez. gleich den entsprechenden Werthen, berechnet aus der 2. und 6., 3. und 7., 4. und 8. Beobachtung,

a' dieselbe Grösse berechnet mit h' statt h, endlich ist

$k\eta = \frac{a'}{1 + \alpha\vartheta} \cdot \frac{s - \sigma}{s - \sigma_0} . 10^{-3}$, wobei k eine nur von den Dimensionen des Gefässes abhängige Constante bezeichnet.

Tabelle 1.

Beobachtungen vom 3. April 1895.

	ϑ	t	$2h$	$2h'$	a	a'
		sec	mm	mm		
1		0	153,8	155,4	2423	2402
2	46,9°	70,0	143,8	145,2	2434	2414
3	46,9	147,3	133,8	135,0	2417	2402
4	47,0	229,1	123,8	124,8	2420	2405
5	46,95	317,2	113,8	114,6		
6	46,9	414,7	103,8	104,5		
7	46,95	521,0	93,8	94,4		
8	46,9	639,4	83,8	84,2		

$k\eta = 2{,}391.$

Tabelle 2.

Beobachtungen vom 8. Mai 1895.

	ϑ	t	$2h$	$2h'$	a	a'
		sec	mm	mm		
1		0	57,2	59,09	707,3	691,7
2	185,4°	59,2	47,2	48,49	704,2	691,5
3	185,4	93,9	42,2	43,27	702,3	690,0
4	185,3	132,2	37,2	38,05	698,3	687,5
5	185,4	176,5	32,2	32,83		
6	185,35	227,7	27,2	27,68		
7	185,4	289,7	22,2	22,52		
8	185,5	366,2	17,2	17,38		

$k\eta = 0{,}6760.$

Namentlich die zweite Reihe lässt deutlich erkennen, wie gut durch die angebrachte Correction der von der Ausströmungsgeschwindigkeit herrührenden Abweichung vom Poiseuille'schen Gesetze Rechnung getragen wird. Diese Correction erreicht hier ziemlich den grössten Betrag unter allen Beobachtungen und ändert den schliesslichen Werth von $k\eta$ um etwa 2 Proc.

Die folgenden Tabellen enthalten die Zusammenstellung der Ergebnisse sämmtlicher Beobachtungen, das Beobachtungsdatum, die mittlere corrigirte Temperatur ϑ und die erhaltenen Mittelwerthe von $k\eta$.

Die mit einem * bezeichneten Versuche bei Aether sind mit einer anderen Röhre, die leider zerbrach, beobachtet und auf gleichen Werth der Constanten k mit Hülfe eines mittleren Factors reducirt. Bei 130° zersprang durch einen unglücklichen Zufall auch die zweite Röhre, ohne dass eine Beobachtung bei dieser Temperatur gelungen war.

Tabelle 3.
Aethyläther.

	ϑ	$k\eta$
11./2.*	7,36°	1,455
27./3.	7,62	1,448
27./3.	8,37	1,409
16./3.	15,84	1,363
22./2.	16,84	1,328
18./3.	16,84	1,309
8./2.*	18,40	1,295
13./2.*	29,16	1,181
18./3.	30.56	1,168
16./3.	31,26	1,163
18./3.	47,08	1,008
19./2.*	47,10	1,006
18./3.	47,15	1,020
19./3.	63,52	0,886
19./3.	63,82	0,878
20./3.	78,47	0,779
20./3.	78,52	0,770
20./3.	78,72	0,770
19./3.	99,20	0,644
19./3.	100,40	0,642

Tabelle 4.
Benzol.

	ϑ	$k\eta$
5./4.	14,78°	3,799
2./4.	14,80	3,809
2./4.	14,83	3,780
2./4.	30,76	2,982
2./4.	30,83	2,966
3./4.	46,85	2,427
3./4.	46,85	2,391
3./4.	46,90	2,391
26./4.	78.45	1,708
26./4.	78,85	1,707
30./4.	99,77	1,410
30./4.	100,50	1,395
29./4.	131,50	1,054
29./4.	131,80	1,052
29./4.	131,92	1,050
9./5.	161,41	0,811
8./5.	185,23	0,676
8./5.	185,65	0,670

Bei Benzol stimmen die auf gleiche Temperatur reducirten Beobachtungen derselben Gruppe durchweg auf etwa 1 Proc. miteinander überein. Bei Aether sind aus schon erwähnten Gründen die Abweichungen etwas grösser und steigen bis auf 3 Proc.; doch dürften auch hier die Mittelwerthe auf etwa 1 Proc. genau sein.

5. Vergleichung mit anderen Beobachtungen.

Zur Zurückführung meiner Beobachtungen auf absolutes Maass benutze ich zunächst (später gedenke ich auch diese Bestimmungen selbst auszuführen) Messungen von Wijkander[1]), die sich sowohl auf Aether, wie auf Benzol erstrecken und bei ersterem das Temperaturintervall von 12° bis 30°, bei letzterem von 12° bis 60° umfassen. Für Benzol habe ich die Mittelwerthe aus zwei gut übereinstimmenden Reihen von Wijkander genommen, zwei andere zeigen erhebliche Abweichungen. Tabellen 5 und 6 enthalten die Werthe von $10^3\eta$ und $\lg 10^3\eta$ nach Wijkander, sowie die aus meinen Versuchen für die gleichen Temperaturen interpolirten Werthe von $\lg k\eta$, endlich in der letzten Spalte die Differenzen der beiden vorhergehenden, die constant sein sollen; die Abweichungen liegen in der That innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler; die Mittelwerthe dienen zur Reduction meiner Beobachtungen auf absolutes Maass (C. G. S. Einheiten).

Tabelle 5.
Aethyläther.

ϑ	Wijkander		Heydweiller	Differenz
	$10^3 . \eta$	$\lg 10^3 . \eta$	$\lg k\eta$	
12°	2,78 [2])	0,4440	0,1424	0,3016
20	2,58	0,4116	0,1094	0,3022
25	2,45	0,3892	0,0893	0,2999
30	2,33	0,3674	0,0691	0,2983
				Mittel 0,3005

1) Wijkander, Beibl. **3.** p. 8. 1879.

2) Zusatz bei der Correctur: Eigene Messungen haben inzwischen ergeben, dass diese Werthe im Verhältniss von 1,11 : 1 zu gross sind; danach sind die Zahlen in Tab. 7 zu corrigiren.

Tabelle 6.

Benzol.

ϑ	Wykander		Heydweiller	Differenz
	$10^3 \cdot \eta$	$\lg 10^3 \cdot \eta$	$\lg k\,\eta$	
12°	7,385	0,8684	0,5978	0,2706
20	6,495	0,8125	0,5449	0,2676
30	5,650	0,7520	0,4787	0,2733
40	4,945	0,6940	0,4242	0,2698
50	4,340	0,6375	0,3663	0,2712
90	3,890	0,5899	0,3196	0,2703
			Mittel	0,2705

Die Vergleichung mit den Beobachtungen von Pribram und Handl[1]) über den Temperatureinfluss ergiebt grössere Abweichungen, die aber wohl nicht in meinen Versuchen begründet sind, denn die graphische Darstellung der Zahlen von Pribram und Handl weist erhebliche Unregelmässigkeiten auf. Die Versuche von Rellstab[2]) ergeben den Temperatureinfluss bei Aether viel kleiner und können nicht richtig sein; wahrscheinlich war der Aether nicht rein.

Die absoluten Werthe für „schweres Benzol" wären nach W. König[4]) um 1,8 Proc. grösser, die für Aether nach W. König um 2,8 Proc., nach Sachs[4]) um 1,5 Proc., nach Gartenmeister[5]) um 6,5 Proc. kleiner. Die Unsicherheit ist also noch erheblich. Der ausführliche Bericht über die Versuche von Thorpe und Rodger ist mir noch nicht zugänglich, der Auszug[6]) enthält keine Beobachtungen.

6. Zusammenfassung und Ergebnisse.

Hr. Stoel hat in der Eingangs erwähnten Arbeit darauf aufmerksam gemacht, dass der Reibungscoefficient des Methylchlorids zwischen Siede- und kritischer Temperatur sich mit

1) Pribram und Handl, Wien. Ber. II. **78.** p. 113. 1878; **80.** p. 17. 1879.

2) Rellstab, vgl. Landolt und Börnstein, Tabellen p. 289. 1894.

3) W. König, Wied. Ann. **25.** p. 618. 1885.

4) Sachs, vgl. Landolt und Börnstein, l. c. p. 284.

5) Gartenmeister, Ztschr. f. physik. Chem. **6.** p. 524. 1890.

6) Thorpe und Rodger, Proc. Roy. Soc. London **55.** p. 148. 1894.

grosser Annäherung als Exponentialfunction der Temperatur darstellen lässt, also in der Form

$$\eta = C e^{-\gamma \vartheta}, \tag{10}$$

wo C und γ zwei Constanten.

Indessen zeigen die beobachteten Werthe systematische Abweichungen von der Exponentialcurve; trägt man $\lg \eta$ als Function von ϑ auf, so erhält man eine Linie, die bei niederen Temperaturen convex, bei hohen concav gegen die Abscissenaxe gekrümmt ist; in dem breiten Gebiet des dazwischen liegenden Wendepunktes verläuft die Curve nahe geradlinig, sodass die Abweichungen der beobachteten Werthe von η von den nach Formel (10) berechneten 1 Proc. nicht übersteigen. Dieses Gebiet liegt etwa zwischen -14^0 und $+90^0$ oder zwischen den reducirten Temperaturen (nach van der Waals) 0,62 und 0,87.

Die convexe Krümmung der erwähnten Curve wird, wie zahlreiche Beobachtungen zeigen, für fast alle Flüssigkeiten unterhalb des Siedepunktes beträchtlich; die concave Krümmung in der Nähe der kritischen Temperatur findet sich auch bei Kohlensäure nach den Versuchen von Warburg und v. Babo. Endlich lassen meine Beobachtungen für Benzol und Aether den geradlinigen Verlauf in der Nähe des Wendepunktes erkennen, und zwar liegt derselbe hier zwischen nahe denselben Grenzen der reducirten Temperatur, wie beim Methylchlorid, nämlich etwa zwischen den Temperaturen $+78^0$ und $+186^0$ für Benzol und $+17^0$ und 100^0 für Aether, entsprechend den reducirten Temperaturen 0,62 und 0,82 bez. 0,62 und 0,80; wahrscheinlich liegt die obere Grenze noch höher, indessen reichen die Beobachtungen nicht weiter.

Die Tabellen 7 und 8 erläutern dieses Verhalten; sie geben die aus nahe zusammenliegenden Beobachtungen der Tabellen 3 und 4 erhaltenen Mittelwerthe von ϑ und $k\eta$, ferner die nach p. 372 und 373 berechneten Werthe von $10^3\eta$ und $\log 10^3\eta$ in C. G. S. Einheiten, endlich die nach der linearen Formel berechneten Werthe von $\log 10^3\eta$, sowie ihre Differenzen gegen die Werthe der vorhergehenden Spalte.

Tabelle 7.

Aethyläther.

$\lg 10^3 \eta = 0{,}4200 - 0{,}003760\ (\vartheta - 17^0)$ zwischen $+ 17^0$ und $+ 100^0$.

ϑ	$k\eta$	$10^3 . \eta$	$\lg 10^3 . \eta$		Differenz
			beobachtet	berechnet	beob.-ber.
7,8°	1,437	2,871	0,4580	(0,4545)	0,00
17,0	1,323	2,643	0,4221	0,4200	+ 21
30,3	1,169	2,335	0,3683	0,3700	− 17
47,1	1,010	2,017	0,3048	0,3068	− 20
63,7	0,882	1,762	0,2460	0,2444	+ 16
78,6	0,773	1,544	0,1887	0,1885	+ 2
99,8	0,643	1,284	0,1087	0,1086	± 0

Tabelle 8.

Benzol.

$\lg 10^3 \eta = 0{,}5016 - 0{,}003813\,(\vartheta - 78^0)$ zwischen $+ 78^0$ und $+ 186^0$.

ϑ	$k\eta$	$10^3 . \eta$	$\lg 10^3 \eta$		Differenz
			beobachtet	berechnet	beob.-ber.
14,8	3,796	7,080	0,8500		0,00
30,8	2,974	5,544	0,7439		
46,9	2,403	4,479	0,6512		
78,6	1,707	3,182	0,5027	0,4993	+ 34
100,1	1,402	2,614	0,4172	0,4173	− 1
131,7	1,052	1,961	0,2925	0,2968	− 43
161,4	0,811	1,512	0,1797	0,1836	− 39
185,4	0,670	1,250	0,0968	0,0921	+ 47

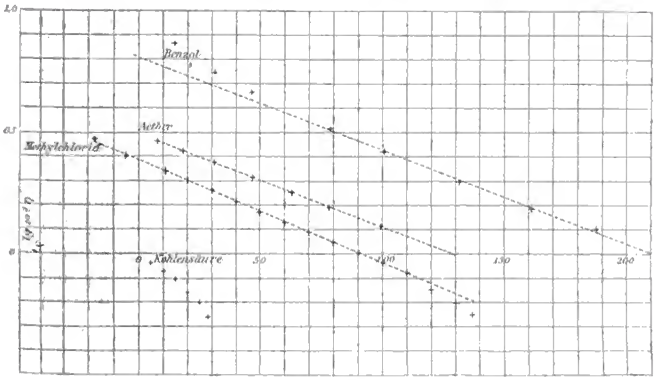


Fig. 3.

Fig. 3 gibt eine graphische Darstellung der Resultate, und zwar $\log 10^3 \eta$ als Function von ϑ; die berechneten Geraden sind punktirt eingezeichnet und die Beobachtungen von Stoel und de Haas über Methylchlorid, von Warburg und v. Babo über Kohlensäure beigefügt.

Es ist bemerkenswerth, dass erstens die Neigung des geradlinigen Theiles der Curve gegen die Abscissenaxe für alle drei untersuchten Stoffe nahe gleich ist, und dass zweitens an der oberen Grenze des erwähnten Intervalles, nämlich für die reducirte Temperatur 0,865 der Reibungscoefficient für alle drei einen ungefähr gleichen, nahe bei 10^{-8} liegenden Werth erhält.

Man kann nämlich setzen:

$$10^3 \eta = e^{\gamma \tau}, \tag{11}$$

worin

für Methylchlorid $\gamma = 2{,}303 \,.\, 0{,}003895 = 0{,}00897$; $\tau = 0{,}868\, T_k - T$
„ Aethyläther $\gamma = 2{,}303 \,.\, 0{,}003760 = 0{,}00866$; $\tau = 0{,}861\, T_k - T$
„ Benzol $\gamma = 2{,}303 \,.\, 0{,}003813 = 0{,}00878$; $\tau = 0{,}859\, T_k - T$

(T die absolute, T_k die kritische Temperatur).

Die Gleichung stellt die Reibungscoefficienten mit einer Annäherung von ± 1 Proc. innerhalb des Intervalles von $\tau = 0$ bis etwa $\tau = 0{,}24\, T_k$ dar.

Dabei ist zu bemerken, dass die absoluten Werthe von η noch um mehrere Procente und ebenso die Temperatur $\tau = 0$ um mehrere Grade unsicher sind.

Die Constante γ hat eine einfache Bedeutung, sie ist gleich dem relativen Temperaturcoefficienten

$$\frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{d\vartheta}$$

in dem betreffenden Intervalle.

Es wird die Aufgabe weiterer Versuche sein zu entscheiden, ob diese Uebereinstimmung in dem Verhalten der drei untersuchten Körper zufällig, oder eine allgemeinere Eigenschaft der Flüssigkeiten ist, und ob die nach Ramsay und Shields „associirenden" Körper (die Alkohole, Säuren, Wasser) vielleicht auch hier eine Ausnahme bilden.

Strassburg, Physik. Institut, Mai 1895.

2. *Ueber einige Beobachtungen des Hrn. Villard den kritischen Zustand betreffend; von K. Wesendonck.*

Im vorigen Jahre hat Hr. Villard [1]) Versuche über das Verhalten von Stickoxydul und Kohlensäure bei der kritischen Temperatur unter Anwendung möglichst reiner Substanzen veröffentlicht. Die Gase, welche in verflüssigtem Zustande käuflich zu haben sind, wurden durch Absorptionsröhren [2]) geleitet und dann in einer abgekühlten Röhre wieder verdichtet, welche im Falle der CO_2 Natriumbicarbonat enthielt. Stickstoff und Luft liess man durch wiederholtes Aufkochen noch austreiben und füllte dann in die definitiv zu verwendende Röhre um, welche mit einem Theile des condensirten Gases noch zuvor ausgespült worden. [3]) Bei CO_2 auf diese Weise erhalten, zeigte sich von 140 ccm. Alles durch Kali absorbirbar bis auf 1 cmm, bei Stickoxydul sei der Grad der Reinheit schwerer festzustellen, doch lasse er sich ohne nachweisbaren Rest condensiren. Nun bemerkt aber Hr. Ramsay [4]) nach seinen, wie nach Amagat's und Andrew's Erfahrungen sei es nicht möglich ein Gas wie CO_2 in ein Rohr einzuführen ohne Beimengungen von Luft mitzubringen, man müsse sich also an Flüssigkeiten halten. Es mag daher vielleicht zweifelhaft erscheinen ob man Hrn. Villard's [5]) Bestimmungen als endgültig ansehen kann, immerhin dürften die untersuchten Substanzen reiner als die bisher verwendeten gewesen sein, daher es immerhin von Interesse erscheint, sich darüber klar

1) Villard, Journ. de physique (3) **3.** p. 441. 1894.

2) N_2O über Kali, mit Schwefelsäure getränktem Bimstein, und geschmolzenem Kali, CO_2 über mit feuchter Chromsäure getränktem Bimstein.

3) CO_2 passirte bei der definitiven Füllung noch Bimstein mit Schwefelsäure getränkt.

4) Ramsay, Ztschr. f. phys. Chem. **14.** p. 487. 1894.

5) Der Apparat zur Ueberfüllung war ohne alle Fettung hermetisch schliessend, die Hähne ganz aus Metall, keine durch Zusammenschrauben haltende Verbindungsstücke vorhanden.

zu werden, ob die sogenannten abnormen Erscheinungen bei denselben eine wesentliche Verminderung erfahren haben. Bei Wiederholung der Versuche der Hrn. Cailletet und Collardeau in einer O förmigen Röhre, deren unterer Schenkel Quecksilber bez. Schwefelsäure enthielt, ergab sich nun, auch wenn alle Flüssigkeit zuvor in dem einem Arme angesammelt worden war [1]), keine Niveaudifferenzen mehr für Stickoxydul bei 38,8° und für Kohlensäure bei 31,7°. Unter gleichmässigem Abkühlen trat dann auch Condensation in beiden Zweigen der O-Röhre ein und zwar zeigten sich je genau dieselben Flüssigkeitsmengen. Kein anderes Resultat ergab die Wiederholung gewisser Versuche Battelli's. Hiermit ist aber, wie Hr. Villard ausdrücklich hervorhebt nur gezeigt, dass *oberhalb der kritischen Temperatur die Substanz als eine homogene Masse erscheint*, was bisher nicht experimentell bewiesen worden sei. Die Temperatur 38,8 hatten frühere Versuche [2]) über die Dichte der gasigen wie flüssigen Stickoxyduls bereits als eine *obere Grenze* für die kritische Temperatur ergeben, *das Verschwinden des Meniscus* tritt aber bereits etwas unter 38° ein. *Aehnlich verhält es sich mit der Kohlensäure*, die Temperatur 31,7° liegt selbst höher als die kritischen Daten von Amagat [3]) und Chappuis [4]) (31,35° und 31,40°) und einige Zehntel Grad höher als die Temperatur bei der der Meniscus vergeht. *Hier ist also wie Hr. Villard bemerkt, noch ein Intervall vorhanden, in welchem der flüssige Zustand persistirt*, ein Intervall, welches spätere Versuche vielleicht noch verkleinern würden. Nun wird aber von den meisten Forschern der Punkt an dem der Meniscus verschwindet als der kritische angesehen, hält man daran fest, so bleiben auch bei den gereinigten Substanzen der hier besprochenen Untersuchungen gewisse Anomalien noch in nahe demselben Umfange bestehen, wie sie Verfasser an einer käuflichen Nattererröhre beobachtet hat. [5]) *Es zeigte sich bis zur Temperatur 31,7° deutliche Bil-*

1) Sie bildete eine Säule von 25 cm Höhe.

2) Villard, Compt. rend. **118**. p. 1096. 1894.

3) Amagat, Journ. de phys. (3) **1**. p. 288. 1892.

4) Chappuis, Compt. rend. **118**. p. 976. 1894.

5) Wesendonck, Naturw. Rundschau **9**. p. 209—212. 1894; Ztschr. für phys. Chemie **13**. p. 261—266. 1894.

dung blauen Nebels bei Umkehrung der Nattererröhre, von da ab nur noch eine perlende Bewegung, *sonst aber erscheint von dieser Temperatur an der Inhalt homogen*, während andererseits die Nebelbildung in recht auffallender Weise bei dem Punkte, wo der Meniscus unter sorgfältigem Abkühlen sich zuerst zeigt, beginnt. Nun ist der Einfluss von Beimengungen zu dem untersuchten Stoffe sicher nicht zu leugnen, aber doch auch keineswegs gewiss, dass *alle* beobachteten sogenannten anomalen Phänomene allein darauf beruhen. *Vielmehr spricht die Thatsache, dass die sicher viel reineren Substanzen des Hrn. Villard doch erst bei 31,7° für CO_2 Homogenität ergeben, gegen eine solche Auffassung.* Dabei ist zu beachten, dass die Beobachtnng von Niveaudifferenzen in einer **O**-Röhre doch auch nur einer begrenzten Genauigkeit fähig ist, und Spuren von Inhomogenitäten nicht nachzuweisen vermag, die sich aber beim Perlen immer noch bemerkbar machen können.

Hr. Villard sieht in Uebereinstimmung mit Galitzine[1]) gemäss den Ausführungen von Pellat[2]) den Punkt, an welchem der Meniscus verschwindet nicht als den kritischen an. Aus den bekannten von Andrew's ausgeführten Isothermendiagramm wird nämlich hergeleitet, dass, wenn nicht ein einziges ganz bestimmtes Verhältniss zwischen Flüssigkeit und Gas in der Compressionsröhre von gegebenem Inhalt vorhanden ist, die Flüssigkeit entweder im unteren Theile, weil gänzlich verdampfend verschwinden, oder aber die ganze Röhre ausfüllen müsse, bevor noch der kritische Punkt erreicht wird. Da man nun aber beobachte, wie bei recht verschiedenen Mengen Dampf und Flüssigkeit der Meniscus innerhalb der Röhre verschwinde, so sei die Temperatur bei der dies geschehe sicher nicht als die kritische anzusehen. Galitzine nimmt direct an, jenseits besagter Temperatur existire noch eine unsichtbare Trennungsfläche. Dann steht man aber wieder vor der alten Schwierigkeit, ist man berechtigt von einer Flüssigkeit zu reden, die sich nicht zeigt? und viele Forscher werden mit Hrn. Kuenen in einer Flüssigkeit lediglich eine dichtere Phase erblicken, also einen Theil der Substanz, der

1) Galitzine, Journ. de phys. (3) **1.** p. 474.
2) Pellat, Journ. de phys. (3) **1.** p. 225. 1892.

durch eine Oberflächenschicht von dem übrigen Theile getrennt ist. Es thut nichts zum Wesen der Sache, dass die Differenz beider besagter Temperaturen unter Umständen sehr klein werden und der Verschwindungspunkt nahezu constant [1]) erscheinen kann.

Mir scheint es übrigens fraglich ob man den Verlauf der Isothermen wirklich genau genug kennt, um solche Schlüsse, wie Hr. Pellat ziehen zu können, hebt doch noch Amagat [2]) ganz ausdrücklich hervor, wie schwierig die Beobachtunge in der Nähe des kritischen Punktes werden, dessen genaue Bestimmung er durch graphische Interpolation und Rechnung auszuführen sucht. Und dabei ist man noch immer nicht sicher ob die zur Untersuchung benutzten Substanzen genügende Reinheit besessen haben. Andererseits scheint mir als ein Mangel in Hrn. Pellat's Betrachtungen, dass er die Wirkung der Schwere nicht berücksichtigt, deren Bedeutung infolge der grossen Compressibilität der Substanz nahe dem kritischen Punkte zuerst wohl Hr. Gouy [3]) hervorgehoben. Thatsächlich findet nach den vorliegenden Beobachtungen übrigens ein Verschwinden des Meniscus als scharfe Trennungsfläche gar nicht statt, sondern er wandelt sich in einen nebeligen Streifen bez. Zone um, bevor er vergeht, eine Erscheinung, die der näheren Berechnung und theoretischen Betrachtung sich gänzlich entzieht. Nach alledem kann man, wie mir scheint, nur sagen, *dass aus den Versuchen des Hrn. Villard die Existenz einer Temperatur, bei der, mit Hrn. Nernst* [4]) *zu reden, eine plötzliche Verdampfung der gesammten Flüssigkeitsmenge stattfindet unter völligem Verschwinden des Meniskus, nicht zu folgern ist.* Vielmehr dürften dieselben für *das Vorhandensein einer kritischen Uebergangszone, nicht Punktes sprechen.* Wenn ein solches Verhalten theoretische Schwierigkeiten darbieten sollte, so kann es vorerst darauf nicht ankommen, er handelt sich zunächst lediglich um die Feststellung des Thatsächlichen.

1) D. h. unabhängig von den ursprünglich gegebenen relativen Mengen Flüssigkeit und Dampf.

2) Amagat, Compt. rend. **113.** p. 446.

3) Gouy, Compt. rend. **115.** p. 721.

4) Nernst, Theoret. Chemie p. 58.

Vielleicht ist es nicht überflüssig auf eine vor Kurzem erschienene Abhandlung des Hrn. Weinstein[1]) hinzuweisen, wonach die Betrachtungen von van der Waals einer Ergänzung bedürfen, insbesondere auch insofern als Glieder auftreten, welche Flächenstücken proportional sind. Eine nähere Discussion des Einflusses dieser Glieder kann vielleicht auch für die Erklärung der Nebelerscheinungen von Wichtigkeit werden, die sich zeigen in dem Falle, dass die Substanz dem kritischen Zustande nahe ist.

Berlin, den 8. Juni 1895.

1) Weinstein, Wied. Ann. **54.** p. 571 ff. 1895.

3. *Theoretische Untersuchungen über elastische Körper; von Paul Glan.*

IV. Ueber die Vectoren der elastischen Kräfte.

Es mag sich ein unendlich kleines Parallelepiped eines Körpers von einem gewissen Zustande desselben aus, der durch die Werthe t, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3 der Temperatur und der Gestaltsvariabeln bestimmt sei, unendlich wenig in der Weise ändern, wie es durch die unendlich kleine Aenderung dieser Variabeln beziehlich um dt, dm_1, dm_2, dm_3, dn_1, dn_2, dn_3 charakterisirt sei. Wir wollen die Veränderung aufsuchen, welche die elastischen Kräfte seines Innern auf seine Seitenflächen, gerechnet für die Flächeneinheit, hierbei erfahren. Die Vectoren derselben im Anfangszustande der hier betrachteten unendlich kleinen Zustandsänderung des Parallelepipeds für die drei in einer Ecke mit dem Vector ϱ zusammentreffenden Seitenflächen desselben seien mit der früheren Bedeutung dieser Zeichen α_1, α_2, α_3 und sie mögen sich infolge dieser Zustandsänderung beziehlich um $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$ ändern. Da jeder Zustandsänderung des Parallelepipeds der hier betrachteten Art eine bestimmte Veränderung der elastischen Kräfte zugehört, müssen $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$ Functionen einer solchen unendlich kleinen Zustandsänderung sein, und zwar ihrem Charakter nach vector Functionen. Jede dieser unendlich kleinen Zustandsänderungen wird nun durch ihren Anfangs- und Endzustand ausreichend bestimmt, da wir uns auch ihre Zwischenzustände unendlich wenig von jenen verschieden denken. Der Anfangszustand wird nun in diesem Falle durch seine Temperatur t und die ihm zugehörigen Werthe der Gestaltsvariabeln m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3 bestimmt, wenn die augenblickliche Gestaltsänderung des Parallelepipeds von der Gestalt desselben aus gerechnet wird, der es, von äusseren Kräften befreit, im ersten Augenblicke zustreben würde. Der Endzustand wird dann durch die Zunahmen der bestimmenden Scalare des Anfangszustandes beim Uebergange

zum Endzustande bestimmt. Die vector Zunahmen der elastischen Kräfte $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$, welche mit der unendlich kleinen Zustandsänderung und also durch die Scalare t, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3, dt, dm_1, dm_2, dm_3, dn_1, dn_2, dn_3 gegeben sind, sind danach vector Functionen der letzteren und wir können also schreiben:

$$\Delta\alpha_1 = \varphi_1(t, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3, dt, dm_1, dm_2, dm_3, dn_1, dn_2, dn_3),$$

$$\Delta\alpha_2 = \varphi_2(t, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3, dt, dm_1, dm_2, dm_3, dn_1, dn_2, dn_3),$$

$$\Delta\alpha_3 = \varphi_3(t, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3, dt, dm_1, dm_2, dm_3, dn_1, dn_2, dn_3).$$

Zur Entwickelung dieser vector Functionen nach steigenden Potenzen von dt, dm_1, dm_2, dm_3, dn_1, dn_2, dn_3 werde ich einen Satz entwickeln, der sich aus Taylor's Satz für Quaternionen begründen lässt, und den ich, seinem Wesen nach, *Mac Laurin's Satz für Quaternioneu* nennen will. Der erstere Satz für irgend eine quaternion Function von quaternion Variabeln $F(q, r, s, \ldots)$, deren erste m Differentiale und eigener Werth in unmittelbarer Nachbarschaft eines gegebenen Werthesystems q, r, s, ... nicht unendlich werden, lautet, wenn die Zunahmen dq, dr, ds, .. als Constanten angesehen werden, sodass $d^2q = d^2r = d^2s = \ldots = 0$,

$$F(q+dq, r+dr, s+ds, \ldots) = F(q, r, s, \ldots) + dF(q, r, s, \ldots) + \frac{1}{1.2} d^2F(q, r, s, \ldots) + \ldots + \frac{d^mF(q, r, s, \ldots)}{1.2\ldots m}$$

für $\lim Tdq = \lim Tdr = \lim Ts = \ldots = 0$.

Geben wir jetzt den Variabeln q, r, s, ... den Werth Null und der Differentialen dq, dr, ds, ... beziehlich die unendlich kleinen Werthe q', r', s', ..., so wird die letzte *Gleichung*:

$$F(q', r', s', \ldots) = F(0, 0, 0, \ldots) + dF(0, 0, 0) \ldots) + \frac{d^2F(0, 0, 0, \ldots)}{1.2} + \ldots + \frac{d^mF(0, 0, 0, \ldots)}{1.2\ldots m},$$

für $\lim Tq' = \lim Tr' = \lim Ts' = \ldots = 0$, in welcher

$$d^mF(0, 0, 0, \ldots) = [d_{q'}F(0, 0, 0, \ldots)_{q'} + d_{r'}F(0, 0, 0, \ldots)_{r'} + \ldots]^{(m)}$$

ist. In der Entwickelung des symbolisch bezeichneten Gliedes der rechten Seite der letzten Gleichung hat man die entsprechenden höheren Differentiale an Stelle der symbolisch bezeichneten Potenzen zu setzen. Nach der allgemeinen Eigenschaft der Differentiale von quaternion Functionen ist jedoch

$$d_{q'} F(0, 0, 0, \ldots)_{q'} = Tq' . d_{q'} F(0, 0, 0, \ldots)_{Uq'}$$

mit entsprechenden Gleichungen für die anderen Variabeln und die höheren Differentiale. Die vorige Entwickelung gibt demnach diejenige einer quaternion Function $F(q', r', s', \ldots)$ der unendlich kleinen quaternion Variabeln $q', r', s', \ldots$ nach steigenden Potenzen ihrer Tensoren bis zur $m$ten, wenn diese Function selbst und ihre ersten m Differentiale in unmittelbarer Nachbarschaft des Werthes Null dieser Variabeln nicht unendlich werden.

$\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$ sind stetige und nicht unendlich grosse Functionen von dt, dm_1, dm_2, dm_3, dn_1, dn_2, dn_3 und nach der erfahrungsmässig bekannten Grösse der Aenderung der elastischen Kräfte bei unendlich kleiner Veränderung der Gestaltsvariabeln oder der Temperatur sind auch ihre ersten Differentiale nicht als unendlich gross anzunehmen. Dann sind jedoch jene Functionen nach MacLaurin's Reihe für Quaternionen jedenfalls bis zu Gliedern entwickelbar, welche die erstsn Potenzen der unendlich kleinen Zunahmen zweiter Ordnung der Gestaltsvariabeln und der Temperatur als Factoren enthalten. Die Scalare dt, $dm_1, \ldots, dn_3$ kann man als Product ihrer selbst und der Zahl Eins und letztere als Versor eines Quaternions ansehen. Die MacLaurin'sche Reihe für Quaternionen gibt dann für $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha$, $\Delta\alpha_3$ folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_1 = {} & \varphi_1(0, \ldots) + dt\, d_{dt}\varphi_1(0, \ldots)_{+1} + dm_1\, d_{dm_1}\varphi_1(0, \ldots)_{+1} \\ & + dm_2\, d_{dm_2}\varphi_1(0, \ldots)_{+1} + dm_3\, d_{dm_3}\varphi_1(0, \ldots)_{+1} \\ & + dn_1\, d_{dn_1}\varphi_1(0, \ldots)_{+1} + dn_2\, d_{dn_2}\varphi_1(0, \ldots)_{+1} \\ & + dn_3\, d_{dn_3}\varphi_1(0, \ldots)_{+1}.\end{aligned}$$

In den Ausdrücken für $\Delta\alpha_2$ und $\Delta\alpha_3$ treten beziehlich $\varphi_2(0, \ldots)$ und $\varphi_3(0, \ldots)$ an Stelle von $\varphi_1(0, \ldots)$ im vorigen Ausdrucke für $\Delta\alpha_1$. Da die elastischen Kräfte bei den hier betrachteten Zustandsänderungen keine Veränderung erfahren, wenn die Temperatur und die Gestalt ungeändert bleiben,

müssen $\varphi_1(0, \ldots)$, $\varphi_2(0, \ldots)$, $\varphi_3(0, \ldots)$ gleich Null sein. Die Theildifferentiale von φ_1, φ_2, φ_3 beziehlich nach dt, $dm_1, \ldots, dn_3$, in denen letztere Scalare gleich Null gesetzt sind, sind vector Functionen von t, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3. Es mag bezeichnet werden $d_{dt}(0, \ldots)_{+1}$ mit τ_1, $d_{dm_1}\varphi_1(0, \ldots)_{+1}$ mit $\mu'_1, \ldots d_{dn_1}\varphi_1(0, \ldots)_{+1}$ mit $\nu'_1, \ldots$ und es sollen durch entsprechende Veränderung des Index die auf φ_2 und φ_3 bezüglichen, neu eingeführten Vectoren bezeichnet werden. Dann wird:

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha_1 &= \tau_1\,dt + \mu'_1\,dm_1 + \mu''_1\,dm_2 + \mu'''_1\,dm_3 \\
&\quad + \nu'_1\,dn_1 + \nu''_1\,dn_2 + \nu'''_1\,dn_3, \\
\Delta\alpha_2 &= \tau_2\,dt + \mu'_2\,dm_1 + \mu''_2\,dm_2 + \mu'''_2\,dm_3 \\
&\quad + \nu'_2\,dn_1 + \nu''_2\,dn_2 + \nu'''_2\,dn_3, \\
\Delta\alpha_3 &= \tau_3\,dt + \mu'_3\,dm_1 + \mu''_3\,dm_2 + \mu'''_3\,dm_3 \\
&\quad + \nu'_3\,dn_1 + \nu''_3\,dn_2 + \nu'''_3\,dn_3.
\end{aligned}$$

Wenn sich die Temperatur um dt ändert und die Gestaltsvariabeln um die dieser Temperaturänderung zugehörigen Werthe d_tm_1, d_tm_2, d_tm_3, d_tn_1, d_tn_2, d_tn_3, wenn sich also das Parallelepiped bei constanten äusseren Kräften entsprechend der Temperaturveränderung dt in seiner Gestalt ändert, tritt keine Veränderung der elastischen Kräfte ein; in diesem Falle ist also $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$ Null und die vorigen Gleichungen ergeben dann:

$$\begin{aligned}
\tau_1\,dt &= -\mu'_1 d_tm_1 - \mu''_1 d_tm_2 - \mu'''_1 d_tm_3 - \nu'_1 d_tn_1 - \nu''_1 d_tn_2 - \nu'''_1 d_tn_3, \\
\tau_2\,dt &= -\mu'_2 d_tm_1 - \mu''_2 d_tm_2 - \mu'''_2 d_tm_3 - \nu'_2 d_tn_1 - \nu''_2 d_tn_2 - \nu'''_2 d_tn_3, \\
\tau_3\,dt &= -\mu'_3 d_tm_1 - \mu''_3 d_tm_2 - \mu'''_3 d_tm_3 - \nu'_3 d_tn_1 - \nu''_3 d_tn_2 - \nu'''_3 d_tn_3.
\end{aligned}$$

Es ergeben sich danach die Vectoren der elastischen Kräfte α_1, α_2, α_3, wie sie einem Zeitpunkte t bei einer stetigen Gestaltsänderung $\varphi(\omega, t)$ eines Körpers entsprechen, für ein unendlich kleines Theilchen desselben, dessen Gestalt beim Nullpunkte der Zeit diejenige eines Würfels ohne innere elastische Kräfte ist, vermittelst der Gleichungen:

$$\alpha_1 = \sum_0^t \Delta\alpha_1, \qquad \alpha_2 = \sum_0^t \Delta\alpha_2, \qquad \alpha_3 = \sum_0^t \Delta\alpha_3.$$

Durch die neuen Formen der Vectoren der elastischen Kräfte, welche bei gleichzeitigem Temperatur- und Gestalts-

wechsel gelten, wird die früher erhaltene *Gleichung für die Bewegung im Innern*

$$s D_t^2 \varrho = - d\alpha_{1\omega_1} - d\alpha_{2\omega_2} - d\alpha_{3\omega_3}$$

nicht geändert. Sie entsteht aus dem Principe des d'Alembert aus der Bedingung, dass die von aussen auf ein parallelepipedisches Theilchen im Innern wirkenden Kräfte zusammen mit seiner mit negativem Vorzeichen genommenen bewegenden Kraft — diese Kräfte nach dem Anfangspunkte O der Vectoren verlegt gedacht — im Gleichgewichte sein müssen. Aus der Forderung, dass auch die Kräftepaare im Gleichgewichte sein müssen, welche durch die Verlegung dieser Kräfte nach dem Anfangspunkte O der Vectoren entstehen, entsteht im vorliegenden Falle eine neue Gleichung, da durch die neuen Formen für die Vectoren der elastischen Kräfte die entsprechende Bedingungsgleichung nicht identisch erfüllt wird. Ihr zufolge müssen die *Vectoren der Momentaxen dieser Kräftepaare* die Summe Null ergeben. Das ergiebt die Gleichung:

$$\begin{aligned} V\{ & - s\,x\,y\,z\,D_t^2\,\varrho\,[\varphi(\omega,t)+\varepsilon] + y\,z\,\alpha_1\,[\varphi(\omega,t)+\varepsilon_1] \\ & - y\,z\,[\alpha_1 + x\,d\,\alpha_{1\omega_1}][\varphi(\omega,t)+x\,d\,\varphi(\omega,t)_{\omega_1}+\varepsilon_1] \\ & + z\,x\,\alpha_2\,[\varphi(\omega,t)+\varepsilon_2] - z\,x\,[\alpha_2 + y\,d\,\alpha_{2\omega_2}][\varphi(\omega,t) \\ & + y\,d\,\varphi(\omega,t)_{\omega_2}+\varepsilon_2] + x\,y\,\alpha_3\,[\varphi(\omega,t)+\varepsilon_3] - x\,y\,[\alpha_3 \\ & + z\,d\,\alpha_{3\omega_3}][\varphi(\omega,t)+z\,d\,\varphi(\omega,t)_{\omega_3}+\varepsilon_3]\} = 0. \end{aligned}$$

Die Vectoren ε, ε_1, ε_2, ε_3 sind unendlich klein und dadurch bedingt, dass die betreffenden Kräfte unendlich nahe den Eckpunkten des Parallelepipeds angreifen, da sie als Resultanten der auf die verschiedenen Theilchen seiner Seitenflächen oder seiner Masse wirkenden Kräfte anzusehen sind. Für die gegenüberliegenden congruenten, unendlich nahen und parallelen Seitenflächen kann man diese unendlich kleinen Vectoren als gleich ansehen. Berücksichtigt man in der letzten Gleichung die unendlich kleinen Vectoren vierter Ordnung nicht gegen diejenigen dritter Ordnung und lässt dann den gemeinsamen Factor $x\,y\,z$ der letzteren fort, so wird aus ihr die Gleichung:

$$\begin{aligned} V\{ & - s\,D_t^2\,\varrho\,\varphi(\omega,t) - d\,\alpha_{1\omega_1}\varphi(\omega,t) - \alpha_1\,d\,\varphi(\omega,t)_{\omega_1} - d\,\alpha_{2\omega_2}\varphi(\omega,t) \\ & - \alpha_2\,d\,\varphi(\omega,t)_{\omega_2} - d\,\alpha_{3\omega_3}\varphi(\omega,t) - \alpha_3\,d\,\varphi(\omega,t)_{\omega_3}\} = 0. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung der Bewegung im Innern folgt aus ihr die *Bedingungsgleichung für die Vectoren der elastischen Kräfte*:

$$V(\alpha_1 \, d\varphi(\omega, t)_{\omega_1} + \alpha_2 \, d\varphi(\omega, t)_{\omega_2} + \alpha_3 \, d\varphi(\omega, t)_{\omega_3}) = 0.$$

Für die Oberfläche gelangen wir, wie früher, zu der *Bedingungsgleichung*:

$$\alpha_1 S U . d\varphi(\omega, t)_{\omega_1} \nu + \alpha_2 S U . d\varphi(\omega, t)_{\omega_2} \nu + \alpha_3 S U . d\varphi(\omega, t)_{\omega_3} \nu = \beta,$$

in welcher β der Vector der von aussen auf das betrachtete Element der Oberfläche des Körpers wirkenden Kraft ist und ν die nach aussen gehende vector Normale desselben. Ist also $\omega = \psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ die Gleichung der Oberfläche des Körpers vor der Gestaltsänderung $\varphi(\omega, t)$, in der $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zwei variable Scalare sind, so wird der Vector ω_t eines Punktes derselben zur Zeit t gleich $\varphi[\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), t)$ und $\nu = V d_{\mathfrak{x}} \varphi \, d_{\mathfrak{y}} \varphi$, wenn die Reihenfolge der Differentiale unter dem vector Zeichen so gewählt wird, dass ν die äussere Normale eines Oberflächenelementes wird. Eine weitere Gleichung ergiebt sich für die Oberfläche nicht, denn die Gleichung, welche aus der Bedingung des Verschwindens der durch die Verlegung der auf die Seitenflächen des tetraedrischen Oberflächenelementes des Körpers wirkenden Kräfte nach dem Anfangspunkte O der Vectoren entstehenden Kräftepaare folgt, wird auch hier bei Vernachlässigung von unendlich kleinen Werthen von höherer als der zweiten Ordnung identisch erfüllt, da dies unabhängig von den besonderen Formen der Ausdrücke für α_1, α_2, α_3 geschieht. Die vorige Bedingungsgleichung für die Oberfläche hat zur Voraussetzung, dass die Gestaltsänderung der tetraedrischen Oberflächenelemente des Körpers bei der betrachteten Gestaltsänderung $\varphi(\omega, t)$ desselben unendlich klein sei, sodass die Vectoren $d\varphi(\omega, t)_{\omega_1}$, $d\varphi(\omega, t)_{\omega_2}$, $d\varphi(\omega, t)_{\omega_3}$ sich nur unendlich wenig von Einheitsvectoren entsprechender Richtung und die Winkel zwischen je zweien von ihnen sich nur unendlich wenig von Rechten unterscheiden.

Die Vectoren $\mu_1', \ldots, \nu_3'''$ in den Ausdrücken für $\Delta\alpha$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$ sind nach dem Vorigen Functionen der Temperatur und der kleinen Werthe der Gestaltsvariabeln. Da nun die Zunahme der elastischen Kräfte bei allen unendlich kleinen Gestaltsänderungen zweiter Ordnung von demselben beliebigen

Anfangszustande aus sehr klein sind, können diese vector Functionen nicht unendlich gross sein, und da sie sich erfahrungsmässig nur wenig und stetig mit den Gestaltsvariabeln ändern, können auch ihre ersten Theildifferentiale nach diesen Variabeln nicht unendlich gross sein. Dann sind sie jedoch nach MacLaurin's Satz für Quaternionen nach steigenden Potenzen dieser scalar Variabeln jedenfalls bis zu den Gliedern mit den ersten Potenzen dieser Variabeln zu entwickeln, und da letztere in diesen Betrachtungen von uns als sehr klein angesehen sind, können wir uns auf die ersten constanten Glieder dieser Entwickelungen beschränken. Bei dieser Beschränkung sind also die vector Functionen $\mu_1', \ldots, \nu_3'''$ nur noch als Functionen der Temperatur zu betrachten.

In diesem Falle sind sie also für jede Anfangsgestalt des Parallelepipeds bei derselben Temperatnr die gleichen. Nun haben sie aber erfahrungsmässig für alle Temperaturen gleiche Richtung, wenn der Anfangszustand derjenige ohne innere elastische Kräfte ist. Mithin können sie für verschiedene Werthe von t dann nur ihre Grösse, jedoch nicht ihre Richtung ändern. Wir wollen als Anfangsgestalt diejenige wählen, welche aus der gegebenen dadurch entsteht, dass die Verdrehungen n_1, n_2, n_3 aufgehoben werden, und die also diejenige eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist. Wir können die Richtungen der Kanten desselben in diesem Zustande gegeben denken durch die drei Versoren

$$U d\varphi(\omega, t)_{\omega_1}, \quad UV d\varphi(\omega, t)_{\omega_2} d\varphi(\omega, t)_{\omega_1}, \quad UV d\varphi(\omega, t)_{\omega_1} d\varphi(\omega, t)_{\omega_2}.$$

Wenn wir ein solches rechtwinkliges Parallelepiped einer unendlich kleinen Gestaltsänderung bei constanter Temperatur t unterwerfen, durch Kräfte, welche von aussen senkrecht gegen seine Seitenflächen wirken, die normal zu $U d\varphi_{\omega_1}$ — wie wir abgekürzt schreiben wollen — sind und eine unendlich kleine Veränderung von m_1 vom Betrage dm_1 bewirken, so entsteht dann zugleich auch — nach den Beobachtungen — eine solche von m_2 und m_3 bezüglich um dm_2 und dm_3. Zugleich findet dann nur eine Vermehrung von α_1 um $\Delta\alpha_1$ statt, und dieser letztere Vector hat die Richtung von $-U d\varphi_{\omega_1}$, wenn dm_1 positiv ist, und die entgegengesetzte, ist es negativ. Wenden wir auf diesen Fall die Ausdrücke für $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$ an, so ergiebt sich

$$\Delta \alpha_1 = \mu'_1 d m_1 + \mu''_1 d m_2 + \mu'''_1 d m_3 = - e_1 d m_1 U d \varphi_{\omega_1},$$
$$0 = \mu'_2 d m_1 + \mu''_2 d m_2 + \mu'''_2 d m_3,$$
$$0 = \mu'_3 d m_1 + \mu''_3 d m_2 + \mu'''_3 d m_3,$$

wenn der Scalar e_1 die für die Dehnung 1 und die Flächeneinheit gerechnete Grösse der Kraftveränderung im vorliegenden Falle bezeichnet. Wir wollen ihn den *Dehnungsindex* nach der Richtung 1 des Körpers nennen; die Kanten des rechtwinkligen Parallelepipeds im Zustande ohne innere elastische Kräfte sollen hierbei diejenigen seiner drei zu einander rechtwinkligen krystallographischen Axen sein, wenn er ein Krystall ist.

Bezeichnen wir $d m_2 : d m_1$ mit w'_2 und $d m_3 : d m_1$ mit w'_3 und nennen diese neuen Scalare beziehlich *das Dehnungsverhältniss* des Körpers von 2 zu 1 oder 3 zu 1 unter den hier betrachteten Umständen, so nehmen die letzten Gleichungen die Form an:

$$\mu'_1 + \mu''_1 w'_2 + \mu'''_1 w'_3 = - e_1 U d \varphi_{\omega_1},$$
$$\mu'_2 + \mu''_2 w'_2 + \mu'''_2 w'_3 = 0,$$
$$\mu'_3 + \mu''_3 w'_2 + \mu'''_3 w'_3 = 0.$$

Unterwerfen wir zweitens dasselbe Parallelepiped von demselben Anfangszustande aus einer entsprechenden unendlich kleinen Gestaltsänderung bei constanter Temperatur unter der alleinigen Einwirkung einer äusseren, zu den Seitenflächen desselben normalen Kraft, welche lothrecht zur Richtung 2, der von $U V d \varphi_{\omega_2} d \varphi_{\omega_1}$, beziehlich zur Richtung von $U V d \varphi_{\omega_1} d \varphi_{\omega_2}$, der von 3, ist, und nennen e_2 und e_3 die Dehnungsindices des Körpers nach den Richtungen 2 und 3 und w''_1 sein Dehnungsverhältniss von 1 zu 3, w''_3 dasjenige von 3 zu 2, w'''_1 sein Dehnungsverhältniss von 1 zu 3 und w'''_2 das von 2 zu 3, und schreiben mit Vernachlässigung von unendlich kleinen Werthen $U d \varphi_{\omega_2}$ statt $U V d \varphi_{\omega_2} d \varphi_{\omega_1}$ und $U d \varphi_{\omega_2}$ statt $U V d \varphi_{\omega_1} d \varphi_{\omega_2}$, da bei den hier allein behandelten sehr kleinen Gestaltsänderungen das in diesem Falle erlaubt ist, so bekommen wir die entsprechenden Gleichungen:

$$\mu'_1 w''_1 + \mu''_1 w''_2 + \mu'''_1 = 0,$$
$$\mu'_2 w''_1 + \mu''_2 w''_2 + \mu'''_2 = 0,$$
$$\mu'_3 w''_1 + \mu''_3 w''_2 + \mu'''_3 = - e_3 U d \varphi_{\omega_3},$$

und
$$\mu'_1 w''_1 + \mu''_1 + \mu'''_1 w''_3 = 0,$$
$$\mu'_2 w''_1 + \mu''_2 + \mu'''_2 w''_3 = -e_2 U d\varphi_{\omega_2},$$
$$\mu'_3 w''_1 + \mu''_3 + \mu'''_3 w''_3 = 0.$$

Aus diesen neun Gleichungen ergiebt sich, wenn wir abkürzend schreiben:

$$r = 1 - w''_1 w'_2 - w'''_2 w''_3 - w'_3 w'''_1 + w''_1 w'''_2 w'_3 + w''_3 w'_2 w'''_1,$$

$$\mu'_1 = -e_1 (1 - w'''_2 w''_3) \frac{U d\varphi_{\omega_1}}{r},$$

$$\mu''_1 = e_1 (w''_1 - w''_3 w'''_1) \frac{U d\varphi_{\omega_1}}{r},$$

$$\mu'''_1 = e_1 (w'''_1 - w'''_2 w''_1) \frac{U d\varphi_{\omega_1}}{r};$$

$$\mu'_2 = e_2 (w'_2 - w'_3 w'''_2) \frac{U d\varphi_{\omega_2}}{r},$$

$$\mu''_2 = -e_2 (1 - w'_3 w'''_1) \frac{U d\varphi_{\omega_2}}{r},$$

$$\mu'''_2 = e_2 (w'''_2 - w'''_1 w'_2) \frac{U d\varphi_{\omega_2}}{r};$$

$$\mu'_3 = e_3 (w'_3 - w'_2 w''_3) \frac{U d\varphi_{\omega_3}}{r},$$

$$\mu''_3 = e_3 (w''_3 - w''_1 w'_3) \frac{U d\varphi_{\omega_3}}{r},$$

$$\mu'''_3 = -e_3 (1 - w''_1 w'_2) \frac{U d\varphi_{\omega_3}}{r}.$$

Wir wollen uns jetzt bei dem augenblicklichen Zustande des Parallelepipeds bei constanter Temperatur eine unendlich kleine Gestaltsänderung derart denken, dass sich allein n_1 um dn_1 ändern mag. Erfahrungsmässig erleidet hierbei nur die Theilkraft von α_1 nach der Richtung von $U d\varphi_{\omega_2}$ und diejenige von α_2 nach der Richtung von $U d\varphi_{\omega_1}$ einen Zuwachs, dessen Richtung mit derjenigen dieser Versoren übereinstimmt, wenn dn_1 negativ ist, und ihr entgegengesetzt ist, wenn es positiv ist. Bezeichnen wir danach mit v'_1 und v'_2 positive scalar Constanten, so können wir aus den allgemeinen Ausdrücken für $\Delta\alpha$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$ schliessen, dass in diesem Falle

$$\Delta \alpha_1 = \nu_1' \, d n_1 = - v_1' \, U d \varphi_{\omega_2} d n_1 ,$$
$$\Delta \alpha_2 = \nu_2' \, d n_1 = - v_2' \, U d \varphi_{\omega_1} d n_1 ,$$
$$\Delta \alpha_3 = \nu_3' \, d n_1 = 0$$

ist. Aus ihnen folgt:

$$\nu_1' = - v_1' \, U d \varphi_{\omega_2}, \quad \nu_2' = - v_2' \, U d \varphi_{\omega_1}, \quad \nu_3' = 0.$$

Da

$$n_1 = \cos \angle \frac{d \varphi_{\omega_1}}{d \varphi_{\omega_2}} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \angle \frac{d \varphi_{\omega_1}}{d \varphi_{\omega_2}} \right) = \frac{\pi}{2} - \angle \frac{d \varphi_{\omega_1}}{d \varphi_{\omega_2}},$$

da sich bei den hier allein behandelten unendlich kleinen Gestaltsänderungen $\angle \, d \varphi_{\omega_1} / d \varphi_{\omega_2}$, wie alle Winkel des betrachteten Parallelepipeds unendlich wenig von Rechten unterscheiden, und weil also

$$d n_1 = - d \left(\angle \frac{d \varphi_{\omega_1}}{d \varphi_{\omega_2}} \right),$$

wäre v_1', der *Verdrehungsindex von 1 zu 2*, für die Flächeneinheit und die Einheit des Winkels der Verdrehung gerechnet, die Grösse des letzteren gemessen durch die zugehörige Länge auf einem Einheitskreise.

Durch entsprechende Betrachtungen und Erfahrungen ergiebt sich:

$$\nu_1'' = 0, \quad \nu_2'' = - v_2'' U d \varphi_{\omega_3}, \quad \nu_3'' = - v_3'' U d \varphi_{\omega_2},$$
$$\nu_1''' = - v_1''' U d \varphi_{\omega_3}, \quad \nu_2''' = 0, \quad \nu_3''' = - v_3''' U d \varphi_{\omega_1}.$$

In diesen Gleichungen bezeichnet v_2'' den Verdrehungsindex von 2 zu 3, v_3'' den von 3 zu 2, v_1''' den von 1 zu 3 und v_3''' denjenigen von 3 zu 1.

Danach werden die *Gleichungen für die Vectoren der elastischen Kräfte* α_1, α_2, α_3, wie sie einem Zeitpunkte t *bei einer stetigen Gestaltsänderung* $\varphi(\omega, t)$ eines Körpers entsprechen, die folgenden:

$$\alpha_1 = \sum_0^t \{ (d m_1 - d_t m_1) \mu_1' + (d m_2 - d_t m_2) \mu_1'' + (d m_3 - d_t m_3) \mu_1''' + (d n_1 - d_t n_1) \nu_1' + (d n_3 - d_t n_3) \nu_1'' \},$$
$$\alpha_2 = \sum_0^t \{ (d m_1 - d_t m_1) \mu_2' + (d m_2 - d_t m_2) \mu_2'' + (d m_3 - d_t m_3) \mu_2''' + (d n_1 - d_t n_1) \nu_2' + (d n_2 - d_t n_2) \nu_2''' \},$$
$$\alpha_3 = \sum_0^t \{ (d m_1 - d_t m_1) \mu_3' + (d m_2 - d_t m_2) \mu_3'' + (d m_3 - d_t m_3) \mu_3''' + (d n_2 - d_t n_2) \nu_3'' + (d n_3 - d_t n_3) \nu_3''' \}.$$

Beim Nullpunkte der Zeit ist hierbei das Parallelepiped ohne innere elastische Kräfte gedacht.

Die Bedingungsgleichung für die Vectoren der elastischen Kräfte:

$$V(\alpha_1 \, d\varphi_{\omega_1} + \alpha_2 \, d\varphi_{\omega_2} + \alpha_3 \, d\varphi_{\omega_3}) = 0,$$

führt uns nun auf gewisse Beziehungen, die zwischen den vector Factoren dieser Summen bestehen müssen und welche die Anzahl dieser Factoren verringern. Da sie für jeden Zustand des Parallelepipeds gelten muss, also im besonderen für zwei unendlich nahe Zustände desselben, in deren erstem die Vectoren der elastischen Kräfte α_1, α_2, α_3, in deren zweitem sie $\alpha_1 + \Delta\alpha_1$, $\alpha_2 + \Delta\alpha_2$, $\alpha_3 + \Delta\alpha_3$ sein mögen, so folgt aus ihr, wenn sie auf diese beiden Zustände angewandt wird, die weitere Gleichung:

$$V\{\Delta\alpha_1 \, d\varphi_{\omega_1} + \Delta\alpha_2 \, d\varphi_{\omega_2} + \Delta\alpha_3 \, d\varphi_{\omega_3}\} = 0.$$

Ersetzt man in ihr $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$ durch die soeben für sie entwickelten Ausdrücke und in diesen wieder $\mu'_1, \ldots, \nu'''_3$ durch die kurz zuvor für diese Vectoren gefundenen Werthe, so wird sie, wenn man von unendlich kleinen Werthen höherer Ordnung als die beibehaltenen absieht,

$$\begin{aligned} &V\,U\,d\varphi_{\omega_1}\,U\,d\varphi_{\omega_2}(\nu'_1 - \nu'_2)(dn_1 - d_t n_1) \\ +\;&V\,U\,d\varphi_{\omega_2}\,U\,d\varphi_{\omega_3}(\nu''_2 - \nu''_3)(dn_2 - d_t n_2) \\ +\;&V\,U\,d\varphi_{\omega_3}\,U\,d\varphi_{\omega_1}(\nu'''_3 - \nu'''_1)(dn_3 - d_t n_3) = 0. \end{aligned}$$

Da sie für beliebige Werthe der scalar Differenzen $(dn_1 - d_t n_1)$, $(dn_2 - d_t n_2)$, $(dn_3 - d_t n_3)$ gelten muss, so folgt aus ihr:

$$\nu'_1 = \nu'_2, \quad \nu''_2 = \nu''_3, \quad \nu'''_3 = \nu'''_1.$$

Es ist also der Verdrehungsindex von 1 zu 2 gleich dem von 2 zu 1, der von 2 zu 3 gleich dem von 3 zu 2, und der von 3 zu 1 gleich dem von 1 zu 3.

Die allgemeinen Ausdrücke für $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$ sind für jeden Würfel gültig, der einem Körper entnommen ist, mögen seine Kanten irgend welche Lage zu seinen krystallographischen Axen haben, wenn er ein Krystall ist, aber die vector Factoren haben für einen jeden solchen Würfel, im allgemeinen, andere Bedeutung. *Die vorigen Werthe für die Vectoren $\mu'_1, \ldots$ gelten nur, wenn die Kanten eines solchen Würfels ohne innere elastische Kräfte den krystallographischen Axen des Körpers parallel sind,*

wenn er ein Krystall ist; denn nur dann sind die allein durch Dehnungen nach den Richtungen seiner Kanten in ihm erzeugten elastischen Kräfte lothrecht zu seinen Seitenflächen und diese Symmetrieebenen seiner Masse, wie bei der Herleitung dieser Werthe angenommen ward. *Die Ausdrücke für die Vectoren der elastischen Kräfte enthalten also in diesem Falle im allgemeinen zwölf elastische Constanten.*

Sind *zwei krystallographische Axen* physikalisch *gleichwerthig*, zum Beispiel diejenigen, welche die Richtungen 1 und 2 haben, so ist ersichtlich:

$$e_1 = e_2, \quad w_1' = w_2', \quad w_2''' = w_1''', \quad w_3' = w_3'', \quad v_2'' = v_3'',$$

und wir erhalten in diesem Falle in jenen Ausdrücken *sieben elastische Constanten.*

Wenn die Richtung 3 eine *krystallographische Hauptaxe* in dem Sinne ist, dass *alle Richtungen senkrecht zu ihr physikalisch gleichwerthig* sind, so gelten zwischen den elastischen Constanten erstens die eben hergeleiteten Beziehungen, da ja zwei Kanten eines solchen Würfels physikalisch gleichwerthig sind. Jetzt verhalten sich jedoch alle Würfel eines Körpers mit einer solchen Hauptaxe parallel der Richtung 3 gleich, deren eine Kante jener Richtung parallel ist. Wenn deshalb verschiedene solche Würfel gleicher Dehnung nach der Richtung einer Kante senkrecht zur Richtung 3 bei constanter, gleicher Temperatur unterworfen werden, unter dem Einfluss äusserer Kräfte, welche den parallelen Kanten senkrecht zur Richtung 3 parallel sind, so werden in allen diesen Würfeln jenen äusseren Kräften an Grösse gleiche, doch entgegengesetzt gerichtete innere elastische Kräfte erzeugt, die also für die verschiedenen Würfel von gleicher Grösse sind. Aus allen diesen Würfeln werden dann congruente rechtwinklige Parallelepipede, auf deren Seitenflächen senkrecht zur Richtung 3 und denen parallel zur Richtung der einwirkenden äusseren Kräfte und parallel der Richtung 3 keine inneren Kräfte wirken, sondern nur solche auf die Seitenflächen senkrecht zur Richtung der äusseren Kräfte, welche normal zu letzteren Flächen sind.

Ein Vector parallel der Hauptaxe des Körpers sei der Einheitsvector ω_3 senkrecht zu ihr und zu einander seien die

Einheitsvectoren ω_1 und ω_2, und ebenso auch die beiden anderen Einheitsvectoren ω'_1 und ω'_2. Es sei ferner die Drehung um ω_3 von ω_1 nach ω_2, oder von ω'_1 nach ω'_2 positiv oder rechtsläufig. Wir unterwerfen den Körper nun bei constanter Temperatur der Gestaltsänderung

$$\varphi\,\omega = \omega - a\,\omega'_1\,S\,\omega'_1\,\omega - b\,\omega'_2\,S\omega'_2\,\omega - c\,\omega_3\,S\,\omega_3\,\omega.$$

Wir wollen danach die Werthe der Gestaltsvariabeln für einen unendlich kleinen Würfel bestimmen, dessen Kanten den Vectoren ω_3, ω'_1, ω'_2 parallel sein sollen. Es wird für ihn

$$m'_1 = a, \quad m'_2 = b, \quad m_3 = c, \quad n'_1 = n'_2 = n'_3 = 0.$$

Aus diesem Würfel wird also dabei ein rechtwinkliges Parallelepiped mit unveränderter Richtung der Kanten. Da wir hier nur unendlich kleine Gestaltsänderungen untersuchen, müssen die Scalare a, b, c unendlich klein sein. Es soll nun

$$m'_2 : m'_1 = b : a = w'_2$$

gleich dem Dehnungsverhältniss von 2 zu 1, oder dem der Richtung von ω'_2 zu der von ω'_1 sein, und $m_3 : m'_1 = c : a = w'_3$ gleich dem Dehnungsverhältniss von 3 zu 1, oder dem der Richtung von ω_3 zu der von ω'_1 sein. Die Gestaltsänderung dieses Würfels kann demnach in diesem Falle durch Einwirkung äusserer Kräfte hervorgebracht werden, welche nur an den Seitenflächen desselben senkrecht zu ω'_1 angreifen und deren Richtung der von ω'_1 parallel ist. Von den hierdurch entstehenden inneren elastischen Kräften ist dann nach dem Vorigen

$$\alpha'_1 = -\,e_1\,m'_1\,\omega'_1, \quad \alpha'_2 = 0, \quad \alpha'_3 = 0,$$

wenn α'_1 der für die Flächeneinheit gerechnete Vector der elastischen Kraft ist, der von der Seitenfläche senkrecht zu ω'_1 und durch den Endpunkt von ω'_1 gehend ist, und α'_2 und α'_3 die entsprechende Bedeutung für die Seitenflächen normal zu ω'_2 beziehlich ω'_3 und durch deren Endpunkte gehend haben. Nun sind diese letzteren drei Vectoren diejenigen zu Flächen, welche senkrecht zu einander sind und durch denselben Punkt gehen; durch sie können wir den Vector der elastischen Kraft zu irgend einem anderen ebenen Element bestimmen, das durch eben diesen Punkt geht. Wir können hier auch α'_1, α'_2, α'_3 als die Vectoren der für die Flächeneinheit gerechneten Kräfte

ansehen, welche von aussen auf die drei zu einander lothrechten Seitenflächen des betrachteten rechtwinkligen Parallelepipeds wirken, die durch den Endpunkt des Vectors ω gehen, von dem die Kanten parallel den Vectoren ω_3, ω'_1, ω'_2 ausgehen.

Denken wir uns jetzt vom Endpunkte des Vectors ω aus die drei unendlich kleinen Vectoren $x\,\omega_1$, $y\,\omega_2$, $z\,\omega_3$; sie mögen die Kanten eines unendlich kleinen Würfels bilden, dessen Gestaltsänderung bei der eben angegebenen Gestaltsänderung $\varphi\,\omega$ bei constanter Temperatur wir nun untersuchen wollen. Sie ist bestimmt durch die Werthe $m_1, \ldots, n_3$ der Gestaltsvariabeln für ihn nach derselben. Berücksichtigen wir, dass

$$\omega'_1 = -\omega_1 S\omega_1\,\omega'_1 - \omega_2 S\omega_2\,\omega'_1, \quad \omega'_2 = -\omega_1 S\omega_1\,\omega_2 - \omega_2 S\omega_2\,\omega'_2,$$
$$S\omega_1\,\omega'_1 = S\omega_2\,\omega'_2, \qquad S\omega_2\,\omega'_1 = -S\omega_1\,\omega'_2$$

ist, so ergiebt sich

$$m_1 = a(S\omega_1\,\omega'^2_1 + w'_2 S\omega_1\,\omega'^2_2), \quad m_2 = a(S\omega_2\,\omega'^2_1 + w'_2 S\omega_2\,\omega'^2_2),$$
$$m_3 = a\,w'_3, \quad n_1 = 2a(1-w'_2) S\omega_1\,\omega'_1 S\omega_2\,\omega'_1, \quad n_2 = n_3 = 0.$$

Es mag der Vector ω_1 zwischen ω'_1 und ω'_2 liegen, wie stets angenommen werden kann, und die Vectoren der elasti-Kräfte α_1, α_2, α_3 soll in Bezug auf das unendlich kleine Parallelepiped mit den Kanten $x\,d\varphi_{\omega_1}$, $y\,d\varphi_{\omega_2}$, $z\,d\varphi_{\omega_3}$ die frühere Bedeutung haben. Wir haben dann nach Früherem, da die Vectoren der elastischen Kräfte α'_1, α'_2, α'_3 drei zu einander lothrechten ebenen Elementen durch einen Punkt zugehören und die beiden letzteren gleich Null sind,

$$-\alpha_1 = \alpha'_1 S\omega'_1 U V d\varphi_{\omega_2} d\varphi_{\omega_3},$$
$$-\alpha_2 = \alpha'_1 S\omega'_1 U V d\varphi_{\omega_3} d\varphi_{\omega_1},$$
$$-\alpha_3 = \alpha'_1 S\omega'_1 U V d\varphi_{\omega_1} d\varphi_{\omega_2}.$$

Wenn man die in Bezug auf a, b, c unendlich kleinen Werthe zweiter Ordnung nicht in Rechnung zieht, ergiebt sich daraus:

$$\alpha_1 = a\,e_1\,\omega'_1 S\omega_1\,\omega'_1, \quad \alpha_2 = a\,e_1\,\omega'_1 S\omega_2\,\omega'_1, \quad \alpha_3 = 0.$$

Die Vectoren der elastischen Kräfte α_1, α_2, α_3, welche zu einem schiefwinkligen Parallelepiped gehören, das *bei constanter Temperatur* aus einem Würfel ohne innere elastische Kräfte entstanden ist, dessen Kanten seinen krystallographischen Axen

parallel sind, als welche ω_1, ω_2, ω_3 in diesem Falle zu betrachten sind, ergeben sich nach den früher entwickelten Ausdrücken vermittelst der Gleichungen:

$$\alpha_1 = \mu_1' m_1 + \mu_1'' m_2 + \mu_1''' m_3 + \nu_1' n_1 + \nu_1''' n_3,$$
$$\alpha_2 = \mu_2' m_1 + \mu_2'' m_2 + \mu_2''' m_3 + \nu_2' n_1 + \nu_2'' n_2,$$
$$\alpha_3 = \mu_3' m_1 + \mu_3'' m_2 + \mu_3''' m_3 + \nu_3'' n_2 + \nu_3''' n_3.$$

Hier sind für m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3 die soeben angegebenen Werthe zu setzen. Nimmt man diese Ausdrücke für α_1, α_2, α_3, nachdem $\mu_1', \ldots, \nu_3'''$ durch die zuvor für sie angegebenen Ausdrücke ersetzt sind, so müssen die Gleichungen

$$\alpha_1 - a e_1 \omega_1' S\omega_1 \omega_1' = 0, \quad \alpha_2 - a e_1 \omega_1' S\omega_2 \omega_1' = 0, \quad \alpha_3 = 0,$$

für alle Werthepaare der zu einander rechtwinkligen Einheitsvectoren ω_1', ω_2', welche zu ω_3 senkrecht sind, gelten. Die Versoren $U d\varphi_{\omega_1}$, $U d\varphi_{\omega_2}$, $U d\varphi_{\omega_3}$, welche in α_1, α_2, α_3 vorkommen, können durch ω_1, beziehlich ω_2 oder ω_3 ersetzt werden, da wir unendlich kleine Werthe zweiter Ordnung in Bezug auf a, b, c nicht berücksichtigen.

Schreibt man für ω_1' in den letzten Gleichungen

$$-\omega_1 S\omega_1 \omega_1' - \omega_2 S\omega_2 \omega_1'$$

und beachtet, dass

$$-S\omega_1 \omega_1' = \cos \angle\, \omega_1 : \omega_1'$$

und

$$-S\omega_2 \omega_1' = \cos \angle\, \omega_2 : \omega_1' = \sin \angle\, \omega_1 : \omega_1',$$

und setzt abgekürzt cos und sin statt $\cos \angle\, \omega_1 : \omega_1'$ und $\sin \angle\, \omega_1 : \omega_1'$, so erhält man, da die Factoren von ω_1, ω_2, ω_3 wegen der Willkürlichkeit dieses cos und sin in diesen Gleichungen einzeln verschwinden müssen, aus der ersten:

$$\frac{a e_1}{r}\,[-(\cos^2 + w_2' \sin^2)(1 - w_1''' w_3') + (\sin^2 + w_2' \cos^2)(w_2' - w_3' w_1''')$$
$$+ w_3'(w_1''' - w_1''' w_2')] + a e_1 \cos^2 = 0,$$

eine Gleichung, die identisch erfüllt ist; und ferner

$$-[2 a \nu_1'(1 - w_2') - a e_1] S\omega_1 \omega_1' S\omega_2 \omega_1' = 0,$$

welche zur *neuen Beziehung zwischen den elastischen scalar Constanten* führt:

$$w_2' = 1 - e_1 : 2\nu_1'.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$-a[2v_1'(1-w_2')-e_1]S\omega_1\omega_1' S\omega_2\omega_1' = 0,$$

was wieder zur letzten Beziehung führt, und

$$\frac{ae_1}{r}[(\cos^2+w_2'\sin^2)(w_2'-w_1'''w_3')-(\sin^2+w_2'\cos^2)(1-w_1'''w_3') + w_3'(w_1'''-w_1'''w_2')]+ae_1'\sin^2=0,$$

eine identisch erfüllte Gleichung. Aus der dritten Gleichung ergiebt sich die identische Gleichung

$$\frac{ae_3}{r}[(\cos^2+w_2'\sin^2)(w_3'-w_2'w_3')+(\sin^2+w_2'\cos^2)(w_3'-w_2'w_3') - w_3'(1-w_2'^2)]=0.$$

In dem Falle einer Hauptaxe, und zwar *parallel der Richtung 3*, in welchem alle Richtungen senkrecht zu ihr physikalisch gleichwerthig sind, haben wir die folgenden Beziehungen zwischen den elastischen scalar Constanten:

$$e_1=e_2,\quad w_1''=w_2'=1-\frac{e_1}{2v_1},\quad w_2'''=w_1''',\quad w_3'=w_3'',\quad v_2''=v_3''',$$

und mithin *sechs elastische scalar Constanten.*

Sind *die Ebenen durch je zwei krystallographische Axen physikalisch gleichwerthig*, so haben wir offenbar:

$$e_1=e_2=e_3=\text{ sagen wir } e,$$
$$v_1'=v_2''=v_3'''=\text{ sagen wir } v,$$
$$w_1'''=w_2'''=w_3''=w_3'=w_2'=w_1''=\text{ wie wir schreiben wollen } w,$$

also *drei elastische scalar Constanten.*

Sind seine drei Axen auch noch Hauptaxen, so tritt die weitere Beziehung hinzu

$$w=1-\frac{e}{2v};$$

dann ist jede Ebene durch jede Hauptaxe physikalisch gleichwerthig, wie es bei einem *Nichtkrystall* der Fall ist und wir haben also bei einem Nichtkrystalle *zwei elastische scalare Constanten.*

Für einen Nichtkrystall werden danach die Ausdrücke für *die Vectoren der elastischen Kräfte* bei einer Gestaltsänderung $\varphi(\omega, t)$ desselben, wenn beim Nullpunkte der Zeit der Körper ohne elastische Kräfte ist, zur Zeit t die folgenden:

$$\alpha_1 = -\sum_0^t [(d m_1 - a_{d\varphi_{\omega_1}} d t)\frac{e}{r}(1-w)^2 - (d m_2 - a_{d\varphi_{\omega_2}} d t)\frac{e}{r}(w - w^2)$$
$$-(d m_3 - a_{d\varphi_{\omega_3}} d t)\frac{e}{r}(w - w^2)]\,.\,U d\varphi_{\omega_1} - \sum_0^t [(d n_1 - d_t n_1) v]\,.\,U d\varphi_{\omega_2}$$
$$-\sum_0^t [(d n_3 - d_t n_3) v]\,.\,U d\varphi_{\omega_3},$$

$$\alpha_2 = -\sum_0^t [-(d m_1 - a_{d\varphi_{\omega_1}} d t)\frac{e}{r}(w - w^2) + (d m_2 - a_{d\varphi_{\omega_2}} d t)\frac{e}{r}(1 - w^2)$$
$$-(d m_3 - a_{d\varphi_{\omega_3}} d t)\frac{e}{r}(w - w^2)]\,.\,U d\varphi_{\omega_2} - \sum_0^t [(d n_1 - d_t n_1) v]\,.\,U d\varphi_{\omega_1}$$
$$-\sum_0^t [(d n_2 - d_t n_2) v]\,.\,U d\varphi_{\omega_3},$$

$$\alpha_3 = -\sum_0^t [-(d m_1 - a_{d\varphi_{\omega_1}} d t)\frac{e}{r}(w - w^2) - (d m_2 - a_{d\varphi_{\omega_2}} d t)\frac{e}{r}(w - w^2)$$
$$+(d m_3 - a_{d\varphi_{\omega_3}} d t)\frac{e}{r}(1 - w^2)]\,.\,U d\varphi_{\omega_3} - \sum_0^t [(d n_2 - d_t n_2) v]\,.\,U d\varphi_{\omega_2}$$
$$-\sum_0^t [(d n_3 - d_t n_3) v]\,.\,U d\varphi_{\omega_1};$$

in ihnen ist

$$r = 1 - 3 w^2 + 2 w^3,$$

und für die Versoren $U d\varphi_{\omega_1}$, $U d\varphi_{\omega_2}$, $U d\varphi_{\omega_3}$ ist der der Zeit t entsprechende Werth zu nehmen.

Berlin, den 17. Juni 1895.

4. *Eine einfache objective Darstellung der Hertz'schen Spiegelversuche; von Victor Biernacki.*

Alle bisher benutzten Methoden zur Demonstration der Hertz'schen Spiegelversuche sind entweder wenig anschaulich oder bedürfen solche Hülfsmittel, die nicht Jedem zugänglich sind. Es sei mir daher gestattet eine Methode zu beschreiben, mittels deren ich alle Eigenschaften der electrischen Strahlen mit Hülfe sehr einfacher und kleiner Apparate mit Sicherheit und leicht einem zahlreichen Auditorium vorführen.

Branly [1]) hat vor einigen Jahren darauf hingewiesen, dass eine mit metallischen Feilspänen gefüllte Röhre, die gewöhnlich einen sehr grossen Wiederstand bietet, denselben unter dem Einflusse einer oscillatorischen electrischen Entladung in hohem Grade verliert. Lodge wandte eine solche Röhre (die er „coherer" nennt) zur Entladung bez. auch Darstellung der electrischen Schwingungen an. [2]) Die Methode von Lodge ist aber recht umständlich: sie bedarf besonderer complicirter Apparate, die Versuche müssen sehr sorgfältig ausgeführt werden, nichtsdestoweniger sind sie nicht so instructiv und interessant, wie die Versuche in der classischen Form, welche ihnen Hertz selbst gegeben hat.

Viel einfacher ist es eine solche Röhre in die Brennlinie des secundären Hertz'schen Spiegels einzusetzen. Die Versuche gelingen dann mit ganz kleinen Spiegeln, deren Handhabung sehr leicht und bequem ist, und bedürfen keiner besonderen Apparate und nur geringer Hülfsmittel, die in jedem, physikalischen Cabinet ohne Zweifel vorhanden sind.

Zuerst habe ich die Versuche mit Spiegeln von folgenden Dimensionen ausgeführt: Höhe 90 cm, Breite der Oeffnung

1) Branly, Compt. rend. **111.** p. 785. 1890.
2) Lodge, The work of Hertz.

80 cm, Brennweite 12,5 cm. In der Brennlinie des primären Spiegels befand sich der genau nach den Angaben von Hertz hergestellte primäre Leiter. Zur Erregung der Schwingungen diente ein kleines Inductorium, welches durch drei Accumulatoren oder Bunsen'sche Elemente getrieben wurde. In der Brennlinie des secundären Spiegels befand sich eine 20 cm lange und $^1/_2$ cm weite mit Kupferspänen gefüllte Glasröhre; von beiden Enden der Röhre führten Drähte durch Oeffnungen in der Hinterseite des Spiegels, die sie zu einem Kreis mit drei Accumulatoren oder Bunsen'schen Elementen und einem grossen verticalen Vorlesungsgalvanometer verbanden. Der secundäre Spiegel muss immer so aufgestellt werden, dass seine Brennlinie und folglich die Röhre mit Spänen horizontal sei; sonst häufen sich die Spänen in ihrem unteren Theile schnell an, und die Wirkung der Röhre hört auf. Deswegen wurde die Lage des secundären Spiegels während der Versuche nicht geändert, und die Veränderung der gegenseitigen Lage beider Spiegel geschah durch Drehung des primären Spiegels. Die Versuche wurden bei einer Entfernung von 12 m zwischen den Brennlinien beider Spiegel angestellt; bei einer so grossen Entfernung war keine unmittelbare Wirkung der electrischen Strahlen auf die Drähte, welche von den Accumulatoren und Galvanometer zu der Röhre führten, wahrnehmbar. Mit den beschriebenen Spiegeln sprach die Röhre auch auf die stark gedämpften Schwingungen an, welche bei einer schon angegriffenen Oberfläche der Kugeln des primären Leiters entstehen. Dadurch wird die Nothwendigkeit des unangenehmen öftern Aufpolirens der Kugeln beseitigt. Ja es ist sogar bequemer, wenn die Kugeln nicht frisch polirt sind, weil sonst zuweilen eine wahrnehmbare unmittelbare Wirkung auf die Drähte ausserhalb des secundären Spiegels, wenn auch nicht sehr stark, auftreten kann.

Bei gewöhnlichem Zustande der Röhre ist der Widerstand so gross, dass die Galvanometernadel unabgelenkt bleibt. Wenn aber die electrischen Strahlen auf den secundären Spiegel fallen und dort in der Brennlinie (auf der Röhre) gesammelt werden, wird die Galvanometernadel heftig abgelenkt. Eine schwache Erschütterung der Röhre genügt, damit ihr Widerstand wieder den ursprünglichen grossen Werth

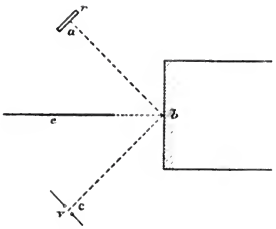
annehme, wodurch die Nadel in ihre Gleichgewichtslage zurückkehrt. Es muss bemerkt werden, dass die Röhre mit den Spänen nicht zu dicht gefüllt werden darf, weil sie sonst den Strom beständig in gewissem Maasse leitet, und die Verminderung ihres Widerstandes unter dem Einflusse der electrischen Schwingungen nicht so deutlich auftritt. Anstatt des Galvanometers kann man auch eine electrische Klingel anwenden; wenn die electrischen Strahlen auf die Röhre treffen, beginnt die Klingel zu tönen, und klingelt, bis durch die Erschütterung der Röhre ihr ursprünglicher Widerstand wiederhergestellt wird.

Auf den Rath meines verehrten Lehrers Prof. P. Silow habe ich noch viel kleinere Spiegel verfertigt. Die Länge der Spiegel war auf 45 cm reducirt, die Weite der Oeffnungen auf 30 cm, bei einer Brennweite von 3 cm. Der primäre Leiter war zweckmässig verkleinert; in die Brennlinie des secundären Spiegels setzte ich dieselbe Röhre ein, welche zu den Versuchen mit den grösseren Spiegeln diente. Bei einer Entfernung der Spiegel voneinander von ungefähr 4 m gelingen die Versuche ebenso gut und deutlich, wie mit den grösseren Spiegeln, wenn man nur die Kugeln sorgfältig reinigt. Alle anderen Hülfsmittel bleiben dieselben, wie bei den vorigen Versuchen mit grösseren Spiegeln. Um die unmittelbare Wirkung auf die Drähte ausserhalb des secundären Spiegels zu vermeiden, ist es zweckmässig, sie mit einem Zinkbleche zu bedecken. Solche kleine Spiegel gestatten die ganze Anordnung zur Darstellung der Eigenschaften der Licht- und Wärmestrahlen zu benutzen, wodurch die Analogie zwischen allen diesen Strahlen sehr deutlich auffällt.

Mit diesen kleinen Spiegeln lassen sich alle bekannten Versuche sehr leicht vorführen, also die geradlinige Fortpflanzung, die Reflexion (dazu stellt man die Oeffnung des primären Spiegels nach oben, während die Lage des secundären Spiegels unverändert bleibt, und reflectirt die Strahlen mittels eines Stückes Zinkblech), die Durchlässigkeit der Nichtleiter und die Undurchlässigkeit der Leiter, die Durchlässigkeit oder Undurchlässigkeit eines Drahtschirmes, die Versuche mit gekreuzten Spiegeln etc.

Bei der Darstellung des Polarisationswinkels der electristrahlen diente als durchsichtige reflectirende Wand die Ober-

fläche eines Kachelofens. Die Brennlinien beider Spiegel wurden horizontal gestellt in der Weise, die aus der beigelegten Zeichnung ersichtlich ist, *v* stellt den primären Leiter und *r* die mit Kupferspänen gefüllte Röhre in der Brennlinie des sesundären Spiegels dar. Behufs Beseitigung der unmittelbaren Wirkung der Strahlen wurde zwischen die Spiegel ein Blechschirm *e* eingeschoben. Die Entfernungen *a b* und *b e* beider Spiegel vom Ofen betrugen je 2 m. Stellen wir in *b* ein Metallblech auf, so wird die Galvanometernadel in *c* heftig abgelenkt. Man kann immer den empfangenden Spiegel in eine solche Lage bringen, dass der Winkel *c b e* gleich dem Winkel *e b a* ist. Wenn diese Winkel gleich je z. B. 40° sind, schlägt die Galvanometernadel auch nach der Beseitigung des Bleches aus, wenn auch nicht so stark, Anders ist es, wenn diese Winkel ungefähr gleich 60° sind, *in diesem Falle werden die Strahlen vom Ofen nicht reflectirt*, und die Galvanometernadel bleibt in Ruhelage; schiebt man aber vor *b* ein Metallblech, so schlägt die Nadel wieder aus. Daraus schliessen wir, dass der Winkel von 60° der Polarisationswinkel des Ofens für electrische Strahlen ist. Folgender Versuch beweist dies absolut sicher. Stellen wir (bei dem Einfallswinkel von 60°) den primären Spiegel vertical, so wird dadurch die Polarisationsebene der einfallender Strahlen um 90° gedreht, und jetzt werden sie vom Ofen reflectirt. Die reflectirten Strahlen wirken, da die Schwingungen jetzt vertical sind, nicht auf unsere Röhre, die horizontal bleibt. Lassen wir aber die reflectirten Strahlen durch ein unter 45° gegen die Horizontale geneigtes Drahtgitter durchgehen, so wirken die durchgelassenen Strahlen (ebenso, wie im Versuche mit gekreuzten Spiegeln) auf die Röhre, und die Galvanometernadel schlägt aus.



Schiebt man zwischen zwei gekreuzte Nicols einen doppelbrechenden Krystall, dessen Axe unter 45° gegen die Haupt-

schnitte beider Nicols geneigt wird, so tritt die Aufhellung des dunklen Feldes ein. Ebenso wirken sehr dünne für das Licht durchsichtige Holzplättchen, indem die Richtung der Faser die Rolle einer optischen Axe spielt. Jüngst hatte K. Mack einen analogen Versuch mit electrischen Strahlen beschrieben [1]); er hat nämlich bewiesen, dass eine dicke Holzplatte, deren Faser unter 45° gegen die Brennlinien zweier gekreuzten Spiegel gezeigt ist, ebenso wirkt, wie eine ebenso mit ihrer Axe gestellte parallele Krystallplatte zwischen gekreuzten Nicols. Daraus kann man schliessen, dass das Holz sich den electrischen Strahlen gegenüber wie ein doppelbrechender Krystall verhält. Es lag somit nahe zu untersuchen, ob auch ein wirklicher für das Licht doppelbrechender Krystall auch für die electrischen Strahlen doppelbrechend sein wird. In einem Stücke klaren unversehrten Eises haben die Axen der Isotropie aller Krystalle dieselbe Richtung, sie steht zu den Gefrierflächen senkrecht. Stellt man also in den Weg der electrischen Strahlen ein Stück parallel zu der Axe geschnittenen Eises, so soll es den electrischen Strahlen gegenüber sich ganz ähnlich verhalten, wie parallele Krystallplatten den Lichtstrahl gegenüber. Diese Vermuthung wurde durch den Versuch vollständig bestätigt. Sind die Spiegel gekreuzt, so bleibt die Galvanometernadel in Ruhe. Schiebt man aber zwischen die Spiegel ein parallel zur Axe geschnittenes Stück Eis und neigt man diese Axe unter 45° gegen die Brennlinien der Spiegel, so schlägt die Galvanometernadel sehr deutlich aus. Es sei noch bemerkt, dass der primäre Spiegel bei diesen Versuchen mit Zinkblech, in dem sich eine Oeffnung von ca. 200 qcm befand, bedeckt wurde; dadurch brauchte ich nicht mit zu grossen Stücken experimentiren. Der Weg der electrischen Strahlen im Eise betrug ungefähr 40 cm.

Warschau, Physik. Lab. d. Univ., im März 1895.

1) K. Mack, Wied. Ann. **54.** p. 342. 1895; vgl. auch A. Righi, Wied. Ann. **55.** p. 389. 1895.

5. *Die ponderomotorischen Wirkungen eines variablen Magnetfeldes auf geschlossenene Stromleiter und ihre Verwerthung für die Bestimmung von Selbstinductionscoefficienten; von Franz Koláček.*

(Aus den Sitzungsber. der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. Math.-naturw. Klasse. 1894; vorgelegt vom Hrn. Verf.)

Bekanntermaassen versagen die gebräuchlichen Methoden zur Bestimmung des Selbstinductionscoefficienten, falls diese Grösse entsprechend kleine Werthe besitzt; andererseits ist es klar, dass die Zeitmittel der mechanischen Kräfte, denen in sich geschlossene Stromleiter in periodischen Magnetfeldern unterliegen, einzig und allein nur durch Selbstinduction bedingt sein können. Der augenblickliche Werth der mechanischen Kraft ist nämlich eine Grösse, die einerseits der augenblicklichen Stromstärke i im Leiter, andererseits der Zahl der vom Leiter abgefassten Inductionslinien (Kraftlinien) P proportional ist.

Im Falle des Fehlens jeder Selbstinduction ist i mit der Aenderungsgeschwindigkeit des P, d. h. mit dP/dt proportionirt. Der Zeitmittelwerth der Kraft, welcher mit

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} P.\frac{dP}{dt}$$

proportional ist, wird dann für jede Periode τ der Null gleich.

Fasst man die das Magnetfeld erregende Stromspule als festen, den in sich geschlossenen Stromleiter als beweglichen Theil eines Electrodynamometers auf, so circuliren für diesen Fall in beiden Leitern Ströme, die, wie man zu sagen pflegt, eine Phasendifferenz von einer Viertelperiode besitzen, also keinen Mittelwerth der mechanischen Wirkung ergeben können.

Daraus folgt, dass in den nicht unbedeutenden mechanischen Wirkungen die Selbstinduction direct zum Ausdruck gelangt, während sie bei directer Durchleitung des periodi-

schen Stromes als sogenannte Impedanz nur in additiver Verknüpfung mit dem Ohm'schen Widerstand zur Geltung kommt.

A) Von den zwei möglichen Richtungen im geschlossenen linienförmigen Stromleiter wählen wir eine, s, positiv, und zählen Ströme und electromotorische Kräfte dieser Richtung positiv. Durch die Randcurve des Stromleiters legen wir eine Fläche, und nennen von den zwei Normalenrichtungen in einem Punkte derselben jene positiv, die uns zur linken Hand liegt, wenn wir längs der s Richtung schwimmen und ins Innere der Fläche blicken.

Wir verstehen unter P die augenblickliche Zahl der vom Magnetfelde herrührenden Inductionslinien, die in diesem positiven Sinne durch die Fläche hindurchgehen.

Es seien ferner w, L, i Widerstand, Selbstinductionscoefficient und augenblicklicher Strom im Leiter, t die Zeit. Dann gilt dem Inductionsgesetze zufolge:

$$(1) \qquad w i = -\frac{dP}{dt} - L.\frac{di}{dt}$$

Ist das Magnetfeld periodisch, $P = P_0 \cos n t$, $n = 2\pi/\tau$, so genügt nach Eintritt des stationären periodischen Zustandes der letzteren Gleichung das Integral:

$$i = -\frac{P_0 . n}{\sqrt{w^2 + (L n)^2}} \cos(n t + \chi); \quad \operatorname{tg}\chi = \frac{w}{L n}, \quad \chi < \frac{\pi}{2}.$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass der Leiter starr bleibt, sohin L mit der Zeit sich nicht ändert.

Die Grössen φ, ψ.. sollen allgemeine Coordinaten in Lagrange's Sinne bezeichnen, welche sowohl in räumliche Lage des Leiters, als auch seine augenblickliche geometrische Gestalt feststellen, falls er unter der Wirkung der Kräfte sich auch noch deformiren kann. Die zugehörigen allgemeinen Kraftcomponenten, sofern sie von den electromagnetischen Wirkungen des Systems herrühren, sollen mit Ψ, Φ... bezeichnet werden. Definitionsgemäss sind $\Phi d\varphi$, $\Psi d\psi$, differentiale Arbeitswerthe, welche von den genannten Kräften geleistet werden, falls sich die Coordinaten φ, ψ um $d\varphi$, $d\psi$ ändern.

Ist beispielshalber φ eine Länge von bestimmter Richtung, so ist Φ die gesammte Kraft in dieser Richtung; ist φ der Drehungswinkel um eine bestimmte Axe, so ist Φ das zugehörige Drehmoment etc.

Nach einem allgemeinen Satze der Electrodynamik ist

$$\Phi = i\frac{\partial P}{\partial \varphi}, \qquad \Psi = i\frac{\partial P}{\partial \psi}.$$

Bezeichnen wir die Zeitmittelwerthe von Φ, Ψ, sofern sie aus einer Periode τ hergeleitet werden, mit $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}$ . . ., so gilt für den einfacheren Fall, wo der Leiter undeformirbar ist:

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \overline{\Phi} = \frac{1}{\tau}\int \Phi\,.\,dt = -\frac{1}{2}P_0\cdot\frac{dP_0}{d\varphi}\cdot\frac{n}{\sqrt{w^2+(L\,n)^2}}\cdot\cos\chi \\ \text{oder} \\ \overline{\Phi} = -\frac{\partial}{\partial\varphi}(P_0^{\,2})\frac{L\,n^2}{L^2n^2+w^2} \\ \overline{\Psi} = -\frac{\partial}{\partial\psi}(P_0^{\,2})\frac{L\,n^2}{L^2n^2+w^2} \end{array}\right.$$

Offenbar ist Φ, Ψ, positiv, wenn $P_0^{\,2}$ mit wachsendem $\varphi\ \psi$ . . . abnimmt.

Daraus folgt die allgemeine Regel: „der Leiter strebt sich so zu stellen, dass die Zahl der ihn passirenden Inductionslinien abnimmt." An Stelle der Inductionslinien treten Kraftlinien für den Fall, als die Permeabilität des Systemes durchwegs der Einheit gleich ist.

Ist beispielshalber der geschlossene Leiter eine verhältnissmässig kleine flache Spule, die etwa um eine verticale Axe drehbar ist, so wird sich dieselbe im Allgemeinen in die Richtung der Kraftlinien zu stellen streben; kann sich dagegen dieselbe dem Magnetpol blos nähern oder sich von ihm entfernen, so wird sie von ihm abgestossen.

Anziehungen der Spule seitens des Magnetpoles sind nicht ausgeschlossen.

Die vom Pole eines cylinderförmigen Electromagneten ausgehenden Kraftlinien sind nämlich nur längs der Axe dauernd vom Pole weggerichtet; solche, die vom Rande des Poles ausgehen, biegen später zum zweiten Pole um. Man kann sich deshalb immerhin eine Lage der Spule denken, wo sie von

vorwärts und rückwärts strebenden divergirenden Kraftlinien derart durchsetzt wird, dass der absolute Betrag derselben Null wird. Diese Stellung kann von mehreren Stellen angestrebt werden und scheinbar für Anziehung des Poles gehalten werden.

Die hier auftretenden Erscheinungen haben eine, durch das hydrodynamische Verhalten der Magnetkraftlinien auch innerlich begründete Aehnlichkeit mit dem Verhalten einer dünnen leichten Papierscheibe vor dem offenen Ende einer tönenden Kundt'schen Röhre. Der Unterschied besteht darin, dass sich die Papierscheibe so zu stellen strebt, dass die kinetische Energie des Systems in der neuen Stellung bei vorgeschriebener Amplitude des tönenden Stabes grösser wird. Während sich im wechselnden Magnetfelde eine Kupferscheibe in die Richtung der Kraftlinie stellt, tritt in der akustischen Analogie eine transversale Orientirung ein. Die Papierscheibe wird von der Oeffnung angezogen, die Kupferscheibe abgestossen etc.

B) Das einfachste Verfahren zur Bestimmung des Selbstinductionscoefficienten bestünde darin, dass man die in sich geschlossene Spule in einem homogenen periodischen Magnetfelde aufhängt, und die Kraft misst, welche eine Drehung derselben verhindert. Dies kann durch Torsion, Bifilarsuspension mit drehbarem Kreise der oberen Fadenenden immer erreicht werden. Wählt man die Directionskraft der Suspension entsprechend gross, so werden die eintretenden kleinen Ablenkungen, die man mit Spiegel und Scala misst, ein directes Maass der Kraft bilden, dass man nur in absolute Einheiten umzusetzen hat.

Es sei F die Fläche der Spule, H_0 die Kraft des Feldes. Die Spulenebene schliesse ferner mit der zur Kraft normalen Ebene den Winkel φ ein.

Dann gilt $P_0 = F H_0 \sin 2\varphi$ und

$$\Phi = F^2 H_0^2 \sin 2\varphi \cdot \frac{L n^2}{L^2 a^2 + w^2}.$$

Die Wirkung hat für $2\varphi = 90^0$ einen Maximalwerth.

Um ein numerisches Beispiel zu haben, wählen wir einen drahtförmigen Kreisring vom Radius $a = 5$ cm; die Drahtdicke $2R$ sei ein Millimeter.

Entsprechend der Formel

$$L = 4\pi a \left(\log \text{nat.} \frac{8a}{R} - \frac{7}{4}\right),$$

ist

$$L = 72{,}45 \text{ cm}.$$

Ist die maxim. Intensität des Feldes 10 absolute Einheiten, $\varphi = 45^0$, w etwa $^1/_{100}$ Ohm $= 10^7$, fallen ferner 40 Perioden auf die Secunde, sodass $n = 2\pi . 40$ wird, so ist nahezu

$$\overline{\Phi} = -0{,}02823 \text{ dyncm}.$$

Dieser Betrag ist bei Bifilarsuspension durch Spiegelablesung noch ganz gut festzustellen; da ja der Leiter in diesem Falle auch leicht ist. [1])

Verfügt man über kein constantes Magnetfeld, so kann man ein passend construirtes Electrodynamometer benützen, durch dessen fixe Spule man den magnetisirenden Strom leitet, während die bewegliche Spule zuvörderst in sich, dann unter Zuhilfenahme eines Leiters von passend gewählten aber bekannten Selbstinductionscoefficienten geschlossen ist. Als solchen kann man eine lange Spule von bekannten Wickelungsverhältnissen wählen, welche eine directe Bestimmung von L gestatten.

Schliesst man sodann bei constant gehaltener äusserer Stromamplitude den beweglichen Stromkreis durch den zu messenden Leiter, so liegen, falls die Ohm'schen Widerstände bekannt sind, alle Daten vor, welche zur Bestimmung des unbekannten Selbstinductionscoefficienten von Nöthen sind.

Ersichtlich hat man bei diesem Verfahren nur die Ausschläge des beweglichen Dynamometertheiles zu messen.

C) Offenbar kann man in den Kreis des beweglichen Leiters auch einen Condensator einschalten. Es sei die Capacität desselben C. Dann gilt, wenn mit Π die Potentialdifferenz an seinen Belegen bezeichnet wird

1) Wiegt der Draht 1 g, ist die Fadendistanz 0,4 cm, die Fadenlänge 50 cm, so gibt dies einen Ausschlag von etwas mehr als zwei Bogengrade.

$$C\frac{d\,\Pi}{d\,t} = i$$

$$w\,i = -\frac{d\,P}{d\,t} - L\,.\,\frac{d\,i}{d\,t} - \Pi$$

oder

$$L\,.\,\frac{d\,i^2}{d\,t^2} + w\,\frac{d\,i}{d\,t} + \frac{i}{C} = -\frac{d^2\,P}{d\,t^2} = P_0\,.\,n^2 \cos n\,t.$$

Man findet

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \Phi\,d\,t + \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{\partial\,P_0}{\partial\,\varphi}\cos n\,t\,d\,t$$

und

$$i = f\cos n\,t + g\sin n\,t,$$

wobei

$$\left(\frac{1}{C} - L\,n^2\right)f + w\,n\,.\,g = P_0\,n^2$$

$$\left(\frac{1}{C} - L\,n^2\right)g = f\,.\,w\,n.$$

Daraus folgt die Gleichung:

$$\bar{\Phi} = -\frac{\partial}{\partial\,\varphi}(P_0^2)\,.\,\frac{L\,n^2 - \frac{1}{C}}{w^2 + \left(\frac{1}{C\,n} - L\,n\right)^2}$$

Die zu Schluss des vorigen Absatzes erörterte Methode kann dann innerhalb gewisser Grenzen auch zu Capacitätsbestimmungen dienen.

6. *Ueber die galvanische Polarisation von Nickel, Kobalt und Eisen; von Ernst Vogel.*

(Inauguraldissertation, mit Kürzungen.)

(Hierzu Tafel V Fig. 5—9.)

1. Einleitung.

Auf ihre Polarisationen sind im Laufe der Zeit eine ganze Reihe von Metallen in verschiedenen Electrolyten untersucht worden, hauptsächlich Platin, Gold, Blei, Quecksilber, Zink, Aluminium. Die Mehrzahl der Arbeiten, die auf dieses Gebiet Bezug haben, beschäftigt sich aber mit der Polarisation des Platins in Schwefelsäure. Neben diesem Metall hat in neuerer Zeit noch besonders das Aluminium durch die auffallend grossen Werthe, welche bei demselben die electromotorische Kraft der Polarisation zeigt, die Aufmerksamkeit der Forscher auf sich gezogen. Noch in einem anderen Punkt unterscheidet es sich von den übrigen Metallen, besonders dem Platin. Während bei letzterem die Polarisation noch längere Zeit nach der Unterbrechung des polarisirenden Stromes beobachtet werden kann, verschwindet bei dem Aluminium die Polarisation sehr schnell.

Von Hrn. Prof. Oberbeck wurde ich darauf aufmerksam gemacht, dass es wahrscheinlich noch *ein* Metall gäbe, welches dem Aluminium in seinem Verhalten bei der galvanischen Polarisation näher stände als den übrigen Metallen: nämlich das Nickel. Oberbeck hat die Polarisationserscheinungen verschiedener Electroden mit Benutzung *schnell wechselnder Ströme untersucht*[1]) und dabei gefunden, dass die erregten electromotorischen Kräfte bei Platin, Gold und Silber in einigen neutralen Salzlösungen wenig voneinander verschieden sind, dass dieselben aber vom Aluminium erheblich übertroffen werden und dass Nickel in den meisten Fällen sich dem Aluminium mehr nähert als den genannten übrigen Metallen. Die von Oberbeck benutzte Untersuchungsmethode hat zwar

1) A. Oberbeck, Wied. Ann. **19.** p. 625—649. 1883; **21.** p. 139 bis 158. 1884.

den wichtigen Vorzug, dass der polarisirende Strom nicht unterbrochen wird, während man die electromotorische Kraft beobachtet; dagegen unterscheidet sich dieselbe so wesentlich von den übrigen sonst benutzten Methoden, bei denen man mit *constanten* Strömen arbeitet, dass es von Interesse schien, zuzusehen, wie sich das Nickel bei seiner Polarisation durch constante Ströme verhalten würde. Es lag in der Natur der Sache, dass dabei die ganze Gruppe der einander nahestehenden Metalle *Nickel, Kobalt* und *Eisen* in's Auge gefasst wurde, um so mehr, da diese drei Metalle mit Rücksicht auf ihre galvanische Polarisation bisher nicht näher untersucht worden sind.

Wenn die genannten Metalle dem Aluminium nahe stehen, so war von vornherein zu vermuthen, dass die bei ihnen erregte Polarisation schnell bei der Unterbrechung des primären Stromes verschwindet. Eine Untersuchung nach der Poggendorff'schen Wippenmethode musste deshalb Bedenken erregen. Denn bei derselben wird die Polarisation erst nach der Unterbrechung des primären Stromes gemessen. Der hierbei entstehende Fehler wird natürlich um so grösser sein, je langsamer die Wippe umgeschlagen wird.

Die Fuchs'sche[1]) Methode ist bei der Benutzung von constanten Strömen die einzige, welche es ermöglicht, Potentialdifferenzen zwischen einer neutralen Platte und einer Electrode des Voltameters während des Durchganges des primären Stromes zu bestimmen. Leider ist auch diese Methode nicht einwandsfrei; man muss nämlich darauf achten, dass sich die neutrale Electrode, mit der die im Voltameter befindlichen Electroden verglichen werden, nicht an einer vom primären Strom selbst durchflossenen Stelle befindet, da sonst das Gefälle des Potentials im Stromkreise zwischen den beiden Electroden das Potential der Polarisation beeinflusst.[2])

2. Methode und Anordnung.

Für meine Versuche habe ich mich für die Fuchs'sche Methode entschieden, die doch den grossen Vorzug hat, dass man die Polarisation messen kann, ohne den primären Strom

1) Fuchs, Pogg. Ann. 156. p. 156. 1875.

2) Ueber die Beobachtungsmethoden vgl. G. Wiedemann. Die Lehre von der Electricität 2. p. 647—677. 1894.

unterbrechen zu müssen. Andererseits ist es natürlich auch erforderlich, dass man diese Methode einer sorgfältigen Prüfung auf die Grösse der Fehler unterzieht.

Ehe ich jedoch darauf eingehe, halte ich es für zweckmässig, zunächst die von mir gewählte Anordnung mitzutheilen (vgl. Taf. V).

Von einer Stromquelle E_1 aus wurde der primäre Strom durch eine Zersetzungszelle H geführt. Durch einen eingeschalteten Commutator konnte die Richtung dieses Stromes stets geändert werden. Die Intensität des primären Stromes wurde mittelst eines Wiedemann'schen aperiodischen Spiegelgalvanometers G_1 gemessen, das in einer Zweigleitung FG_1E des primären Stromkreises eingeschaltet war. Die Zweigleitung konnte in C unterbrochen werden. Das Galvanometer wurde mittelst eines äusserst zuverlässigen Ampèremeters von Carpentier in Paris auf Ampère geaicht; der Ausschlag um einen Scalentheil repräsentirte 0,00279 Amp. im Hauptstrom. Die Zersetzungszelle H stand durch einen Verbindungsheber K, der meistens verdünnte Schwefelsäure enthielt, mit einem Gefäss L in Verbindung, in dem eine amalgamirte Zinkplatte in neutralem Zinksulfat stand. Es wurde nun jede Electrode in H einzeln mit der Zinkplatte durch eine äussere Leitung, die wir die secundäre nennen wollen, in Verbindung gesetzt. Die zwischen den beiden Platten auftretende electromotorische Kraft wurde nach der Du Bois-Reymond'schen[1]) Compensationsmethode gemessen. Da die Zeichnung diesen Theil der Anordnung klar und übersichtlich wiedergiebt, so kann ich mich auf wenige Erläuterungen beschränken.

Anstatt der beiden in G_1 und G_2 angedeuteten Galvanometer habe ich in Wirklichkeit nur ein Galvanometer gebraucht, von dem die beiden Rollen einzeln benutzt sind.

In D kann der Strom ebenso wie in C unterbrochen werden. In dem Zweige AB befindet sich der variable Widerstand w_1; in dem Zweig AE_2B ist ein Widerstand von 1997 Siemens'schen Einheiten und die compensirende Kette E_2 eingeschaltet. Zur Compensation habe ich stets Daniell'sche Elemente genommen, die fortwährend mit einem im Institut

1) E. Du Bois-Reymond, Abh. d. Berliner Akad. a. d. J. 1862.

befindlichen Clarkelement, das in der physikalisch-technischen Reichsanstalt geprüft war, verglichen wurden. Die von mir benutzten Daniell'schen Elemente erwiesen sich als ausserordentlich constant, da die Aenderung der electromotorischen Kraft bei Vergleichung mit dem Clarkelement nur einige Hundertstel von einem Daniell betrug.

Die Messung der electromotorischen Kraft der Polarisation wurde nun folgendermaassen ausgeführt. Zunächst wurde die electromotorische Kraft des Elementes Zink in Zinksulfat und Electrode in *H* in ihrem jeweiligen Electrolyt durch die Compensationsmethode gemessen. Darauf wurde die Leitung in *D* unterbrochen und der primäre Strom durch die Zersetzungszelle hindurchgeschickt. Die Stärke des hindurchgehenden Stromes konnte am Galvanometer G_1 gemessen werden. Nun wurde die Galvanometerleitung in *C* unterbrochen und die secundäre Leitung in *D* geschlossen. Die nun vorhandene electromotorische Kraft wurde wieder compensirt. Aus diesen beiden Messungen lässt sich die electromotorische Kraft der Polarisation bestimmen, indem man von dem zuletzt gefundenen Werth die electromotorische Kraft des anfänglichen Elementes abzieht. Beide Electroden werden so mit der Zinkplatte verglichen und die Polarisation einer jeden wird für sich gemessen.

Als Electroden benutzte ich immer Platten von derselben Grösse. Der Flächeninhalt der von dem Electrolyt benetzten Plattenoberfläche betrug 16 qcm. Die beiden Platten hatten stets einen Abstand von 1 cm voneinander.

Ich möchte hier gleich noch einen Versuch vorweg nehmen, den ich mich später anzustellen genöthigt sah. Bei der Electrolyse des Nickels in Nickelsulfat überzogen sich nämlich die beiden Seiten der Kathode ungleichmässig mit einer metallenen Nickelschicht. Die hintere Seite zeigte eine bessere Ablagerung als die der anderen Platte zugekehrte. Es trat demnach die Frage auf, ob die Polarisation sich etwas ändern würde, wenn ich anstatt der einen Anode zwei Anoden benutzte, zwischen denen die Kathode stand. Diese Anordnung hatte den Vorzug, dass beide Seiten der Kathode gleichmässig dem Strome ausgesetzt waren. Diese Vorsicht stellte sich aber als unnöthig heraus, da sich die Polarisation nicht im mindesten änderte.

Um die Grösse des Fehlers der Fuchs'schen Methode bei der von mir angewandten Stromstärke zu bestimmen, stellte ich die beiden Electroden in einen Trog, in dem ich die Entfernung der Platten voneinander nach Belieben variiren konnte. Ich will hier gleich bemerken, dass ich gewöhnlich mit einer Stromstärke arbeitete, die 4—5 Bunsen lieferten. Die Stromstärke konnte durch einen in die primäre Leitung eingeschalteten Widerstandskasten vollständig geregelt werden. Es liegt nun auf der Hand und ist ausserdem auch noch durch die Versuche von Pirani[1]) nachgewiesen, dass die Polarisation, bei gleichbleibender Stärke des polarisirenden Stromes von der Entfernung der Electrode unabhängig ist. Aenderte sich also der Abstand der beiden Platten, so musste ich doch stets dieselbe Polarisation erhalten, wenn die Methode völlig fehlerfrei sein sollte. Ich stellte deshalb einige Versuchsreihen bei derselben Stromstärke, aber bei verschiedenem Abstande der Platten auf. Als Electrolyt wählte ich Nickelsulfat, weil dieses bei seinem grossen Leitungswiderstande den Fehler besonders stark hervortreten lassen musste. Es zeigte sich nun allerdings, dass die Polarisation mit grösserer Entfernung der Platten auch grösser wurde, jedoch war die Abweichung so gering, dass ich sie ohne Bedenken vernachlässigen konnte.

3. Polarisation des Nickels.

Ueber die Polarisation des Nickels ist in der mir zugänglichen Literatur nur sehr wenig zu finden. Sinsteden[2]) beobachtet, ohne genauere Untersuchungen vorgenommen zu haben, dass bei der Wasserzersetzung zwischen Nickelelectroden eine starke Polarisation entsteht; nach Streintz[3]) besitzt das Nickel in hohem Grade die Eigenschaft, Wasserstoff zu occludiren. Weitere Angaben fehlen aber vollkommen.

Bei der Untersuchung der Polarisation von Nickel habe ich mich nicht allein auf Schwefelsäure beschränkt, wie es gewöhnlich der Fall ist. Ich halte es für ebenso wichtig, die Untersuchungen auch auf Salzlösungen auszudehnen.

1) Pirani, Wied. Ann. **20.** p. 64. 1884.

2) Sinsteden, Pogg. Ann. **92.** p. 16. 1854.

3) Streintz, Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. in Wien. B. C. Abth. II. 1894.

Die ersten Versuche erstrecken sich auf die Polarisation des Nickels in Nickelsulfat. Um gleich constatiren zu können, ob die verschiedene Concentration des Nickelsulfats einen wesentlichen Einfluss auf die Polarisation ausübt, stellte ich mir zwei verschiedene Lösungen her: $^1/_1$ und $^1/_{10}$ Normallösung. Bei $^1/_1$ Normallösung kommen 280 g $NiSO_4 + 7\,H_2O$ auf ein Liter Wasser, bei $^1/_{10}$ 28 g.

In den folgenden Tabellen sind unter i die Stromstärken in Ampère, unter pa und pk die Polarisationen an der Anode und Kathode angegeben.

Tabelle I.

Polarisation des Nickels in Nickelsulfatlösung.

i	pa	pk	i	pa	pk
0,006	0,46	0,35	0,280	1,84	1,13
0,014	0,91	0,65	0,560	1,91	1,32
0,028	1,45	0,70	0,840	1,95	1,43
0,056	1,65	0,77	1,120	1,96	1,45
0,140	1,77	0,94	1,400	1,96	1,46

Bemerkenswerth ist die starke Polarisation sowohl der Anode als auch der Kathode in einer Salzlösung. Die Platinpolarisation in H_2SO_4 wird sogar bedeutend übertroffen. Das Nickel nähert sich in seinem Verhalten mehr dem Aluminium. Wie dort, tritt auch hier die Polarisation der Anode ganz besonders hervor. Der Grund ist derselbe, wie beim Aluminium; es bildet sich nämlich auf der Anode eine graue Oxydschicht, die ebenfalls stark electronegativ wirkt. Dieselbe setzt dem Strom, wenn auch nicht in demselben Maasse, wie beim Aluminium, einen bedeutenden Widerstand entgegen, sodass ich mich genöthigt sah, als primäre Stromquelle vier Bunsen zu verwenden, um die gewünschte Stromstärke zu erreichen.

Wie man aus der Tabelle, noch besser an der gezeichneten Curve ersieht (vgl. Fig. 6), steigt die Polarisation an der Anode ausserordentlich steil an und nähert sich dann in kurzer Zeit ihrem Maximum. Die Polarisation hat einen weniger steilen Verlauf, auch lässt sich bei ihr ein so stark ausgeprägter Wendepunkt wie bei der Anode nicht erkennen.

Die Kathode überzieht sich während der Electrolyse mit einer flockigen, schwarzen Schicht. Unter der schwarzen

Schicht setzt sich allmählich reines Nickel ab in Form eines glänzenden metallenen Ueberzuges. Besonders gut vollzieht sich die Ablagerung auf der Rückseite der Platte, weil hier keine wesentliche Störung durch die Gasentwickelung eintritt. Der metallische Ueberzug lässt sich, wenn er eine bestimmte Dicke erreicht hat, mit Leichtigkeit von der Kathode loslösen, bei länger dauernder Electrolyse blättert er sogar von selbst ab.

Es lag die Vermuthung nahe, dass die electromotorische Kraft des ursprünglichen Elementes $Zn/ZnSO_4$ — $NiSO_4/Ni$ durch den neuen metallischen Nickelüberzug geändert werden könnte. In diesem Falle wären die Resultate fehlerhaft. Auf Grund verschiedener Versuche stellte sich aber heraus, dass eine Aenderung thatsächlich nicht eintritt.

Da die Resultate für die Polarisation des Nickels in $^1/_{10}$ Normallösung fast gar nicht von denen in der Tabelle III abweichen, so sehe ich davon ab, die Werthe in einer neuen Tabelle anzuführen. Das Maximum der anodischen Polarisation wird mit 1,94, und das der kathodischen mit 1,42 Volt erreicht.

Es schien mir nicht ohne Interesse zu sein, den Einfluss galvanoplastischer Lösungen auf die Polarisation zu untersuchen. Aus einem Handbuch der Galvanoplastik [1]) habe ich zwei verschiedene Vorschriften ausgewählt. Die erste Lösung war folgendermaassen zusammengesetzt:

Schwefelsaures Nickeloxydulammon	25 g
Raffinirte Borsäure	12,5 g
Wasser	$^1/_2$ l

Die hiermit erhaltenen Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle II.

Polarisation der galvanoplastischen Lösung I.

i	pa	pk	i	pa	pk
0,0056	0,40	0,32	0,280	1,51	1,01
0,014	0,76	0,59	0,560	1,53	1,14
0,028	1,19	0,64	0,840	1,54	1,19
0,056	1,35	0,70	1,120	1,55	1,21
0,140	1,45	0,85	1,400	1,55	1,22

Der Charakter der Curven hat sich nicht geändert, hingegen ist das Maximum bedeutend heruntergegangen, besonders

1) K. Taucher, Handb. d. Galvanoplastik, Stuttgart 1893.

bei der Anode. Der Metallüberzug zeichnete sich durch grosse Ebenmässigkeit und grössere Haftbarkeit an der Kathode aus.

Eine zweite galvanoplastische Lösung, die ich ebenfalls als Electrolyt benutzte, war folgendermaassen zusammengesetzt:

Schwefelsaures Nickeloxydulammon	16,66 g
Schwefelsaures Ammon	3,33 g
Wasser	$^1/_2$ l

Die Polarisation der Anode betrug 1,59 Volt, die der Kathode 1,27 Volt.

Hiernach zeigt sich, dass die Polarisation erheblich geringer ausfällt, wenn man eine Lösung benutzt, aus der sich ein guter Nickelniederschlag ergiebt, als bei der Lösung des reinen Nickelsulfates. —

Dagegen ist es recht merkwürdig, dass die Polarisation des Nickels in *Schwefelsäure* noch *kleiner* ist, als diejenige der galvanoplastischen Lösung, wie die folgende Tabelle zeigt.

Tabelle III.

Polarisation des Nickels in 5 proc. Schwefelsäure.

i	pa	pk	i	pa	pk
0,014	0,64	0,54	0,560	1,21	1,05
0,028	0,84	0,61	0,840	1.22	1,06
0,140	1,00	0,87	1,120	1,22	1,07
0,280	1,14	1,03	1,400	1,22	1,07

Ausser der 5 proc. Schwefelsäure stellte ich mir noch 2 proc. Schwefelsäure her. Die Polarisation war etwas geringer. Bei der Anode betrug das Maximum 1,08 Volt und bei der Kathode 0,95 Volt.

4. Polarisation des Kobalts.

Ueber die Polarisation des Kobalts finden sich in der einschlägigen Literatur noch weniger Angaben, als über die des Nickels. Es liegt hier ein fast noch ganz unerforschtes Gebiet vor.

Meine Vermuthung, dass dieses Metall ein ähnliches Verhalten, wie das Nickel zeigen würde, zeigte sich im allgemeinen bestätigt. Zuerst bespreche ich auch hier die Versuche mit der Sulfatlösung.

Um die Einwirkung der Concentration auf die Polarisation erkennen zu können, stellte ich mir $^1/_2$ und $^1/_{10}$ Normallösung her. $^1/_1$ Normallösung konnte ich nicht nehmen, weil die dazu

erforderlichen Sulfatmenge sich nicht in dem Wasser gelöst haben würde. Die folgende Tabelle gibt die Werthe der Polarisation in $^1/_2$ Normallösung an.

Tabelle IV.

Polarisation von Kobalt in Kobaltsulfatlösung.

i	pa	pk	i	pa	pk
0,014	0,33	0,27	0,560	1,31	1,06
0,028	0,45	0,37	0,840	1,33	1,13
0,140	0,78	0,61	1,120	1,35	1,14
0,280	1,06	0,86	1,400	1,36	1,14

Der Verlauf der Polarisation ist durch Curven veranschaulicht (vgl. Fig. 7). Dieselben zeigen einen wesentlich anderen Charakter wie beim Nickel. Dort steigen sie äusserst steil an und nähern sich dann schnell dem Maximum. Hier besitzen die Curven eine sehr sanfte Neigung; die Annäherung an den Grenzwerth geschieht ganz allmählig, nicht plötzlich. Die Polarisation erreicht nicht die hohen Werthe wie beim Nickel, hingegen tritt auch beim Kobalt die anodische Polarisation ganz besonders hervor. In dieser Eigenschaft stimmen also die drei Metalle Aluminium, Nickel und Kobalt überein. Die Gasentwickelung ist nicht allzu stark; die einzelnen Bläschen sammeln sich an den Electroden zu einer grösseren Blase an, die periodisch auftritt und verschwindet. Die Kathode bedeckt sich mit einem starken schlammigen Ueberzug, unter dem sich metallisches Kobalt absetzt. Das abgelagerte Kobalt lässt sich, wenn die Electrolyse einige Zeit gedauert hat, leicht von der Platte in Form von kleinen Streifen loslösen, die sich sofort spiralförmig aufrollen. Diese Spiralbildung zeigte sich beim Nickel nie.

Auch die Anode überzog sich mit einer gleichmässigen Schicht von intensiver schwarzer Färbung. Lässt man den Strom längere Zeit durch die Zersetzungszelle hindurchgehen, so löst sich dieser Niederschlag in feinen kleinen Blättchen von selbst von der Oberfläche der Platte ab.

Die Werthe der Polarisation für die $^1/_{10}$ Normallösung weichen von den in der Tabelle IV angeführten nur unwesentlich ab. Das Maximum der Anode wird erreicht mit 1,34 Volt und das der Kathode mit 1,11 Volt. Die Ablagerung der

metallischen Kobaltschicht auf der Anode ist hier gleichmässiger, als wie in der concentrirteren Lösung. —

Tabelle V.

Polarisation des Kobalts in 5 proc. Schwefelsäure.

i	pa	pk	i	pa	pk
0,014	0,22	0,15	0,560	0,86	0,72
0,028	0,32	0,23	0,840	0,96	0,80
0,140	0,51	0,46	1,120	0,99	0,83
0,280	0,68	0,61	1,410	0,99	0,84

Der Verlauf der Polarisation ist graphisch dargestellt (vgl. Fig. 7). Es tritt hier dieselbe Erscheinung wie beim Nickel auf, dass nämlich die Polarisation in Schwefelsäure kleiner ist als in der Sulfatlösung.

5. Polarisation des Eisens.

Das Eisen ist bis jetzt ebensowenig wie Kobalt und Nickel auf die Grösse seiner Polarisation untersucht worden.

Dass sich den Experimenten manche Schwierigkeiten entgegenstellen würden, liess sich von vorne herein wegen der grossen Oxydationsfähigkeit des Eisens und der Eigenschaft der Passivität annehmen.

Gleich zu Anfang erhielt ich Resultate, die wenig Aussicht auf einen guten Erfolg meiner Untersuchungen boten. Die ersten Versuche erstreckten sich auf die Polarisation des Eisens in Eisensulfat. Als Electroden benutzte ich chemisch reines Eisen.

Bei der Messung der Polarisation war die Nadel des Galvanometers derart beunruhigt, dass eine einigermaassen genaue Compensation nicht erreicht werden konnte. Wenn ich die Nadel thatsächlich auf den Nullpunkt gebracht hatte, so schlug sie plötzlich, ohne dass man den Grund einsah, nach der einen oder anderen Seite kräftig aus. Da ich anfangs glaubte, dass in der Leitung irgendwo ein Contactfehler sein müsse, so untersuchte ich sie genau auf Contact und Isolirung hin. Eine Störung war aber nirgends zu entdecken.

Auch hielt ich es für gerathen, mich nochmals von der Zuverlässigkeit meiner Methode zu überzeugen. Aber die Prüfung, die genau in derselben Weise wie früher ausgeführt wurde, liess kein Bedenken gegen die Methode aufkommen. Wir müssen also die Ursache dieser eigenthümlichen Erschei-

nung in der Oberflächenbeschaffenheit des Eisens suchen. Es ist eine bekannte Thatsache, dass eine Eisenplatte, die bei der Electrolyse als Anode benutzt wird, ihre Stellung in der Spannungsreihe der Metalle verändert. Gegen gewöhnliches Eisen zeigt sich dieses Eisen stark negativ electrisch. Dieses Verhalten des Eisens, das man eben Passivität nennt, rührt wahrscheinlich von einer dünnen Oxydschicht her, die sich infolge der Electrolyse bildet.

Im Laufe der Untersuchungen machte ich nun die Erfahrung, dass die Beunruhigung der Nadel immer mehr schwindet, je länger die Platten im Gebrauch sind. Nach längerer Zeit verhielt sich die Nadel sogar vollkommen ruhig, sodass ich dann durchaus zuverlässige Resultate erzielte.

Tabelle VI.

Polarisation des Eisens in Eisensulfat.

i	pa	pk	i	pa	pk
0,014	0,14	0,08	0,560	0,36	0,26
0,028	0,21	0,12	0,840	0,37	0,27
0,140	0,30	0,22	1,120	0,37	0,27
0,280	0,34	0,24			

Die Polarisation in Eisensulfat habe ich für zwei verschieden concentrirte Lösungen, nämlich für $^1/_2$ und $^1/_{10}$ Normallösung gemessen. Die angeführte Tabelle bezieht sich auf $^1/_2$ Normallösung. Für die $^1/_{10}$ Normallösung erhielt ich als Maxima 0,36 Volt bez. 0,25 Volt.

Die Polarisation ist also ausserordentlich schwach. Schon nach geringer Stromstärke (vgl. Fig. 9) nähert sich dieselbe ihrem Maximum. Nach den grossen Werthen, die ich für Kobalt- und Nickelsulfat erhalten, hatte ich eigentlich eine stärkere Polarisation erwartet. Die Gasentwickelung ist gering. Dagegen war der Widerstand der Zersetzungszelle sehr stark.

Die Kathode bedeckt sich mit einem dicken schwarzen Schlamm, der sich von Zeit zu Zeit loslöst und in einzelnen Flocken in dem Electrolyt umherschwimmt.

Unter diesem Schlamme überzieht sich die Platte mit einer feinen Schicht reinen blanken Eisens, das an der Luft sehr schnell oxydirt. Die Ablagerung ist nicht gleichmässig, es bilden sich nämlich auf der Oberfläche eine Anzahl von kleinen Höckern, die ein warzenartiges Aussehen haben. Die

niedergeschlagene Metallschicht konnte, wie es beim Nickel und Kobalt möglich war, von der Platte nicht losgetrennt werden.

Die Anode bedeckt sich ebenfalls mit einem schwarzen Ueberzug, der aber bei weitem nicht die Ausdehnung wie bei der Kathode erreicht. Die Abnutzung der Anode ist ziemlich stark.

Es schien mir auch hier von Interesse zu sein, die Polarisation in einer Lösung, die besonders zur Vereisenung geeignet ist, zu untersuchen. Die Zusammensetzung der galvanoplastischen Lösung ist folgende:

Eisenvitriol .	13 g
Salmiak . .	6 g
Wasser . . .	$^1/_2$ l

Nach den Resultaten, die ich beim Nickel erhalten habe, liess sich von vornherein erwarten, dass die Polarisation sehr gering sein würde. Das ist auch in der That der Fall. Das Maximum für die Anode beträgt 0,21 und für die Kathode 0,18 Volt. Der Zusatz von Salmiak drückt augenscheinlich die Polarisation herab. Die Ablagerung des Eisens auf die Kathode ist gleichmässig, die Höcker sind fast ganz geschwunden.

Tabelle VII.

Polarisation des Eisens in 5% proc. Schwefelsäure.

i	pa	pk	i	pa	pk
0,014	0,11	0,08	0,560	0,34	0,26
0,028	0,17	0,13	0,840	0,34	0,27
0,140	0,26	0,18	1,120	0,35	0,27
0,280	0,33	0,25	1,400	0,35	0,27

Die in 2 proc. Säure gefundenen Werthe sind etwas niedriger, nämlich 0,32 bez. 0,24 Volt. Die Uebereinstimmung mit den in Eisensulfat erhaltenen Werthen ist fast vollständig. Die Maxima sind fast dieselben und auch die Curven haben denselben Verlauf. Die Gasentwickelung ist sehr stark, ebenso auch die Abnutzung der Platten. Die Anode überzieht sich vollständig schwarz, die Kathode hingegen bleibt blank.

7. Polarisation unter Anwendung von starken Accumulatorenströmen.

Bei den drei Metallen, die ich untersucht habe, nähern sich die Werthe der Polarisation einem oberen Grenzwerth. Um mich zu überzeugen, ob noch viel stärkere Ströme eine

weitere Steigerung hervorbringen, habe ich die Versuchsreihen bei Nickel und Kobalt mit dem Strome einer Accumulatorenbatterie von 65 Volt Spannung wiederholt. Eine merkliche Zunahme der electromotorischen Kräfte fand nicht statt, sodass hiernach die höchsten Werthe der Polarisationen in den einzelnen Fällen wirklich erreicht sind. Da mehrfache Zweifel an der Erreichbarkeit eines solchen Maximums ausgesprochen sind, so dürfte es von Interesse sein, hier nochmals die wirklich gefundenen oberen Grenzwerthe zusammenzustellen. Es ist dies in der folgenden Tabelle geschehen.

Tabelle VIII.

	pa	pk	$pa + pk$
Nickel in Nickelsulfat ($^1/_1$ Normallösung)	1,96	1,46	3,42
Nickel in Nickelsulfat ($^1/_{10}$ Normallösung)	1,94	1,42	3,36
Nickel in galvanoplastischer Lösung I.	1,55	1,22	2,77
Nickel in galvanoplastischer Lösung II.	1,59	1,27	2,86
Nickel in 5 proc. Schwefelsäure	1,22	1,07	2,29
Nickel in 2 proc. Schwefelsäure	1,08	0,95	2,03
Kobalt in Kobaltsulfat ($^1/_2$ Normallösung)	1,36	1,14	2,50
Kobalt in Kobaltsulfat ($^1/_{10}$ Normallösung)	1,34	1,11	2,45
Kobalt in 5 proc. Schwefelsäure	0,99	0,84	1,83
Kobalt in 2 proc. Schwefelsäure.	0,98	0,81	1,79

Die Stromstärke steigerte sich nicht über 4 Amp., weil die Erwärmung in der Zersetzungszelle zu gross ist.

Zum Schlusse liegt mir noch die angenehme Pflicht ob, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Dr. Oberbeck, für die Anregung zu dieser Arbeit und für die bei der Anfertigung derselben in liebenswürdigster Weise ertheilten Rathschläge meinen herzlichsten Dank zu sagen.

Greifswald, 1895.

7. *Ueber den Verlauf der electrischen Schwingungen bei den Tesla'schen Versuchen; von A. Oberbeck.*

Die brillanten und überraschenden Lichterscheinungen bei den Tesla'schen Versuchen[1]) haben auch in Deutschland allgemeines Interesse erregt, besonders seit dieselben in der Urania in Berlin durch Hrn. P. Spiess[2]) einem grösseren Publicum vorgeführt werden.

Bei Wiederholung dieser Versuche an anderen Orten hat sich dann herausgestellt, dass zu ihrem Gelingen keineswegs so grosse Hülfsmittel nothwendig sind, wie Tesla selbst aufgewandt hat, dass sie vielmehr schon mit einem grösseren Inductionsapparat[3]) oder einer kräftigen Influenzmaschine[4]) ausgeführt werden können.

Hiernach dürfte wohl eine kurze theoretische Erörterung dieses Gegenstandes an der Stelle sein, wenigstens insoweit, als die Bewegungen der Electricität in den Leitern in Betracht kommen, während für den Uebergang der electrischen Schwingungen an die Luft resp. an den Aether, durch welchen die eigentlichen Lichterscheinungen hervorgerufen werden, noch weitere Versuche zur Klärung der Sachlage abzuwarten sind.

Vergegenwärtigen wir uns die Tesla'sche Anordnung in ihrer einfachsten Form (Fig. 1). Bei derselben wird den inneren Belegungen der Condensatoren A und B so lange Electricität zugeführt, bis zwischen den Electroden F eines Funkenmikrometers ein Funke übergeht. Infolge dieser Entladung verläuft in der Leitung I ebenfalls ein electrischer Strom, welcher in dem Kreis II einen Strom inducirt. Der zweite

1) Vgl. E. de Fodor, Experimente mit Strömen hoher Wechselzahl und Frequenz. A. Hartleben's Verlag, 1894; H. Ebert, Naturw. Rundschau. 9. Jahrgang. p. 4—7. p. 17—18. p. 29—33. 1894.

2) P. Spiess, Ueber Ströme hoher Wechselzahl und Frequenz. Himmel und Erde. 7. Jahrgang. p. 297—313. 1895.

3) F. Himstedt, Wied. Ann. 52. p. 476—485. 1894.

4) A. Töpler, Ges. Isis in Dresden. p. 22—32. 1894.

Stromkreis ist offen. Wir dürfen uns aber die Enden der secundären Rolle des Transformators ebenfalls mit den Belegungen eines Condensators verbunden denken. Denn eine enggewundene Rolle, in welcher Ströme inducirt werden, besitzt schon an sich die Eigenschaften eines Condensators. Ausserdem werden aber bei vielen Versuchen die Enden dieser Rolle mit Leitern von mehr oder weniger grosser Capacität verbunden, sodass also die Annahme eines Condensators C, wenn auch von kleinerer Capacität als die Condensatoren A und B gerechtfertigt erscheint.

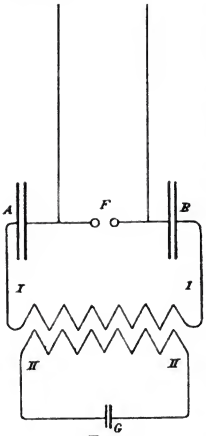


Fig. 1.

Endlich können wir uns die Condensatoren A und B für die Berechnung durch einen einzigen Condensator von halber Capacität (A und B als gleich angenommen) ersetzt denken, sodass wir den weiteren Betrachtungen die Anordnung der Fig. 2 zu Grunde legen können.

In einem bestimmten Augenblick seien also die Belegungen von c_1 entgegengesetzt geladen. Ihre Potentialdifferenz mag gleich 1 gesetzt werden. Bei der Entladung durch den ersten Stromkreis werden dann auch in dem zweiten Stromkreis Ströme inducirt. Da die Leitungen aus dicken Kupferdrähten bestehen, so kann man ohne weiteres annehmen, dass beide Ströme in Form gedämpfter Schwingungen verlaufen. Nach Erlöschen derselben findet neue Ladung und Entladung statt.

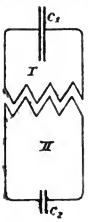


Fig. 2.

Die Rechnung lehrt nun, dass *die Entladung nicht, wie bei einem einzigen Stromkreis aus einer einzigen, sondern stets aus zwei Schwingungen von verschiedener Schwingungszahl besteht.*

Es wird daher unsere Aufgabe sein, die Schwingungszahlen dieser beiden Schwingungen, ihre Anfangsamplituden in den beiden Kreisen und die Grösse der Dämpfungen zu ermitteln.

2. Zu dem Zweck bezeichnen wir die Stromintensitäten in den beiden Kreisen mit i_1 und i_2, die Potentialdifferenzen der beiden Condensatoren von den Capacitäten c_1 und c_2 mit: V_1 und V_2, die Widerstände mit w_1 und w_2, die Inductionscoëfficienten mit p_1 und p_2, endlich den Coëfficienten der Wechselinduction mit q.

Dann gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} w_1 i_1 + p_1 \frac{d i_1}{d t} + q \frac{d i_2}{d t} + V_1 &= 0, \\ w_2 i_2 + p_2 \frac{d i_2}{d t} + q \frac{d i_1}{d t} + V_2 &= 0, \\ i_1 &= c_1 \frac{d V_1}{d t}, \\ i_2 &= c_2 \frac{d V_2}{d t}. \end{aligned} \tag{1}$$

Nach Einführung von V_1 und V_2 an Stelle von i_1 und i_2 erhalten wir:

$$\begin{aligned} p_1 c_1 \frac{d^2 V_1}{d t^2} + w_1 c_1 \frac{d V_1}{d t} + v_1 + q c_2 \frac{d^2 V_2}{d t^2} &= 0, \\ p_2 c_2 \frac{d^2 V_2}{d t^2} + w_2 c_2 \frac{d V_2}{d t} + V_2 + q c_1 \frac{d^2 V_1}{d t^2} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Setzt man zur Integration dieser Gleichungen:

$$\begin{aligned} V_1 &= e^{\lambda t}, \\ V_2 &= k e^{\lambda t}, \end{aligned} \tag{3}$$

so ist:

$$\begin{aligned} \lambda^2 p_1 c_1 + w_1 c_1 \lambda + 1 &= - k q c_2 \lambda^2, \\ k \{\lambda^2 p_2 c_2 + w_2 c_2 \lambda + 1\} &= - q c_1 \lambda^2, \end{aligned}$$

oder:

$$k = - \frac{\lambda^2 p_1 c_1 + w_1 c_1 \lambda + 1}{q c_2 \lambda^2} = - \frac{q c_1 \lambda^2}{\lambda^2 p_2 c_2 + w_2 c_2 \lambda + 1}. \tag{4}$$

Hieraus ergiebt sich zur Berechnung von λ eine Gleichung vierten Grades:

$$\begin{aligned} \lambda^4 + \lambda^3 \frac{w_1 p_1 + w_2 p_2}{p_1 p_2 - q^2} + \lambda^2 \frac{p_1 c_1 + p_2 c_2 + w_1 w_2 c_1 c_2}{p_1 p_2 - q^2} \\ + \lambda \frac{w_1 c_1 + w_2 c_2}{p_1 p_2 - q^2} + \frac{1}{c_1 c_2 (p_1 p_2 - q^2)} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Da wir aperiodische Bewegungen der Electricität von vornherein ausgeschlossen haben, so müssen die vier Wurzeln dieser Gleichung von der Form sein:

$$\lambda_1 = -\alpha + i\beta, \qquad \lambda_2 = -\alpha - i\beta,$$
$$\lambda_3 = -\gamma + i\eta, \qquad \lambda_4 = -\gamma - i\eta.$$

Anstatt diese Gleichung allgemein aufzulösen, wobei für die Wurzeln recht complicirte Ausdrücke zu erwarten sind, wollen wir von der Erwägung Gebrauch machen, dass man angenähert richtige Ausdrücke für die Schwingungsdauer der electrischen Schwingungen bei der Entladung eines Condensators ohne Induction auf einen zweiten Kreis erhält, wenn man das Glied vernachlässigt, welches den Widerstand enthält.

Es folgt dann die Formel:

$$T = \pi \sqrt{p\,c}.$$

Werden also in gleicher Weise hier die Widerstände $w_1 = w_2 = 0$ gesetzt, so erhält man aus Gleichung (5):

$$\lambda^4 + \lambda^2 \frac{p_1 c_1 + p_2 c_2}{p_1 p_2 - q^2} + \frac{1}{c_1 c_2 (p_1 p_2 - q^2)} = 0 \tag{7}$$

oder auch:

$$\frac{1}{\lambda^4} + \frac{1}{\lambda^2}(p_1 c_1 + p_2 c_2) + c_1 c_2 (p_1 p_2 - q^2) = 0.$$

Also:

$$\frac{1}{\lambda^2} = -\frac{p_1 c_1 + p_2 c_2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(p_1 c_1 - p_2 c_2)^2 + 4 c_1 c_2 q^2}. \tag{8}$$

Berücksichtigt man, dass bei dieser Annahme die Dämpfungsfactoren α und γ Null werden, dass also die Wurzeln der Gleichung (5) die Werthe haben:

$$\lambda_1 = +i\beta,\ \lambda_2 = -i\beta,\ \lambda_3 = +i\eta,\ \lambda_4 = -i\eta, \tag{9}$$

und dass die Schwingungszeiten T und T' mit denselben durch die Gleichungen zusammenhängen:

$$T = \frac{\pi}{\beta}, \qquad T' = \frac{\pi}{\eta},$$

so ist:

$$T = \pi \sqrt{\frac{p_1 c_1 + p_2 c_2 + \sqrt{(p_1 c_1 - p_2 c_2)^2 + 4 c_1 c_2 q^2}}{2}}, \tag{10}$$

$$T' = \pi \sqrt{\frac{p_1 c_1 + p_2 c_2 - \sqrt{(p_1 c_1 - p_2 c_2)^2 + 4 c_1 c_2 q^2}}{2}}.$$

Hieraus ersehen wir, dass sich stets der Strom in beiden

Kreisen in zwei gleichzeitig verlaufende Schwingungen von verschiedener Schwingungsdauer auflöst.

Führen wir in diese Ausdrücke die Schwingungszeiten T_1 und T_2 der beiden einzelnen Kreise ein, indem wir setzen:

$$T_1^2 = \pi^2 p_1 c_1, \qquad T_2^2 = \pi^2 p_2 c_2.$$

Ferner sei ϑ eine Zeit von derselben Grössenordnung, welche durch die Gleichung:

$$\vartheta^2 = \pi^2 q \sqrt{c_1 c_2}$$

definirt werden mag, dann ist:

$$(11) \qquad T = \pi \sqrt{\frac{T_1^2 + T_2^2 + \sqrt{(T_1^2 - T_2^2)^2 + 4\vartheta^4}}{2}},$$

$$T' = \pi \sqrt{\frac{T_1^2 + T_2^2 - \sqrt{(T_1^2 - T_2^2)^2 + 4\vartheta^4}}{2}}.$$

Wir gehen nun zur Besprechung der folgenden beiden Specialfälle über.

a) Es sei $T_1 = T_2$. Die beiden Kreise sind so angeordnet, dass sie gleiche Schwingungsdauer besitzen. Man bezeichnet dies gewöhnlich als Resonanz.

Dann ist:

$$(12) \qquad \begin{cases} T^2 = T_1^2 + \vartheta^2, \\ T'^2 = T_1^2 - \vartheta^2, \end{cases}$$

oder

$$(13) \qquad \begin{cases} T^2 = \pi^2 \{p_1 c_1 + q\sqrt{c_1 c_2}\} \\ T'^2 = \pi^2 \{p_1 c_1 - q\sqrt{c_1 c_2}\}. \end{cases}$$

Demnach sind auch in diesem Falle die beiden Schwingungszeiten verschieden und zwar ist *die eine Schwingungsdauer grösser, die andere kleiner, als die Schwingungsdauer der beiden Einzelkreise.*

b) Die Schwingungsdauer des einen Kreises sei erheblich grösser, als diejenige des anderen. Also:

$$T_1 > T_2.$$

Aber es sei auch ϑ klein, sodass

$$T_1^2 - T_2^2 > 2\vartheta^2$$

ist. Dann ist in erster Annäherung:

$$(14)\qquad \begin{cases} T^2 = T_1^2 + \dfrac{\vartheta^4}{T_1^2 - T_2^2} \\ T'^2 = T_2^2 - \dfrac{\vartheta^4}{T_1^2 - T_2^2} \end{cases}$$

In diesem Falle liegt also die Schwingungsdauer der langsameren Schwingung der Schwingungsdauer des ersten Kreises nahe, ist also grösser als dieselbe, während die Dauer der schnelleren Schwingung etwas kleiner ist, als diejenige des zweiten Kreises.

3. Wir wenden uns nun zu der Frage, wie sich die potentielle Energie der in dem ersten Condensator anfänglich angehäuften Electricitäten bei der Entladung auf die beiden Stromkreise und in denselben auf die beiden Einzelschwingungen vertheilt. Mit anderen Werthen: es sollen die Amplituden der einzelnen Schwingungsbewegungen berechnet werden. Jedoch sollen auch hierbei die Einflüsse der Widerstände vernachlässigt werden:

Dann nehmen die Gleichungen (2) die einfache Form an:

$$p_1 c_1 \frac{d^2 V_1}{dt^2} + V_1 + q c_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} = 0,$$

$$p_1 c_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} + V_2 + q c_1 \frac{d^2 V_1}{dt^2} = 0.$$

Es genügt die folgende Form der Lösungen zu benutzen:

$$(15)\qquad \begin{cases} V_1 = A_1 \cos \beta t + B_1 \cos \eta t, \\ V_2 = A_2 \cos \beta t + B_2 \cos \eta t. \end{cases}$$

Zur Bestimmung der Amplituden erhält man die Gleichungen:

$$A_1 (1 - \beta^2 p_1 c_1) = A_2 \beta^2 q c_2,$$

$$C_1 (1 - \eta^2 p_1 c_1) = C_2 \beta^2 q c_2.$$

Ferner ist anfänglich:

$$V_1 = 1, \qquad V_2 = 0,$$

$$\frac{dV_1}{dt} = 0, \qquad \frac{dV_2}{dt} = 0.$$

Hieraus folgt, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$(16)\qquad \begin{cases} k = \dfrac{1 - \beta^2 p_1 c_1}{\beta^2 q c_1}, \\ k' = \dfrac{1 - \eta^2 p_1 c_1}{\eta^2 q c_2}. \end{cases}$$

$$A_1 = \frac{k'}{k' - k}, \qquad C_1 = -\frac{k'}{k' - k},$$

$$A_2 = \frac{k'}{k' - k}, \qquad C_2 = -\frac{k'}{k' - k}.$$

Also:

$$(17) \quad \begin{cases} V_1 = \frac{1}{k' - k}\{k' \cos \beta t - k \cos \eta t\}, \\ V_2 = \frac{k\,k'}{k' - k}\{\cos \beta t - \cos \eta t\}. \end{cases}$$

Als bemerkenswerth mag hierbei hervorgehoben werden, dass die Amplituden der beiden verschiedenen Schwingungen in dem secundären Kreis gleich gross sind.

Mit Benutzung der früher berechneten Werthe von $1/\beta^2$ und $1/\eta^2$ erhält man:

$$(18) \quad \begin{cases} k = \frac{p_2 c_2 - p_1 c_1 + \sqrt{(p_1 c_1 - p_2 c_2)^2 + 4 q^2 c_1 c_2}}{2 q c_2} \\ k' = \frac{p_2 c_2 - p_1 c_1 - \sqrt{(p_1 c_1 - p_2 c_2)^2 + 4 q^2 c_1 c_2}}{2 q c_2} \end{cases}$$

Insbesondere sind die Amplituden der secundären Schwingungen:

$$(19) \quad \frac{k'\,k}{k' - k} = \frac{q c_1}{\sqrt{(p_1 c_1 - p_2 c_2)^2 + 4 q^2 c_1 c_2}}$$

In dem speciellen Falle der Resonanz ist:

$$k = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}, \qquad k' = -\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}.$$

$$(20) \quad \begin{cases} V_1 = \frac{1}{2}\{\cos \beta t + \cos \eta t\} \\ V_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\{\cos \beta t - \cos \eta t\}. \end{cases}$$

Es dürfte daher vortheilhaft sein, die Uebereinstimmung der beiden Schwingungszeiten der Einzelkreise dadurch herzustellen, dass man für die Inductionscoefficienten p_1 einen kleinen Werth nimmt, dafür aber einen Condensator von grösserer Capacität benutzt, während die betreffenden Grössen umgekehrt für den secundären Kreis herzustellen sind.

4. Um die Dämpfung der beiden Einzelschwingungen zu bestimmen, müssen wir auf die allgemeine Gleichung (5) für λ zurückgehen und die Wurzeln in der Form der Glei-

chungen (6) berechnen. Die Zahlen α und γ sind dann die zu den Schwingungen T' und T'' gehörenden Dämpfungsfactoren. Anstatt aber die Gleichung vierten Grades (5) allgemein aufzulösen, ist es wohl vorzuziehen die Grössen α und γ in der folgenden Weise angenähert zu bestimmen. Zu dem Zweck sehen wir die Werthe β und η auch jetzt noch — entsprechend den Gleichungen (8) und (9) — als richtig an. Schreiben wir ferner die Gleichung (5) in der abgekürzten Form:

$$\lambda^4 + f\lambda^3 + g\lambda^2 + h\lambda + k = 0, \tag{21}$$

und denkt man sich: $\lambda = i\beta$ gesetzt, so erfüllt β die Gleichung:

$$\beta^4 - g\beta^2 + k = 0. \tag{22}$$

Setzen wir ferner in der obigen Gleichung (20):

$$\lambda = -\alpha + i\beta,$$

aber unter der Voraussetzung, dass α klein ist im Vergleich zu β, so erhält man mit Vernachlässigung höherer Potenzen von α und der Producte von α mit f und h:

$$\beta^4 + 4i\beta^3\alpha - fi\beta^3 - g\beta^2 - 2g\alpha i\beta + hi\beta + k = 0.$$

Hieraus folgt mit Berücksichtigung der Gleichung (21):

$$\alpha = \frac{f\beta^2 - h}{2(2\beta^2 - g)}.$$

In gleicher Weise erhält man den Annäherungswerth für den Dämpfungsfactor der zweiten Schwingung:

$$\gamma = \frac{f\eta^2 - h}{2(2\eta^2 - g)}.$$

Wir setzen für die einzelnen Buchstaben ihre wirklichen Werthe ein und erhalten, wenn man noch die abgekürzten Bezeichnungen einführt:

$$R = \sqrt{(p_1 c_1 - p_2 c_2)^2 + 4q^2 c_1 c_2},$$
$$D = p_1 c_1 - p_2 c_2.$$

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{w_1 | p_2 (R + D) - 2q^2 c_1 | + w_2 | p_1 (R - D) - 2q^2 c_2 |}{4R(p_1 p_2 - q^2)} \\ \gamma &= \frac{w_1 | p_2 (R - D) + 2q^2 c_2 | + w_2 | p_1 (R + D) + 2q^2 c_2 |}{4R(p_1 p_2 - q^2)}. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Für den Fall der Resonanz nehmen diese Ausdrücke die einfachere Form an:

$$(24)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{w_1\{p_2\sqrt{c_1 c_2} - q c_1\} + w_2\{p_1\sqrt{c_1 c_2} - q c_2\}}{4\sqrt{c_1 c_2}(p_1 p_2 - q^2)} \\ \gamma = \dfrac{w_1\{p_2\sqrt{c_1 c_2} + q c_1\} + w_2\{p_1\sqrt{c_1 c_2} + q c_2\}}{4\sqrt{c_1 c_2}(p_1 p_2 - q^2)} \end{cases}.$$

Da α kleiner ist als γ, so folgt, dass die Dämpfung der kürzeren Schwingung grösser ist, als diejenige der langsameren. Man kann die letzten beiden Ausdrücke noch auf eine einfachere und zur Berechnung bei Zahlenbeispielen bequemere Form bringen.

Die Inductionscoefficienten p_1 und p_2 der beiden Wickelungen des Transformators enthalten die Quadrate der Windungszahlen, der Coefficient q die Producte derselben. Man kann daher setzen:

$$(25)\quad q = \sqrt{p_1 p_2}\cdot\varepsilon,$$

wo ε ein von der jedesmaligen Anordnung abhängender Zahlenfactor — jedenfalls kleiner als Eins — ist.

Führt man dies in die letzte Formel ein und berücksichtigt, dass hier

$$p_1 c_1 = p_2 c_2$$

angenommen wurde, so ist:

$$(26)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\dfrac{w_1}{p_1} + \dfrac{w_2}{p_2}}{4(1+\varepsilon)}, \\ \gamma = \dfrac{\dfrac{w_1}{p_1} + \dfrac{w_2}{p_2}}{4(1-\varepsilon)}. \end{cases}$$

Hiernach könnte man jetzt die allgemeinen Integrale der Gleichungen (2) in der Form schreiben:

$$\begin{aligned} V_1 &= e^{-\alpha t}\{A_1\cos\beta t + B_1\sin\beta t\} \\ &\quad + e^{-\gamma t}\{C_1\cos(\eta t) + D_1\sin\eta t\} \\ V_2 &= e^{-\alpha t}\{A_2\cos\beta t + B_2\sin\beta t\} \\ &\quad + e^{-\gamma t}\{C_2\cos\eta t + D_3\sin\eta t\}. \end{aligned}$$

Da wir jetzt angenähert richtige Werthe für α, β, γ, η erhalten haben, so würde es nicht schwer halten, die acht Constanten den Anfangsbedingungen entsprechend zu bestimmen. Ich verzichte aber auf die Wiedergabe der complicirten Formeln.

5. Dagegen schien es mir nicht ohne Interesse, die Zahlenwerthe der wichtigsten Grössen für ein Beispiel auszurechnen.

Ich lege nach ungefährer Schätzung für die Constanten des Apparates Werthe zu Grunde, wie sie einer Anordnung entsprechen, mit welcher ich die hauptsächlichsten Tesla'schen Versuche wiederholen konnte.

Setzt man:

$$p_1 = 1000 \text{ cm}, \quad p_2 = 25\,000 \text{ cm}, \quad q = 3000 \text{ cm},$$

ferner, um die Resonanzbedingung zu befriedigen:

$$c_1 = 10^{-18}$$

(also gleich 900 electrostatischen Capacitätseinheiten)

$$c_2 = \frac{1}{25} \cdot 10^{-18},$$

endlich:

$$w_1 = 0{,}01 \text{ Ohm} = 10^8,$$
$$w_2 = 1 \quad \text{„} \quad = 10^9,$$

so erhält man, wenn man die früheren Bezeichnungen beibehält:

$$T_1 = 9{,}93 \,.\, 10^{-8} \text{ sec},$$
$$T_2 = 12{,}6 \,.\, 10^{-8} \text{ sec},$$
$$T' = 6{,}3 \,.\, 10^{-8} \text{ sec},$$

oder die Schwingungszahlen:

a) für die Einzelschwingung der beiden Kreise:

$$N_1 = 10\,600\,000,$$

b) für die bei Combination derselben erhaltenen beiden Schwingungen:

$$N = 7\,960\,000,$$
$$N' = 15\,920\,000.$$

Die beiden Dämpfungsfactoren sind entsprechend:

$$\alpha = 2187.5,$$
$$\gamma = 8750.$$

Greifswald, den 29. Mai 1895.

8. *Eine bequeme Methode zur Demonstration des electrischen Brechungsexponenten von Flüssigkeiten; von P. Drude.*

(Nach den Berichten der sächs. Akad. 6. Mai 1895.)

Wenn electrische Wellen aus der Luft in eine isolirende Flüssigkeit übergehen, so verkürzt sich in letzterer die Wellenlänge. Das Verhältniss der Wellenlänge in der Luft zu der Wellenlänge in der Flüssigkeit wird der electrische Brechungsexponent der Flüssigkeit genannt. Nach der Theorie ist der electrische Brechungsexponent gleich der Quadratwurzel aus der Dielectricitätsconstante der Flüssigkeit. Die Erfahrung bestätigt diesen Satz durchaus.

Bisher fehlt es an einer bequemen Demonstrations- und Messmethode für den electrischen Brechungsexponenten. Man kann ihn, ganz analog wie den optischen Brechungsexponenten, bestimmen durch die Ablenkung, welche ein Prisma der zu untersuchenden Flüssigkeit electrischen Strahlen ertheilt, die durch den Hertz'schen Erreger mit parabolischem Hohlspiegel hergestellt werden können. Nach dieser Methode sind auch Messungen gemacht, und es hat nach ihr Ellinger[1]) sogar für Wasser und Aethylalkohol den electrischen Brechungsexponenten bestimmen können, was deshalb schwierig ist, weil beim Durchgang durch diese Flüssigkeiten die Intensität der electrischen Wellen durch zweimalige Reflexion an den beiden Grenzflächen eine starke Schwächung erleidet, sodass die Intensität nur 13 Proc. bez. 31 Proc. ihres ursprünglichen Werthes beträgt.

Diese und ähnliche Methoden, welche electrische Wellen benutzen, die sich frei durch die Luft hindurch fortpflanzen, sind zwar sehr interessant und instructiv, da sie den optischen Methoden nachgebildet sind; dass sie aber besonders bequem und stets zu einer sicheren Demonstration bereit wären, wird

1) H. Ellinger, Wied. Ann. **46**. p. 108. 1893.

Niemand behaupten, der selbst nach diesen Methoden experimentirt hat. Entweder braucht man nämlich, wenn man verhältnissmässig lange und dafür kräftige Wellen benutzt (Wellenlänge vielleicht 60 cm), grosse Mengen Flüssigkeit und unhandliche Apparate, Prismen, Tröge etc., oder man arbeitet, wie es Righi zuerst gezeigt hat, bei kürzeren Wellen, von vielleicht 6 cm Wellenlänge in Luft, mit handlichen Apparaten, aber die Intensität der Wellen ist dann so gering, dass ihre Wirkungen überhaupt nur mit Anwendung sehr grosser Sorgfalt zu erkennen sind, sodass man hierauf eine möglichst genaue Messmethode nicht wird begründen können, vor allem aber keine bequeme Demonstrationsmethode.

Es muss daher vortheilhafter erscheinen, die längs zweier Paralleldrähte fortgepflanzten electrischen Wellen heranzuziehen, — Drahtwellen, wie ich kurz sagen will —, da deren Intensität grösser als die der Luftwellen ist, und da man durch geeignete Anordnungen[1]) leicht die störende Reflexion der Wellen an der Oberfläche stark brechender Körper vermeiden kann.

Die bisher benutzten Drahtwellen, wie sie nach den Anordnungen von Lecher oder Blondlot herzustellen sind, haben nur den Uebelstand, dass sie zu lang sind, und infolgedessen wieder unbrauchbar zur bequemen Demonstration, wiewohl gut geeignet zur exacten Messung, allerdings erst nach Beschaffung zum Theil umständlicher Hülfsmittel. Man erkennt dies aus den Arbeiten von Cohn (l. c), sowie von Arons und Rubens[2]), die den dielectrischen Brechungsexponenten mit Hülfe von Drahtwellen bestimmt haben.

Ich suchte daher zunächst, kurze Drahtwellen von möglichster Intensität herzustellen. Die Anordnung, welche ich dazu am geeignetsten fand, möchte ich zunächst beschreiben.

Herstellung kurzer, kräftiger Drahtwellen.

In zwei parallelen Drähten kann man kräftige electrische Wellen herstellen sowohl nach der Methode von Lecher[3]) als

1) Vgl. E. Cohn, Berl. Ber. Dec. 1891; Wied. Ann. **45.** p. 370. 1892.
2) L. Arons u. H. Rubens, Wied. Ann. **42.** p. 581. 1891.
3) E. Lecher, Wied. Ann. **41.** p. 850. 1890.

nach der Methode von Blondlot.[1]) Bei ersterem besitzt der Erreger, d. h. die Anordnung, in welcher durch Ueberspringen eines Funkens primäre electrische Schwingungen erzeugt werden, verhältnissmässig grosse Capacität im Vergleich zu seiner Selbstinduction, dagegen ist im Blondlot'schen Erreger die Selbstinduction sehr gesteigert auf Kosten der Capacität. Dies muss vortheilhaft erscheinen, da hierdurch die Dämpfung der Schwingungen möglichst verringert wird, gerade wie bei zwei Federn gleicher Schwingungsdauer, von denen die eine grosse Masse und grosse Spannkraft, die andere dagegen geringe Masse und geringe Spannkraft besitzt, erstere ihre Schwingungen länger beibehält. In der That konnte ich auch durch Messungen der Längen von Secundärfunken oder durch Beobachtung des Leuchtens Geissler'scher Röhren, welche über die Parallel-

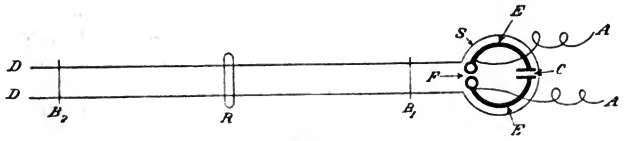


Fig. 1.

drähte gelegt wurden, constatiren, dass, wenn man Wellen gleicher Schwingungsdauer mit Hülfe der Lecher'schen und der Blondlot'schen Anordnung herstellt, letztere an Intensität den ersteren überlegen sind. — Ich halte deshalb die Blondlot'sche Anordnung für empfehlenswerther.

Bei einem bestimmten Erreger kann man nun allemal mehrere Schwingungen verschiedener Periode im Drahtsystem herstellen. Man kann dies in folgender Weise gut constatiren.

Es bedeute (vgl. Fig. 1) *E*, *E* die beiden Drähte des Blondlot'schen Erregers, welcher durch die Drähte *A*, *A* mit den Polen eines Ruhmkorff'schen Inductoriums verknüpft ist. *F* bedeutet die primäre Funkenstrecke, *C* ist ein kleiner Condensator, dessen Platten mit *E*, *E* verbunden sind. Die Erregerleitung *E E* ist nahe umspannt von der Secundärleitung *S*, welche in die Paralleldrähte *D D* übergeht. Letztere mögen

4) R. Blondlot, Compt. rend. **113.** p 628. 1891.

nun durch einen Metallbügel B_1 an einer beliebigen Stelle überbrückt werden. Das Drahtsystem: Erreger inclusive Secundärleitung bis zum Bügel B_1 hat nun eine bestimmte Eigenschwingungsdauer. Sie möge die *Hauptschwingung* genannt werden. Um zu erkennen, welche Schwingungen man hinter der Brücke B_1 durch die Hauptschwingung vor der Brücke kräftig erregen kann, lege man eine Geissler'sche Röhre R (sie kann electrodenlos sein, ich benutzte meist den electrodenfreien erweiterten Theil einer Zehnder'schen Röhre) über die Drähte $D\,D$ in einiger Entfernung hinter der Brücke, und verschiebe nun einen zweiten Metallbügel B_2, der noch jenseits der Geissler'schen Röhre über die Drähte gelegt wird. In einigen ganz bestimmten Stellungen von B_2 leuchtet die Röhre R hell auf. Dies tritt dann ein, wenn der Abstand von B_2 und B_1 ein Vielfaches einer halben Wellenlänge einer solchen Schwingung ist, die mit der Hauptschwingung in Resonanz steht. Man kann nun meist mehrere solcher Wellenlängen, deren Schwingungszahlen thatsächlich in den ganzzahligen Verhältnissen 1 : 2 : 3 etc. zu einander stehen, mit dem Bügel B_2 abgreifen. Indess ergiebt sich diejenige dieser *Secundärschwingungen*, deren Wellenlänge die grösste ist, an Intensität allemal weit überlegen über die anderen Secundärschwingungen; offenbar ist erstere diejenige Schwingung, welche mit der Hauptschwingung in Resonanz des Unisono steht. Ich will diese kräftigste secundäre Schwingung die *Grundschwinguug* nennen.

Wenn man die Capacität des Condensators C am Erreger ändert, z. B. verkleinert, so rücken alle Resonanzstellungen von B_2 näher an B_1. Dies ist sofort verständlich, da die Hauptschwingung durch Verkleinern von C schneller wird.

Aber auch die Stellung des ersten Bügels B_1 hat Einfluss auf die Periode der Hauptschwingung, sie wird schneller, wenn B_1 nach dem Erreger hin verschoben wird. Nennt man d die Entfernung der Brücke B_1 von der primären Funkenstrecke F, so habe ich bei Erregern von sehr verschiedenen Dimensionen folgende Regel gefunden: Die halbe Wellenlänge der Grundschwingung (d. h. die Distanz zwischen B_1 und der nächsten Stellung von B_2 für die kräftigste Wirkung) ist gleich der halben Wellenlänge, welche der freie Erreger (ohne von der Secundärleitung umgeben zu sein) besitzt, vermehrt um den

Term $a\,d$. Dabei ist a bei einer bestimmten Anordnung der Secundärleitung eine Constante, a wechselt jedoch bei Aenderung der Secundärleitung, z. B. des Abstandes zwischen den Paralleldrähten $D\,D$. Bei den von mir benutzten Leitungen, bei welchen jener Abstand von 2 cm bis 20 cm schwankte, lagen die Werthe von a zwischen 0,1 bis 0,6. — Wenn der Condensator vom Erreger $E\,E$ abgenommen wird, so ist die halbe Wellenlänge des freien Erregers nahezu gleich seiner Länge. In der That war dann die halbe Wellenlänge der Grundschwingung gleich Erreger — Länge[1]) plus $a\,d$.

Die Intensität der von der Hauptschwingung angeregten Grundschwingung hängt von der Lage des Bügels B_1 und seiner Gestalt ab. Wenn man einen geraden Bügel B_1 durch einen gebogenen ersetzt, so werden alle Secundärschwingungen stärker.[2]) Indess sind dann die Resonanzlagen der Brücke B_2 weniger scharf ausgeprägt, sodass es sich im allgemeinen mehr empfiehlt, gerade Brücken zu wählen. — Wenn die Brücke B_1 sehr nahe an der primären Funkenstrecke liegt (d sehr klein), so ist die Intensität der Grundschwingung gering. Mit Vergrössern von d wächst sie schnell und bleibt annähernd constant, bis dass sie wieder allmählich abnimmt, wenn d sehr gross wird Am günstigsten scheint es zu sein, wenn die Länge der ganzen Secundärleitung bis zur Brücke B_1 (S vermehrt um die Länge der Drähte $D\,D$ bis B_1) gleich oder etwas grösser ist als die Wellenlänge des freien Erregers, d. h. wenn sie etwa doppelt so lang ist als die Summe der Längen beider Erregerdrähte, falls kein Condensator C angeschlossen ist.

Mit Vergrösserung des Abstandes der Paralleldrähte $D\,D$ voneinander wächst im allgemeinen die Intensität der Grundschwingung, und zwar aus zwei Gründen: 1. weil der Bügel B_1 dann länger wird, d. h. ein grösseres Drahtstück gemeinsam der Hauptschwingung und den Secundärschwingungen hinter B_1 angehört; 2. weil die Selbstinduction für letztere wächst und dadurch die Dämpfung vermindert wird. Der zweite Grund tritt im allgemeinen hinter dem ersten zurück, nur ist er zu

1) Es ist darunter die Summe der Längen beider Erregerdrähte verstanden.

2) Die Erscheinung habe ich schon früher (Wied. Ann. **54.** p. 360. 1895) angegeben und dort auch ihre Ursache besprochen.

beachten, wenn man die Distanz der Paralleldrähte $D\,D$ klein wählen muss, wie es z. B. bei Erzielung kurzer Wellen nicht zu umgehen ist. Es ist dann zur Steigerung der Selbstinduction in der Secundärleitung günstig, die Drähte $D\,D$ nicht sehr dick zu wählen (etwa 1 mm Durchmesser, falls die Distanz $D\,D$ 2 cm beträgt). Die Dicke der Drähte $D\,D$, sowie $E\,E$ hat im übrigen, wenn man sie nicht zu gering wählt, wenig Einfluss.

Die Intensität der Hauptschwingung einer bestimmten Drahtleitung ist grösser, wenn die Erregerdrähte $E\,E$ einen Condensator C enthalten, als wenn sie dies nicht thun. Trotzdem ist es nicht günstig, allemal einen Condensator anzulegen, im Gegentheil ist seine Vermeidung besser und für die Herstellung sehr kurzer Wellen sogar nothwendig. Man muss nämlich berücksichtigen, dass durch die Anlegung eines Condensators auch die Wellenlänge der Hauptschwingung steigt. Eine langsamere Schwingung kann man aber auch herstellen durch längere Erregerdrähte $E\,E$ ohne Condensator, welche von einer längeren Secundärleitung S umspannt werden. Es erweist sich letztere Anordnung als vortheilhafter, was auch leicht zu verstehen ist, da bei ihr die Induction des Erregers auf die Secundärleitung S gesteigert wird.

Wenn man also eine Drahtwelle von bestimmter Wellenlänge erzielen will, so wendet man am besten einen Erreger $E\,E$ ohne Condensator an, dessen Gesammtlänge etwas kleiner als die Hälfte jener Wellenlänge ist. Die Secundärleitung S muss möglichst nahe $E\,E$ umspannen, sodass gerade noch Funken- oder Büschelentladung zwischen S und $E\,E$ vermieden werden.

Es sind nun noch einige Nebenumstände zu beachten. Für grössere Wellen (über 4 m) erhält man eine gut active Funkenstrecke F, falls man den Funken zwischen Zinkkugeln[1]) überschlagen lässt. Dieselben functioniren wochenlang gut, ohne dass sie ein Putzen erforderten. Für kleinere Wellen ist es vortheilhafter, den Funken zwischen zwei polirten Messingkugeln herzustellen, die in Petroleum oder Oel eintauchen. Für sehr schnelle Schwingungen (Wellenlänge kleiner als 1 m) erscheint dies Hülfsmittel sehr wichtig. Um Funken zwischen

1) Dies Mittel ist zuerst von Himstedt angegeben (Ber. der Oberh. Ges. f. Nat. u. Heilk. zu Giessen, Nr. 30, Wied. Ann. **52**. p. 475. 1894).

dem Erreger EE und der Secundärleitung S zu vermeiden, ist es bei kurzen Wellen, falls der Erreger EE einen Kreis umfasst, der kleiner als 10 cm im Durchmesser ist, vortheilhaft, das ganze System, Erreger und Secundärleitung, in Petroleum eintauchen zu lassen. Man müsste sonst die Secundärleit so weit vom Erreger entfernen, dass die Induction zwischen beiden merklich Einbusse erleidet, da dann viel magnetische Kraftlinien des Erregers für die Secundärleitung verloren gehen. Dies Eintauchen des ganzen Erregers in Petroleum hat allerdings den Uebelstand, dass dadurch die Wellenlänge des freien Erregers im Verhältniss der Quadratwurzel aus der Dielectricitätsconstante des Petroleums, d. h. etwa 1,4 mal grösser ist, als wenn der Erreger in Luft liegt. Nach der oben gegebenen Regel wird dementsprechend auch die Wellenlänge der Hauptschwingung grösser.[1]) Trotzdem scheint mir die Anwendung eines Isolators zwischen Erreger und Secundärleitung bei kleinem Erreger nicht zu umgehen zu sein.

Die Länge der primären Funkenstrecke F ist, falls sie in Petroleum liegt, möglichst gross zu wählen, in Luft darf sie ein gewisses Maximum nicht überschreiten ($^1/_2$—1 cm).

Schliesslich ist die Wahl des den Erreger speisenden Ruhmkorff nicht gleichgültig. Je länger die Wellen sind, desto grösser kann er sein, dagegen sind für kurze Wellen kleinere Inductorien (mit Platinunterbrechung) vortheilhafter. Für Wellen der Länge 14—4 m benutze ich einen mit 4 Volt (zwei Accumulatoren) gespeisten Ruhmkorff (mit Quecksilberunterbrechung), der eine Luftstrecke von 4 cm Länge zwischen Spitzen durchschlagen konnte, zwischen 4 m und 60 cm Wellenlänge erwies sich ein kleinerer Ruhmkorff (mit Platinunterbrechung) von 2,5 cm Durchschlagskraft bei Speisung mit 6 Volt günstig, zwischen 60 cm und 12 cm Wellenlänge dagegen ein mit 4 Volt gespeister Ruhmkorff von 2 cm Durchschlagskraft.

---

1) Ich habe dies in der That durch besondere Versuche constatiren können (vgl. weiter unten).

2) Selbst bei sehr kräftigen Inductorien kann man sie nur wenig über 1 mm steigern.

Schliesslich habe ich die Wirkungen auch dadurch zu steigern versucht, dass ich die Secundärleitung *S* den Erreger *E E* nicht einmal, sondern zweimal umschlingen liess, bevor sie zu den Drähten *D D* geleitet wurde. Man erhält dann auch eine geringe Steigerung der Wirkung, aber auch solche Vergrösserung der Wellenlänge, dass man bei einfacher Umschlingung eines längeren Erregers bessere Resultate erhält. Deshalb wurde dieses Mittel wieder fallen gelassen.

Es ist nun selbstverständlich, dass die Wirkungen mit abnehmender Wellenlänge schwächer werden müssen, da der Erreger *E E* kleiner zu wählen ist. Trotzdem ist die Intensität selbst kurzer Wellen bei geeigneter Anordnung noch überraschend stark Bis zur Wellenlänge 70 cm leuchteten empfindliche Geissler'sche Röhren stark auf und zeigten Kathodenlicht, wenn sie einfach über die Drähte *D D* gelegt wurden, zwischen 70 cm und 25 cm Wellenlänge sprach noch der erweiterte Theil einer Zehnder'schen Röhre[1]) gut an, zwischen 25 cm und 12 cm Wellenlänge kann man gut ein von Righi[2]) angewandtes höchst empfindliches Reagens auf Potentialschwankungen benutzen, nämlich einen versilberten Glasstreifen (oder ein Stück gewöhnlichen Glasspiegels), durch dessen Metallbelegung mit dem Diamanten ein schmaler Riss gezogen ist. Legt man diesen Streifen mit der Glasseite auf die Drähte *D D*, so stört er den Schwingungszustand in ihnen nicht merklich. Liegt der Streifen nicht auf einem Knoten der Potentialschwankungen, so tritt ein lebhaftes Funkenspiel im Riss der Metallbelegung ein. Dieser Riss braucht gar nicht sehr fein zu sein, er kann $^1/_{20}$ mm betragen. Letzterer Umstand spricht dafür, dass diese Drahtwellen viel intensiver sind, als die von Righi hergestellten Luftwellen gleicher Länge, da diese erst bei ganz feinen Rissen von wenigen Tausendstel Millimetern Breite ein secundäres Funkenspiel veranlassen.

Der kleinste Erreger ist in der Fig. 1 in *natürlicher Grösse* abgebildet.[3]) Er besteht aus zwei kreisförmig gebogenen Drahtstückchen von 1,5 mm Dicke, die an ihrem einen Ende

1) Zehnder, Wied. Ann. **47.** p. 82. 1892.

2) A. Righi, Rend. de R. Acc. dei Lincei **11.** 1. Sem. p. 505. 1893.

3) Man muss sich nur den in der Figur gezeichneten Plattencondensator *C* fortdenken.

Messingkügelchen von 3 mm Durchmesser tragen. Der Erreger E, E schliesst einen Kreis von 1 cm Radius ein. Die Drahtstücke E, E sind an zwei dünne Siegellackstängchen (in der Figur nicht gezeichnet) gekittet; an diesen werden sie durch zwei Stative gehalten und in das Petroleum eingesenkt. Die Zuleitung A, A zum Ruhmkorff muss unmittelbar an den Messingkügelchen geschehen, da sie sonst stören würde. An der Funkenstrecke liegt nämlich ein Knoten der Potentialschwankungen, dort kann man ohne Störung Drähte anlegen. Der Erreger ist von einer Secundärleitung aus $^1/_3$ mm starkem Kupferdraht umgeben, die Leitung ist an eine Glasröhre gekittet und wird durch sie gehalten. Die Fig. 1 stellt auch die Secundärleitung in natürlicher Grösse dar. Bei einigen Versuchen ist die Secundärleitung nur länger gewählt, als es der Figur entspricht. Die Distanz der Paralleldrähte $D\,D$ beträgt $^1/_2$ cm.

Mit diesem kleinen Apparate kann man sämmtliche Versuche Lecher's über die electrische Resonanz en miniature

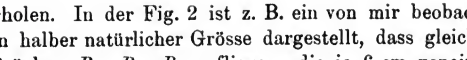


Fig. 2.

wiederholen. In der Fig. 2 ist z. B. ein von mir beobachteter Fall in halber natürlicher Grösse dargestellt, dass gleichzeitig drei Brücken B_1, B_2, B_3 aufliegen, die je 6 cm voneinander entfernt sind. Die halbe Wellenlänge ist also nahezu (abgesehen von einer kleinen Correction) 6 cm. Bei dieser Brückenlänge spricht das am Ende der Drähte $D\,D$ aufgelegte Stück Spiegelglas J mit kräftigen Secundärfunken an; bei geringer Verschiebung einer der Brücken verschwinden diese Funken. Sämmtliche Brücken können, ohne dass eine Aenderung eintritt, an ihren Mitten metallisch zur Erde abgeleitet werden. Die letzte Brücke B_3 liegt näher als auf $^1/_4$ Wellenlänge, d. h. näher als 3 cm an dem Glasstreifen J, weil dieser die Capacität der Drahtenden $D\,D$ merklich steigert

Zum Schluss gebe ich die halben Wellenlängen der Hauptschwingungen bei einigen der von mir benutzten Erregern an. Die erste Brücke B_1 ist in der Nähe der primären Funken-

strecke aufgelegt. Daher ist nach der oben auseinandergesetzten Regel die halbe Wellenlänge nahe gleich der Erregerlänge, falls der Erreger in Luft liegt und keinen Condensator enthält. In der Tabelle bedeutet D den Durchmesser des vom Erreger eingeschlossenen Kreises, L die Länge des Erregers ($L = \pi D$), $\frac{1}{2}\lambda$ die halbe Wellenlänge der Hauptschwingung. $\frac{1}{2}\lambda^*$ bedeutet die halbe Wellenlänge der Hauptschwingung, falls an die Enden des Erregers EE ein Condensator, bestehend aus zwei kreisförmigen Messingplatten von 10 cm Durchmesser und 2 cm Abstand, angelegt ist.

Wenn man diese Versuche wiederholt, so wird man nicht stets genau die in der Tabelle angegebenen $\frac{1}{2}\lambda$ wiederfinden. Dazu müsste die Lage des Bügels B_1 genauer angegeben sein. Aber zur Orientirung über die zu erwartenden Verhältnisse ist wohl die mitgetheilte Tabelle nützlich. — Alle Zahlen bedeuten Längen in Centimetern gemessen.

D	L	$\frac{1}{2}\lambda$,	$\frac{1}{2}\lambda^*$	
180	565	$\frac{1}{2}\lambda^*$	684	Erreger in Luft
		$\frac{1}{2}\lambda$	566	
60	188	$\frac{1}{2}\lambda^*$	295	
		$\frac{1}{2}\lambda$	192	
20	63	$\frac{1}{2}\lambda^*$	132	
		$\frac{1}{2}\lambda$	70	
10	31	$\frac{1}{2}\lambda$	36	
		$\frac{1}{2}\lambda$	52	Erreger in Petroleum
5	16	$\frac{1}{2}\lambda$	30	
2	6	$\frac{1}{2}\lambda$	13	
1	3	$\frac{1}{2}\lambda$	6	

In der Tabelle ist die Schwingung des Erregers von 31 cm Länge einmal für Luft und einmal für Petroleum angegeben. Das Verhältniss dieser Wellenlängen ist $52 : 36 = 1{,}44$: das Quadrat dieser Zahl ist 2,08, d. h. in guter Uebereinstimmung mit der Dielectricitätsconstante, welche sonst für Petroleum angegeben wird.

Demonstrationsmethode des electrischen Brechungsexponenten von Flüssigkeiten.

Der electrische Brechungsexponent von Flüssigkeiten wird am einfachsten ermittelt, wenn man die Paralleldrähte *D D* durch eine Schicht der zu untersuchenden Flüssigkeit hindurch leitet. Da genügend kurze Wellen zu Gebote stehen, so kann man schon mit geringen Flüssigkeitsquantitäten auskommen. Indess empfehlen sich zur Demonstration die in der vorigen Tabelle angegebenen Erreger für die kürzesten Wellen nicht, weil bei ihnen die Manipulationen durch die Kleinheit aller

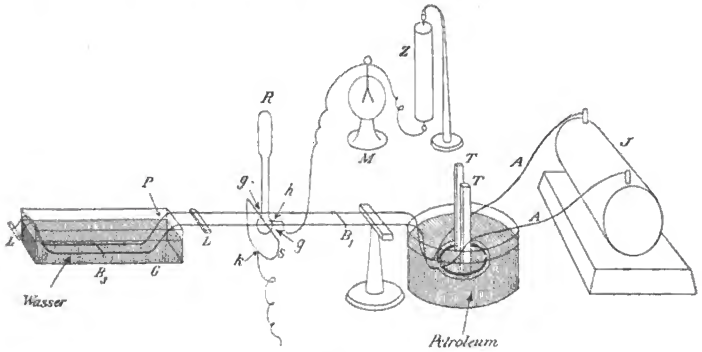


Fig. 3.

Verhältnisse unbequem werden und auch die Wirkungen nicht sehr kräftig sind. Der Erreger, dessen Kreisfläche 5 cm Durchmesser besitzt, der also ungefähr 60 cm lange Wellen liefert, scheint mir für den vorliegenden Zweck am geeignetsten.

Wenn man nun diesen Erreger benutzt und die Paralleldrähte *D D* der Secundärleitung, denen ich 2 cm Abstand gab, durch eine Flüssigkeitsschicht hindurch leitet, was man bei geeigneter Biegung der Drähte *D D* bequem erreichen kann, indem sie einen Trog durchsetzen (vgl. Fig. 3), so kann man zwar bei den Flüssigkeiten mit nicht sehr grosser Dielectricitätsconstante die Fortsetzung der electrischen Schwingungen durch die Flüssigkeit hindurch verfolgen, indem eine, über die Drähte

hinter der Flüssigkeit gelegte Zehnder'sche Röhre gut leuchtet; jedoch bei Wasser, Alkohol, Glycerin und überhaupt Flüssigkeiten von grosser Dielectricitätsconstante ist keine Schwingung hinter ihnen wahrzunehmen. Sie ist im Innern der Flüssigkeit nicht vorhanden, und auch im allgemeinen nicht einmal vor der Flüssigkeit, falls man irgendwo eine Brücke B_1 auf die Drähte $D\,D$ nahe beim Erreger auflegt. Nur vor B_1 sind Schwingungen vorhanden, ebenso treten sie vor der Flüssigkeit auf, wenn B_1 ganz fortgenommen wird.

Der Grund dieser Erscheinung ist die starke Reflexion der electrischen Wellen beim Eintritt in eine Flüssigkeit von hoher Dielectricitätsconstante.

Wenn die Drähte $D\,D$ an einer Stelle P in eine Wasserfläche eintreten, so hat das nahezu denselben Effect, als ob man bei P die Drähte leitend überbrückt. Wenn man nun aber eine Brücke B_1 schon nahe am Erreger aufgelegt und dadurch eine bestimmte Hauptschwingung geschaffen hat, so können hinter B nur an ganz bestimmten Stellen Brücken B_2, B_3 etc. aufgelegt werden, falls die electrischen Schwingungen zur Ausbildung kommen sollen. Diese Stellen sind Schwingungsknoten der electrischen Kraft einer mit der Hauptschwingung resonirenden Secundärschwingung. Damit also z. B. im Wasser Schwingungen zu Stande kommen, ist nothwendig, dass sowohl Eintrittsstelle als Austrittsstelle der Drähte $D\,D$ ins Wasser bez. aus dem Wasser an Knoten der Secundärschwingung liegen. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Lage des zweiten Knotens (an der Austrittsstelle) von der Wellenlänge der Schwingung im Wasser bestimmt wird. Damit die Schwingungen auch hinter dem Wasser vorhanden sind, ist ferner nothwendig, dass entweder, falls die Drähte $D\,D$ frei endigen, ihre Länge hinter dem Wasser gleich einem ungeraden Vielfachen von $^1/_4$ Wellenlänge der betreffenden Secundärschwingung (in Luft) ist, oder, falls die Drähte $D\,D$ hinter dem Wasser an irgend einer Stelle B' überbrückt sind, diese Brücke B' um ein Vielfaches einer halben Wellenlänge von der Austrittsstelle aus dem Wasser abstehen muss.

Man sieht, dass hier so viel Bedingungen zu erfüllen sind, dass das Verfahren zu complicirt zu einer Demonstrationsmethode wird.

Man könnte zweckmässiger in der von Cohn (l. c.) angewandten Weise verfahren, indem man zunächst die Eintrittsstelle der Drähte ins Wasser überbrückt (Brücke B_2), sodann die Lage einer Brücke B_1 vor dem Wasser aufsucht, sodass zwischen B_1 und B_2 lebhafte Schwingungen entstehen, und schliesslich im Wasser eine dritte Brücke B_3 hinter B_2 derartig verschiebt, dass auch im Wasser zwischen B_2 und B_3 Schwingungen entstehen. Dann ist die Distanz l' zwischen B_2 und B_3 nahezu gleich der halben Wellenlänge im Wasser, die Distanz l zwischen B_1 und B_2 gleich der halben Wellenlänge in Luft, das Verhältniss $l : l'$ ist gleich dem electrischen Brechungsexponenten, d. h. gleich der Quadratwurzel aus der Dielectricitätsconstante des Wassers.

Aber es ist schwierig und unbequem, die electrischen Schwingungen im Wasser zu beobachten.

Man kann nun aber aus dem Zustande der Schwingungen zwischen B_1 und der Eintrittsstelle der Drähte ins Wasser einen Schluss auf die Schwingungen im Wasser, d. h. zwischen der Eintrittsstelle und dem Bügel B_3 ziehen, *falls man die Brücke B_2 an der Eintrittsstelle fortlässt.*[1]) Die Schwingungen vor dem Wasser werden nämlich nur dann durch die Reflexion an der Brücke B_3 im Wasser nicht gestört, wenn B_3 um das Vielfache einer halben Wellenlänge der Schwingung im Wasser von der Eintrittsstelle entfernt ist (d. h. wenn B_3 auf einem Knoten der electrischen Kraft liegt), dagegen werden die Schwingungen durch Reflexion an B_3 völlig vernichtet, wenn B_3 um ein ungerades Vielfaches von $^1/_4$ Wellenlänge der Schwingung im Wasser von der Eintrittsstelle entfernt ist. (An diesen Stellen liegt nämlich ohne Brücke B_3 ein Schwingungsbauch der electrischen Kraft.)

Thatsächlich beobachtet man nun auch, wenn eine Zehnder'sche Röhre etwa in der Mitte zwischen B_1 und der Eintrittsstelle der Drähte ins Wasser über dieselben gelegt wird, dass bei Verschieben einer Brücke B_3 im Wasser successive helles Leuchten der Röhre und völliges Erlöschen eintritt. Diese Lagen der Brücke B_3 stehen um gleichviel voneinander

1) Trotzdem werden die electrischen Schwingungen an der Eintrittsstelle P der Drähte ins Wasser nicht reflectirt, weil infolge der Lage der Brücke B_1 die Stelle P ein Knoten der electrischen Kraft ist.

ab; dieser Abstand ist gleich $^1/_4$ Wellenlänge der Schwingung in Wasser.

Da die Wellenlänge im Wasser wegen seines hohen Brechungsexponenten sehr verkürzt wird, so kann man schon bei einem kleinen Trog zahlreiche Maxima und Minima beobachten. Ich benutzte einen Glastrog von 18 cm Länge; da die halbe Wellenlänge im Wasser 4 cm betrug, so konnte ich acht deutlich vorhandene Maxima und Minima in diesem Trog abgreifen.

Die Leuchtwirkung der Schwingungen ist zwar für einen Beobachter für Messzwecke sehr bequem zu verwerthen, indess zur Demonstration für ein grösseres Publikum ist sie unbequem, da man im verdunkelten Zimmer operiren muss. Man kann nun zur Demonstration sehr gut in dem luminescirenden Gasraum ein von einer Trockensäule geladenes Electroskop sich entladen lassen.[1]) Es gelingt dies am besten so, dass man die Glimmelectroden der Zehnder'schen Röhre durch einen Kupferdraht von 14 cm Länge verbindet. Dann wird durch diesen Kupferdraht und die Glimmelectroden ein Resonator gebildet, der mit der Hauptschwingung in Resonanz steht. Man erreicht dadurch zugleich den Vortheil erhöhter Empfindlichkeit, da die Eigenschwingung der Zehnder'schen Röhre die in leitenden Flüssigkeiten eintretende Dämpfung der electrischen Wellen für das Leuchten der Röhre weniger störend macht.[2]) Durch dieses Mittel ist es auch möglich, Alkohol und Glycerin ebenso sicher und bequem untersuchen zu können, wie gut isolirende Substanzen geringer Brechbarkeit, z. B. Petroleum.[3])

1) Vgl. P. Drude, Wied. Ann. **52.** p. 499. 1894.

2) Es ergiebt sich unzweifelhaft, dass das Leuchten einer evacuirten Röhre um so stärker ist, je regelmässiger und ungedämpfter die electrischen Schwingungen sind. Dies hat schon H. Ebert und E. Wiedemann in Wied. Ann. **50.** p. 223. 1893 hervorgehoben. Hierfür spricht auch, dass eine directe metallische Verbindung der Glimmelectroden mit den Drähten *DD* gar kein Leuchten hervorrief.

3) Wasser, selbst Kupfervitriollösung von nicht zu hoher Concentration (spec. Gewicht nicht über 1,1) macht von vornherein keine Schwierigkeiten, d. h. weniger wie Alkohol und Glycerin, was deshalb verwunderlich ist, weil letztere Flüssigkeiten für statische Ladungen besser isoliren, als wässerige Salzlösungen. Ich kann zunächst nichts

Man kann die Zehnder'sche Röhre entweder als Reagens für die electrische Kraft benutzen, dann ist sie in die Mitte zwischen der Brücke B_1 und der Eintrittsstelle der Drähte ins Wasser aufzustellen, die von der Resonatorleitung umgrenzte Fläche muss senkrecht zu den Drähten DD stehen (vgl. Fig. 3) oder als Reagens für die magnetische Kraft; dann ist die Fläche parallel mit den Drähten DD zu legen und zwar in der Nähe der Eintrittsstelle der Drähte ins Wasser. Die in die luminescirende Gasstrecke hineinragende Hauptelectrode h der Zehnder'schen Röhre wird mit dem Electroskop und einem Pol einer Trockensäle verbunden, der Punkt k der Resonatorleitung (vgl. Fig. 3), sowie der andere Pol der Trockensäule sind an Erde gelegt.

Behufs grösserer Deutlichkeit ist die *ganze Anordnung in Fig. 3 zusammen dargestellt.* J bedeutet das Inductorium, es wird von 3 Accumulatoren (in Reihe) gespeist und hat 2,5 cm Schlagweite in Luft. Die Drähte AA führen an die Entladungskugeln des Erregers EE. Diese sind Messingkugeln von 6 mm Durchmesser, der Erreger besteht aus zwei halbkreisförmig gebogenen 3 mm starken Kupferdrähten von 7,5 cm Länge, die eine Kreisfläche von 5 cm Durchmesser umgrenzen. Die Enden der Drähte EE gegenüber der Funkenstrecke sind 4 mm voneinander entfernt. Dieser Erreger ist an zwei Siegellackstangen TT gekittet, an welchen er gehalten und in das Petroleumbad getaucht wird. Vor dem Eintauchen werden die Entladungskugeln mit feinstem Schmirgelpapier Nr. 0000 abgerieben.

Die den Erreger umgebende Secundärleitung S besteht aus 1 mm starkem Kupferdraht. Er ist in Form eines 5,5 cm im Durchmesser haltenden Kreises gebogen, der aber eine Oeffnung von 2 cm besitzt. An deren Enden ist der Draht umgebogen und geht als Paralleldrähte DD aus dem Petroleum heraus, welche zur besseren Stabilität in zwei schmale Siegellackbrücken L, L eingekittet sind. Die gegenseitige Distanz der Drähte beträgt 2 cm, ihre Länge von der Umbiegung an bis zum Ende 64 cm. Die Secundärleitung S umgiebt den Erreger EE in einem Abstand von 1—2 mm. In einer Distanz

Sicheres sagen über dieses auffällige Verhalten, vermuthe aber, dass in Glycerin der gute Contact zwischen Bügel B_3 und Drähten DD durch einfaches Auflegen nicht genügend gesichert ist.

von 23 cm vom Ende sind die Paralleldrähte in der aus der Figur ersichtlichen Weise gebogen[1]), sodass sie in einen Glastrog G von 18 cm Länge, 5 cm Breite und 4 cm Tiefe eingehängt werden können.

Etwa 18 cm vor diesem Glastrog ist eine Zehnder'sche Röhre R zwischen die Drähte geschoben, in der aus der Figur ersichtlichen Stellung. s ist ein 13,5 cm langer, 1 mm dicker Kupferdraht, um den die an die Glimmelectroden g, g der Zehnder'schen Röhre angelötheten Platindrähte umgewickelt sind. Die ganze Länge der Resonatorleitung s inclusive Glimmelectroden g, g beträgt 23 cm. Der Punkt k von s ist zur Erde abgeleitet. Die der Glimmstrecke bei g, g nahe eingeschmolzene Hauptelectrode h der Zehnder'schen Röhre ist mit dem Electroskop M leitend verbunden. Dieses wiederum mit dem einen Pole der Zamboni'schen Säule Z, deren anderer Pol zur Erde abgeleitet ist. Wenn der Raum zwischen g, g und h nicht luminescirt, so stehen die Goldblätter von M ruhig gespreizt, dagegen fallen sie bei Luminescenz sofort zusammen.

Die Manipulationen sind nun folgende: In den Trog G wird irgend eine Flüssigkeit, sagen wir gewöhnliches Leitungswasser, eingegossen. Es wird ein Bügel B_2 (ein 2 cm langes, mit Häkchen versehenes Drahtstück von 1 mm Dicke) über die Drähte $D\,D$ an ihrer Eintrittsstelle P ins Wasser übergelegt. Das Inductorium wird in Gang gesetzt und die Entladungskugeln des Erregers werden möglichst weit (etwa $^1/_2$ mm) auseinandergezogen, indem man den einen Träger T eines Erregerdrahtes etwas verschiebt; sofort fallen die Goldblätter zusammen.

Sodann wird eine zweite Brücke B_1 zwischen Erreger und Zehnder'scher Röhre über die Drähte $D\,D$ gelegt. Dann spreizen die Goldblätter im allgemeinen wieder. Nur bei einer bestimmten Lage von B_1 fallen die Goldblätter wieder zusammen. Diese Lage wird aufgesucht durch Verschieben von B_1, und es wird dann B_1 dort belassen. Bei der getroffenen Anordnung liegt B_1 etwa 36 cm von B_2 entfernt.

---

1) Wie ich durch besondere Versuche feststellte, störten diese Biegungen die Schwingungen nicht merklich.

Schiesslich wird die Brücke B_2 mit Hülfe einer Pincette allmählich ins Wasser geschoben. (Von nun an spielt die Brücke die Rolle der vorhin bezeichneten Brücke B_3. Sie wird daher jetzt B_3 genannt werden. B_2 existirt nun nicht mehr.) Bei Verschiebung um 2 cm gehen plötzlich die Goldblätter auseinander und stehen ruhig. Diese Distanz entspricht $^1/_4$ Wellenlänge der Schwingung im Wasser. Bei weiterem Verschieben von B_3 fallen die Goldblätter wieder zusammen, um, falls B_3 auf 6 cm verschoben ist, wieder ruhig zu spreizen. Man erhält so in dem kleinen Troge vier Stellen des B_3, für welche die Goldblätter spreizen (Bäuche der electrischen Kraft, vgl. oben p. 13) und vier dazwischen liegende Stellen kräftigsten Zusammenfallens (Knoten der electrischen Kraft). Je nach der Intensität der Schwingungen, d. h. der Distanz, welche man den Entladungskugeln des Erregers gibt, sind entweder die Knotenstellungen oder die Bäuche schärfer zu ermitteln. — Die Distanz aufeinanderfolgender Knoten oder Bäuche beträgt beim Wasser für 17° C. nahezu[1]) 4 cm, die halbe Welle in Luft (Entfernung des B_1 vom Wasser) beträgt 36 cm, daher ist der electrische Brechungsexponent des Wassers

$$n = 36 : 4 = 9$$

und die Dielectricitätsconstante

$$\varepsilon = n^2 = 81.$$

In dieser Weise kann man jede, nicht allzu gut leitende Flüssigkeit untersuchen, z. B. auch Alkohol und Glycerin sehr gut. Die Flüssigkeiten werden einfach in den Trog G eingegossen. Der Bügel B_1 kann liegen bleiben, es müssen nur die neuen Knotenstellungen des Bügels B_3 aufgesucht werden. — Für Flüssigkeiten mit geringer Dielectricitätsconstante, wie z. B. Petroleum ($\varepsilon = 2$) erhält man im Trog nur einen Bauch für B_3. Will man mehrere Knoten und Bäuche nachweisen, so müsste man einen längeren Trog und längere Drahtleitung verwenden.

Man kann nach dieser Methode auch nachweisen, dass Leitfähigkeit und Dielectricitätsconstante ganz unabhängig voneinander sind. Wenn man nämlich von destillirtem Wasser

1) Genauere Zahlen sind unten mitgetheilt.

ausgeht und in ihm die Knoten und Bäuche aufsucht, so ändert sich ihre Lage durchaus nicht, wenn man z. B. Kupfervitriol zusetzt. Die Leitfähigkeit stört nämlich bei dieser Methode deshalb wenig, weil die Schwingungen sehr schnell sind.[1]) — Der Effect der Leitfähigkeit, falls sie nicht sehr gross wird, besteht in einer Dämpfung der in der Flüssigkeit fortgepflanzten Wellen; daher sind die Knoten- oder Bauchstellungen der Brücke B_3 in dem Leuchten der Zehnder'schen Röhre um so weniger scharf wahrzunehmen, je weiter B_3 in die Flüssigkeit hineingeschoben wird. — Man kann aber immerhin noch zwei bis drei Bäuche deutlich constatiren, selbst wenn das Wasser schon sichtlich blau gefärbt ist. Wenn also die Leitfähigkeit etwa 1000 mal grösser wird, so ändert sich trotzdem die Dielectricitätsconstante nicht merklich. — Bei einer 10proc. Kupfervitriollösung war noch der erste Bauch hinter der Eintrittsstelle P der Drähte in die Lösung deutlich zu constatiren; am besten gelingt dies, wenn die Zehnder'sche Röhre als Reagens für die magnetische Kraft in der Nähe von P über die Drähte gelegt wird (vgl. oben p. 647). Die folgenden Bäuche der electrischen Kraft waren nicht mehr zu erkennen, die Röhre hörte nicht mehr auf, zu leuchten, wenn B_3 über den ersten Bauch hinausgeschoben wurde.

Wie aus der Beschreibung ersichtlich ist, sind zur Anwendung der Methode nur sehr geringe Hülfsmittel nöthig. Wenn ein geeignetes Inductorium fehlt, so wird auch eine gute Influenzmaschine das Erforderliche leisten, und wer die Beschaffung oder Selbstanfertigung einer Zehnder'schen Röhre[2]) vermeiden will, kann sich auch mit einem Streifen Spiegelglas behelfen (vgl. oben p. 640), welches über die Drähte $D\,D$ gelegt wird und in dessen Metallbelegung ein schmaler Riss gezogen ist. Die dort springenden Secundärfunken können

1) Vgl. dazu P. Drude. Physik des Aethers, p. 549. Stuttgart 1894. Nach den dort ausgeführten Berechnungen ergiebt sich, dass für die hier benutzten Wellen in einer 1proc. Kupfervitriollösung die Stärke der sogenannten Verschiebungsströme noch etwa fünfmal grösser ist, als die der Leitungsströme. Bei einer 10proc. Kupfervitriollösung sind beiderlei Arten Ströme etwa von gleicher Grössenordnung.

2) Sie ist aus Freiburg vom Glasbläser Kramer zu beziehen.

zur Electroskopentladung ebenso herangezogen werden, wie der luminescirende Gasraum einer Zehnder'schen Röhre. Indess functionirt letztere immerhin sicherer als ein Glasstreifen, da dieser auch in Bauchstellungen der Brücke B_3 öfter noch Funken zeigt. Zur möglichst sicheren Demonstration ist daher eine Zehnder'sche Röhre vorzuziehen.

Zum Schluss gebe ich noch einige, vorläufig nur roh angestellte Beobachtungen. Die Temperatur betrug 17° C.

Destillirtes Wasser.

Die Brücke B_1 lag um 36 cm entfernt von der Eintrittsstelle P. Die mitgetheilten Zahlen geben die Entfernung der Brücke B_3 von P in Centimetern an.

Knoten:	Bäuche:
0	
4,0; 4,2	1,8; 1,8
8,5; 8,7	6,8; 6,5
12,0; 12,0	10,8; 10,5

die Mittelwerthe sind

Knoten:	0	4,1	8,6	12,0
Bäuche:	1,8	6,6	10,6	

Daraus folgt[1]) die halbe Wellenlänge im Wasser im Mittel zu $\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}14$ cm mit einem wahrscheinlichen Fehler von $\pm$ 0,18 cm. Es ergiebt sich daher der Brechungsexponent des Wassers, da die halbe Wellenlänge in Luft (nahezu) $\frac{1}{2}\lambda = 36$ cm beträgt:

$$\lambda : \lambda' = 36 : 4{,}14 = 8{,}7$$

und die Dielectricitätsconstante zu

$$\varepsilon = 76 \pm 6.$$

Kupfervitriollösungen.

Zum besseren Vergleich sind auch die successiven Knoten und Bäuche im reinen Wasser wieder mitgetheilt:

Wasser	0	1,8	4,1	6,6	8,6
$^1/_2$ % Lösung	0	1,8	4,0	6,7	8,6
10 % Lösung	0	1,8	—	—	—

1) Bei der Berechnung ist eine gewisse additive Correctionsgrösse bei allen Brückenstellungen mit berücksichtigt (vgl. dazu Cohn, Wied. Ann. **45.** p. 374. 1892).

Die Dielectricitätsconstante ist also durch die Auflösung des Salzes nicht beeinflusst, wenigstens nicht in einer für rohe Messungen merklichen Weise.

Aethylalkohol. Spec. Gewicht 0,796.

Knoten: 0 7,5
Bäuche: 3,5 11,0

$$\tfrac{1}{2}\lambda' = 7{,}6, \quad \tfrac{1}{2}\lambda = 36, \quad \lambda : \lambda' = 4{,}74, \quad \varepsilon = \mathbf{22{,}5}.$$

Glycerin.

Knoten: 0 6,8
Bäuche: 3,3

$$\tfrac{1}{2}\lambda' = 7{,}0, \quad \tfrac{1}{2}\lambda = 36, \quad \lambda : \lambda' = 5{,}15, \quad \varepsilon = \mathbf{26{,}5}.$$ [1])

Petroleum.

Die bisher benutzten Wellen von $\frac{1}{2}\lambda = 36$ cm sind zu lang, als dass man in dem benutzten Glastrog eine halbe Wellenlänge $\frac{1}{2}\lambda'$ der Schwingung in Petroleum hätte beobachten können. Man kann sich aber in diesem Falle so helfen, dass man als Secundärschwingung die Octave der Hauptschwingung benutzt. Wenn man zunächst den Bügel B_2 an der Eintrittsstelle P der Drähte ins Petroleum auflegt, so kann man auch noch eine Brücke B_1 in einer Entfernung von 21 cm von P anbringen [2]), sodass lebhafte Schwingungen zwischen B_1 und B_2 entstehen. Dann ergiebt sich durch Verschiebung der Brücke B_3 (nach Fortnahme von B_2), dass wiederum ein Maximum eintritt, falls B_3 um 15 cm ins Petroleum geschoben ist. Es ist daher

$$\tfrac{1}{2}\lambda = 21, \quad \tfrac{1}{2}\lambda' = 15, \quad \lambda : \lambda' = 1{,}4, \quad \varepsilon = \mathbf{2{,}0}.$$

1) Ch. B. Thwing (Ztschr. f. phys. Chem. **14.** p. 286. 1894) gibt für Glycerin $\varepsilon = 56{,}02$ bei langsameren Schwingungen. Ich muss vorläufig mein Resultat bei Glycerin für unsicher halten, da wegen der bei Glycerin besonders auffälligen Dämpfung der Schwingungen vermuthlich Contactfehler zwischen Bügel B_3 und Drähten $D\,D$ bestanden haben (vgl. oben p. 646, Anm. 3).

2) Die Entfernung 21 cm ist nicht genau gleich der Hälfte der früher benutzten Entfernung (36 cm), sondern etwas grösser, weil durch Verschiebung des Bügels B_1 die Hauptschwingung etwas langsamer geworden ist (vgl. oben p. 637).

Bei Flüssigkeiten von geringem Brechungsvermögen, wie Petroleum, kann man auch etwas anders verfahren. Man biegt die Drähte $D\,D$ nach unten (vgl. Fig. 4a und 4b) und grenzt zunächst zwischen zwei Brücken B_1 und B_2 eine kräftige Schwingung in Luft ab (Fig. 4a). Die Distanz der Brücken möge d sein. Sodann verschiebt man die Brücke B_2 auf eine um ein paar Centimeter nähere Distanz d' heran. Die Schwingungen hinter B_1 verlöschen dadurch. Wenn man aber jetzt von unten einen mit Petroleum gefüllten Glascylinder über die Brücke B_2 heraufführt, sodass $D\,D$ ins Petroleum tauchen (vgl. Fig. 4b), so treten wieder lebhafte Schwingungen zwischen B_1 und B_2 auf, wenn die Drähte $D\,D$ auf eine ganz bestimmte Länge l eintauchen. Es ergiebt eine einfache Ueberlegung, dass, falls λ bez. λ' die Wellenlängen in Luft bez. Petroleum bedeuten, sein muss:

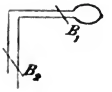


Fig. 4a.

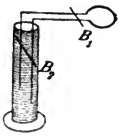


Fig. 4b.

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{1}{2} = \frac{d'-l}{\lambda} + \frac{l}{\lambda'}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{l+d-d'}{l}$$

$$\varepsilon = \left(\frac{l+d-d'}{l}\right)^2.$$

So betrug bei einem Versuch

$$d = 34{,}5 \text{ cm}, \quad d - d' = 3{,}6 \text{ cm}, \quad l = 8{,}5 \text{ cm}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{12{,}0}{8{,}5} = 1{,}41, \quad \varepsilon = \mathbf{2{,}0}.$$

Von der beschriebenen Methode möchte ich hier vorläufig ihre Brauchbarkeit zur Demonstration hervorgehoben haben, da sie absolut sicher functionirt, wenig Zurichtung erfordert und sehr bequem ist. Die Methode kann auf Flüssigkeiten von verhältnissmässig hoher Leitfähigkeit angewandt werden, z. B. auf alle verdünnten Salzlösungen, und man braucht dabei die Leitfähigkeit durch nichts zu compensiren.

Doch auch zu genauen Messzwecken kann die Methode herangezogen werden, am genauesten in der Weise, dass die Intensität der electrischen Schwingungen zwischen erster Brücke B_1 und Flüssigkeit quantitativ gemessen wird in ihrer Abhängigkeit von der Stellung der Brücke B_3 in der Flüssigkeit. Man kann dazu z. B. bequem die Messung des galvanischen Widerstandes des luminescirenden Gasraumes der Zehnder'schen Röhre heranziehen, wie ich es schon früher zum Zwecke anderer Messungen gethan habe.[1]) Auch kann man dadurch zugleich einen Schluss auf die Leitfähigkeit der Flüssigkeiten machen, wenn man die successive Verschlechterung der Minima in den aufeinanderfolgenden Knotenstellungen der Brücke B_1 misst.[2]) — Es hat die Untersuchung dieser Frage wohl deshalb Interesse, weil die Leitfähigkeit verdünnter Lösungen für schnelle Schwingungen noch nicht gemessen ist.

Bei wesentlich besser leitenden Flüssigkeiten kann vielleicht ihre Leitfähigkeit aus der absoluten Phasenänderung bei der Reflexion der electrischen Wellen an ihrer Oberfläche ermittelt werden, indem auch diese aus der Stellung des Bügels B_1 ermittelt werden kann. Diese Methode ist dann analog der optischen, nach der aus der Phasenänderung des Lichtes bei der Reflexion an einem absorbirenden Körper sein Absorptionsvermögen gefunden werden kann.

Wenn man die hier dargelegte Methode zur Bestimmung der Dielectricitätsconstante mit der von Nernst[3]) beschriebenen vergleicht, welche ebenfalls schlecht leitende Flüssigkeiten, wie z. B. Wasser, zu untersuchen erlaubt, so arbeitet, wenn man nur auf Maxima und Minima des Leuchtens der Zehnder'schen Röhre einstellt, diese Methode nicht so exact, wie die Nernst'sche, dagegen, wie mir scheint, etwas einfacher, zumal eine Compensation der Leitfähigkeit nicht nöthig ist, und die Untersuchung von verdünnten Salzlösungen oder Wasser

1) P. Drude, Wied. Ann. **53.** p. 758. 1894.

2) Es bringt keinerlei Aenderung hervor, wenn die Drähte $D\,D$ sowie die Brücke B_3 in der Flüssigkeit mit einer dünnen isolirenden Hülle, z. B. Schellackschicht, überzogen sind, falls nur zwischen Brücke B_3 und Drähten $D\,D$ metallischer Contact besteht. Man kann daher die Leitfähigkeit ohne metallische Zuführung zur Flüssigkeit messen.

3) W. Nernst, Ztschr. f. phys. Chem. **14.** p. 642. 1892.

nicht im geringsten schwieriger ist, als die guter Isolatoren, während dies bei der Nernst'schen Methode schon eine erheblich gesteigerte Sorgfalt erfordert. Allerdings muss zur Anwendung der hier beschriebenen Methode eine grössere Menge der zu untersuchenden Flüssigkeit (etwa $^1/_4$ l) zu Gebote stehen, während für die Nernst'sche Methode 2 ccm genügen.

Wie ich durch Versuche, die ich bei späterer Gelegenheit mitzutheilen gedenke, festgestellt habe, lässt sich durch Einstellung auf die Leuchtwirkung der Zehnder'schen Röhre eine Genauigkeit von 2 Proc. in der Bestimmung der Dielectricitätsconstante erreichen. Da eine solche Genauigkeit für manche chemische Zwecke ausreichend sein dürfte, so möchte ich auch dem Chemiker die Benutzung dieser Methode empfehlen, zumal sie ohne besondere Einübung sofort zu handhaben ist.

Durch verfeinerte Anordnungen zur Messung der Intensität der electrischen Schwingungen kann die Genauigkeit der Methode erheblich gesteigert werden. Ich bin mit Versuchen in dieser Richtung beschäftigt, habe sie aber noch nicht in grösserem Umfange abschliessen können.

Leipzig, Mai 1895.

9. *Inconstanz des Funkenpotentiales;* *von G. Jaumann.*

(Aus den Sitzungsber. der k. k. Akad. der Wissensch. in Wien, math.-naturw. Klasse, Bd. CIV. Abth. II. a. Januar 1895.)

1. *Einfluss der Kraftschwankungen.* In einer früheren Arbeit[1]) habe ich nachgewiesen, dass die *rasche zeitliche Aenderung der electrischen Kraft des Entladungsfeldes* eine wesentliche Entladungsbedingung ist. Hierdurch wurde die ältere Ansicht widerlegt, dass der Eintritt der Entladung durch die statischen Eigenschaften des Feldes bestimmt sei, dass also Form, Distanz und Material der Electroden und die Natur des Dielectricums eine zur Entladung nöthige Potentialdifferenz bestimmen sollen.

Zu Beginn der Entladung hat nicht die electrische Kraft E im Entladungsfelde einen bestimmten Werth, sondern ungefähr das Product $E.(\partial E/\partial t)$ derselben in ihre zeitliche Aenderung (l. c. p. 793). E ist dabei zu messen an der Oberfläche jener Electrode, welche von den excitirenden electrischen Wellen getroffen wird.

2. *Polemisches.* Von einer zustimmenden Bemerkung bei H. Hertz[2]) abgesehen hat diese Arbeit in der Zwischenzeit nur Widerspruch gefunden. Die Constanz des Entladungspotentiales wurde aufrecht erhalten durch die Hrn. Heydweiller[3]), Borgesius[4]), Wesendonck[5]), Freyberg[6]), Precht[7]) und andere, und zwar auf Grund unzulänglicher negativer Messungen. Meine positiven Versuche, auch jene, welche ich ausdrücklich als von entscheidender Beweiskraft

1) Einfluss rascher Potentialänderungen auf den Entladungsvorgang. Diese Sitzungsber. **97.** p. 765. 1888.

2) Hertz, Untersuchungen, Anhang p. 288.

3) Heydweiller, Wied. Ann. **38** und **43.**

4) Borgesius. Dubbelbifilaire Electrometer, Groningen 1892.

5) Wesendonck, Wied. Ann. **38. 40. 47. 49.**

6) Freyberg, Wied. Ann. **38. 40. 47. 49.**

7) Precht, Wied. Ann. **38. 40. 47. 49.**

bezeichnet habe, wurden dabei niemals nur erwähnt, geschweige denn widerlegt.

Hr. O. Lehmann[1]), welcher allerdings über den Inhalt meiner Arbeit nicht im Klaren ist (vgl. was er l. c. p. 430 als meine Meinung anführt), hat sich bei Gelegenheit der Naturforscherversammlung 1894 noch sehr energisch für die Constanz des Entladungspotentials erklärt.

3. *Theoretische Bedeutung des Einflusses der Kraftschwankungen.* Das neue Entladungsgesetz sollte gerade seiner Fremdartigkeit wegen das Vertrauen erwecken, dass es nicht leicht ist, eine andere Auffassung für die ihm zu Grunde liegenden Experimente zu finden. Uebrigens widerspricht dasselbe keiner Theorie, denn es gibt keine nennenswerthe Theorie der Entladung. Es widerspricht nur dem Satz von der Constanz des Entladungspotentials, welcher sich längst als theoretisch unfruchtbar erwiesen hat.

Im Gegensatze hierzu kann man sich wohl denken, wie das neue Entladungsgesetz theoretisch verwerthet werden könnte. Die Entladung an sich ist eine der vielen Erscheinungen, welche über die Maxwell'sche Theorie hinausgehen. Der Entladungsstrom ist offenbar nicht wie der Ohm'sche Strom durch die electrische Kraft E, noch wie der Maxwell'sche Verschiebungsstrom durch deren zeitliche Aenderung $\partial E/\partial t$ bestimmt. Die Angabe, dass das Product beider $E.(\partial E/\partial t)$ den Eintritt der Entladung bestimmt, erscheint also ganz wohl assimilirbar. Zu berücksichtigen ist dabei der Umstand, dass die electromagnetischen Vorgänge sich genau genommen *nicht einfach superponiren* (electrische Doppelbrechung, magnetische Drehung der Polarisationsebene, Entladung durch Licht etc), was darauf hinweist, dass die electromagnetischen Grundgleichungen nur mit Annäherung linear sind.

4. *Erklärung der Hertz'schen Lichtwirkung.* Das neue Entladungsgesetz hat auch in der Zwischenzeit einen ganz bemerkenswerthen Erfolg aufzuweisen. *Es erklärt vollkommen die Hertz'sche Wirkung des Lichtes auf die Entladung.* Beweis dessen ist, dass ich den Ausfall des Experimentes der Hrn.

1) O. Lehmann, Wied. Ann. **47**. p. 426. 1892.

Elster und Geitel[1]) über die Wirkung *polarisirten* Lichtes schon 1892 *voraussagte.*[2]) Die Hrn. Elster und Geitel haben diesen ihnen allerdings wohlbekannten Umstand nicht mitgetheilt.[3])

Hr. J. Wanka (l. c. p. 58) hat es ferner am hiesigen Institute im Jahre 1891 auf meine Anregung unternommen, die Identität der Hertz'schen Lichtwirkung mit der von mir nachgewiesenen entladenden Wirkung der Kraftschwankungen festzustellen. Es ist ihm auch gelungen, den vorauszusehenden Einfluss der *Polarisationsrichtung* der einen Funken excitirenden electrischen Strahlen nachzuweisen.

Bezüglich des Einflusses polarisirten Lichtes auf die Entladung finden sich dort folgende Stellen:

p. 57. „Hr. G. Jaumann hielt deswegen auch dafür, dass die Hertz'sche Lichtwirkung auf dem von ihm aufgefundenen Einflusse der Potentialschwankungen auf den Entladungsvorgang beruhe und hierdurch erklärt sei";

p. 63. „Da die Wirkung bei einer gewissen Stellung des activen Funkens gänzlich erlosch, weil die electrischen Kräfte desselben polarisirt sind, so ist es auch sehr wahrscheinlich, dass das Hertz'sche Lichtexperiment, mit polarisirtem Lichte ausgeführt, zu einem ähnlichen Resultate führen müsse."

Die Excitation durch polarisirtes Licht muss erfolgen, wenn die electrischen Schwingungen desselben in der Electrodennormalen eine Componente haben, wie dies Elster und Geitel thatsächlich nachgewiesen haben.

5. *Quantitative Uebereinstimmung der Kraftschwankungswirkung mit der Hertz'schen Lichtwirkung.* Die Entladung kann excitirt werden: 1. durch Licht, 2. durch einen electromagnetischen Strahl, 3. durch eine electrische Drahtwelle. In der folgenden Tabelle sind für diese drei Fälle die Schätzungen für die maximale Aenderungsgeschwindigkeit der electrischen Kraft $(\partial E/\partial t)_{\max}$ zusammengestellt. Man erkennt, dass gerade diese, welche die Wirkung der Strahlen und Wellen auf den

1) Elster u. Geitel, Wied. Ann. **52.** p. 440. 1894.

2) Vgl. Wanka, Ein neues Entladungsexperiment. Mitth. der deutschen mathem. Gesellsch. in Prag, 1892; Wied. Beibl. **17.** p. 1103.

3) Vgl. hierzu die Antwort der Hrn. Elster und Geitel dieses Heftes p. 698.

Funken bestimmt, in allen drei Fällen von gleicher Grössenordnung ist, während die Amplitude $(E)_{max}$ und Periode N der Kraftänderung ganz verschiedene Grössenordnung haben.

Experiment von	Excitation durch	Amplitude der Kraft $(E)_{max}$	Schwingungszahl N	Amplitude der Kraftschwankung $\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_{max} = N.(E)_{max}$	Maximale Beschleunigung der Kraftänderung $\left(\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right)_{max} = N^2.(E)_{max}$
1. Hertz	Licht	10^{-5} C. G. S.[1])	10^{15} sec^{-1}	10^{10} C. G. S.	10^{25} C. G. S.
2. Wanka	Hertz'schen Strahl	1	10^{10}	10^{10}	10^{30}
3. Jaumann	Drahtwelle	10	10^{9}	10^{9}	10^{19}

I. Die Aufstellung.

6. *Princip der folgenden Messungen.* Es handelte sich mir darum, durch *möglichst grosse* Differenzen die Inconstanz des Entladungspotentiales deutlich zu machen.

Nun habe ich (l. c. p. 793, dann p. 803 und a. O.[2]) p. 1625) nachgewiesen, dass der Eintritt der Entladung bestimmt wird ungefähr durch das Product

$$E.\frac{\partial E}{\partial t}.$$

Fig. 1 stellt als Abscisse die Grösse der vorhandenen *Kraftschwankungen* $\partial E/\partial t$, als Ordinate die zugehörige, für die Entladung nöthige electrische Kraft E, gemessen an der Oberfläche jener Electrode, welche von den excitirenden Kraftschwankungen getroffen wird. Die Ordinate gibt auch ein Maass für das *Entladungspotential.* Diese Curve ist nach Obigem ungefähr eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten den Axen parallel sind.

Es ist sehr wahrscheinlich, dass auch durch ∞ grosse Kraftschwankungen das Entladungspotential nicht unter eine gewisse (vom Entladungsfelde abhängige) Grösse gedrückt werden

1) Nach Maxwell, Treat. 2. p. 391.

2) Jaumann, Die Glimmentladungen in Luft von normalem Druck. Diese Sitzungsber. 97. 1888.

kann. Falls man nun einen solchen Ladungsmodus wählt, dass die hierbei unvermeidlichen Kraftschwankungen sehr gross oder sehr rasch sind, so wird man keine grossen Abweichungen von diesem kleinsten Entladungspotential finden. Es trifft dies ein, wenn man, wie dies bei Funkenpotentialmessungen üblich ist, zur Ladung eine Influenzmaschine verwendet oder irgendwo nachlässige Contacte belässt, sodass in den Zuleitungen kleine Fünkchen auftreten. Hieraus mag es sich erklären, dass die Funkenpotentiale bei verschiedenen Beobachtern nicht sehr verschiedene Werthe aufweisen und dass man dieselben für constant halten konnte.

Will man *grosse Abweichungen* von diesem Grenzwerthe

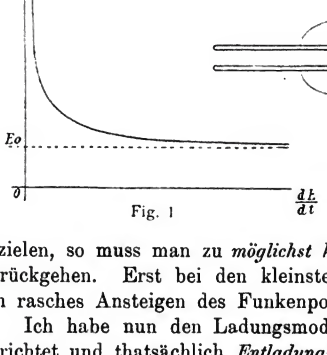


Fig. 1

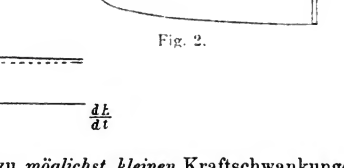


Fig. 2.

erzielen, so muss man zu *möglichst kleinen* Kraftschwankungen zurückgehen. Erst bei den kleinsten Werthen derselben ist ein rasches Ansteigen des Funkenpotentials zu hoffen.

Ich habe nun den Ladungsmodus dementsprechend eingerichtet und thatsächlich *Entladungspotentiale erhalten, welche bis 400 Proc. grösser sind als die gewöhnlichen.* Es bestätigt dieser Erfolg, dass der Zusammenhang zwischen Entladungspotential und Kraftschwankungen thatsächlich der Fig. 1 entspricht.

7. *Der Ladungsmodus.* Eine Entladung unter *möglichstem Ausschluss excitirender Kraftschwankungen* kann man in folgenden zwei Weisen bewirken.

Ein Condensatorplattenpaar C_1 C_2 (Fig. 2 und 3) ist unter Vermeidung aller Contactfehler mit der Funkenstrecke E_1 E_2

verbunden. Man ladet den Condensator durch Auflegen von Zuleitungsdrähten (A_1 A_2 Fig. 3) auf ein niedrigeres Potential als zur Entladung bei E hinreicht und entfernt dann die Zuleitungsdrähte völlig. Man erzeugt nun den Funken:

1. durch Näherung der Electroden E. Hierbei zeigt sich, dass der erzielte Funke auffallend klein ist für die Potentialdifferenz, welche die Platten haben;

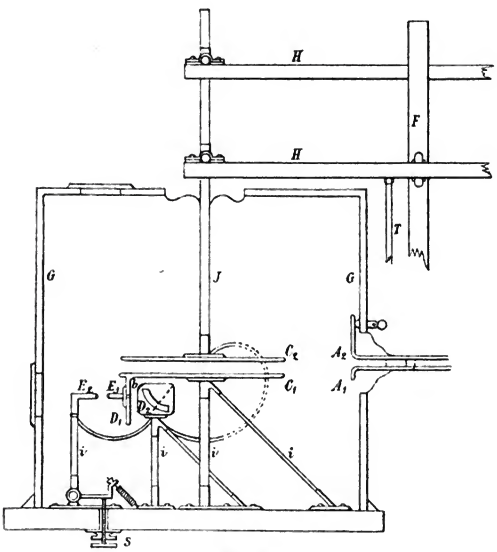


Fig. 3.

2. durch Entfernung der Platten C_1 C_2 von einander. Hierbei zeigt sich, dass die erreichte Potentialdifferenz auffallend hoch ist für die Distanz, welche die Electroden haben.

Diese einfache Aufstellung ist deshalb bisher nicht zu Messungen herangezogen worden, weil sie thatsächlich im Gebrauch viel umständlicher ist als das übliche Laden mit Hülfe einer Influenzmaschine unter Zuschaltung des Electrometers und einer grossen Leydnerflasche.

8. *Beschreibung der Aufstellung.* Die beiden Condensatorplatten C_1 C_2 (Fig. 3), die beiden Funkenelectroden E_1 E_2 und die beiden Electroden D_1 D_1 eines Electroskopes sind unter einander ohne Contactfehler verbunden, sodass C_1 D_1 E_1 einen Körper bilden und C_2 D_2 E_2 durch Drähte verbunden sind, von welchen der strichlirte Draht D_2 C_2 weit ausserhalb der Zeichnungsebene zu denken ist. Die isolirenden Stützen i und J bestehen aus sorgfältig schellackirtem böhmischem Glas. [1])

Das Ganze steht in einem cubischen Holzkasten G, welcher die nöthigen Spiegelglasfenster und Oeffnungen hat und in welchen die beweglichen Theile J und A_1 A_2 mittels Trichtern aus Kautschukmembran eintreten. Die Luft im Innern des Kastens wird staubfrei und mit Schwefelsäure trocken gehalten.

Die Entfernung der *Electroden* von einander kann mittels der Schraube S von 0—15 mm geändert und gemessen werden. Die Electroden endigen in feingearbeiteten Kugelflächen aus Platin von 0,5, 2,5 oder 20 mm Radius.

9. Das *Electroskop* besteht aus einem cubischen Schutzkasten D_2 aus Messing, welcher *links und oben* offen ist und der quadratischen Platte D_1 gegenübersteht. An Stelle der fortfallenden Würfelkante bleibt jedoch eine *Brücke b* von ca. 1 cm Breite stehen.

Die vordere und hintere Fläche des Schutzkastens trägt kreisförmige Einschnitte, zwischen welchen man die *Nadel* des Electroskops spielen sieht. Diese besteht aus einem harten Messingband von 1 mm Breite, 0,04 mm Dicke und 60 mm Länge, welches in die Mitte der rechten oberen Kante des Schutzkastens so gelöthet ist, dass es in der Ruhelage einem Winkel von 25° mit der Verticalen einschliesst.

Die Nadel spielt unmittelbar auf einer Kreisscale, welche

1) Die Condensatorplatten C_1 C_2 haben 18 cm Radius, ihre Entfernung kann von 0 auf 15 cm geändert werden. Es geschieht dies mittels des Hebelparallelogramms H H von 2 m horizontaler Länge, welches jenseits seiner Stützpunkte rechts ausäquilibrirt ist, durch zwei Kautschukrollen bei F geführt wird und vom Beobachter mit Hülfe des Stabes T entweder aus freier Hand oder mittels eines Triebes gehoben und gesenkt werden kann. Es ermöglicht dies eine sehr leichte und feine Parallelverschiebung der Platte C_2.

das *reelle Bild* einer in 3 mm Entfernung hinter dem Electroskop aufgestellten, auf Papier gezeichneten Kreisscala ist. Dieses Bild wird mittels einer guten Linse, welche 1 m hinter dem Electroskop aufgestellt ist, in den Schutzkasten desselben geworfen. Die Ablesung erfolgt mittels eines 1 m vor dem Elektroskop aufgestellten *Fernrohres.*

Dieses Electroskop erfüllte die Anforderungen, welche die Messungen stellten. Es ist verlässlicher als Electroskope mit isolirter Nadel, hat keine Contact- und Isolationsfehler, wie sie bei vollkommeneren Electrometern unvermeidlich sind, ist von günstiger Gleichung und im Gebrauch sehr bequem. Es hat sehr raschen Ausschlag und kommt fast momentan zur Ruhe.

Seine Genauigkeit ist nicht gross, aber für den angestrebten Zweck weitaus ausreichend.

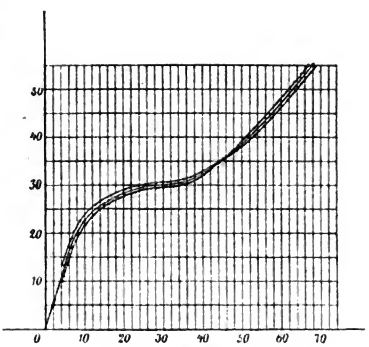


Fig. 4.

10. *Die Graduirung des Electroskops* erfolgte öfters mit Hülfe meines *absoluten Electrometers mit Kuppelsuspension.*[1]) Folgende Tabelle und Fig. 4 stellen die Gleichung des Electroskops dar. Die meisten Electroskope werden bei grossen Ausschlägen labil. Zufolge der *Brücke b*, in deren electrostatischen Schutz die Nadel bei grösseren Ausschlägen kommt, tritt an Stelle des Labilitätsmaximums ein Wendepunkt, in welchem man eine Stelle *sehr grosser Empfindlichkeit* zur Verfügung hat, während der Ausschlag darüber hinaus stabil und von geringer Empfindlichkeit ist, sodass der *Umfang der Messung ein grosser ist.*

1) G. Jaumann, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. in Wien, **101.** 1892.

Ausschlag in Kreistheilstrichen	Potentialdifferenz in C. G. S.	Ausschlag in Kreistheilstrichen	Potentialdifferenz in C. G. S.
1	1,8	40	32,8
5	13,4	50	38,1
10	22,3	60	47,4
20	28,6	65	52,3
30	30,0		

Das Instrument gestattet Potentialmessungen zwischen 5 und 60 C. G. S. Die Empfindlichkeit beträgt im Mittel unge-

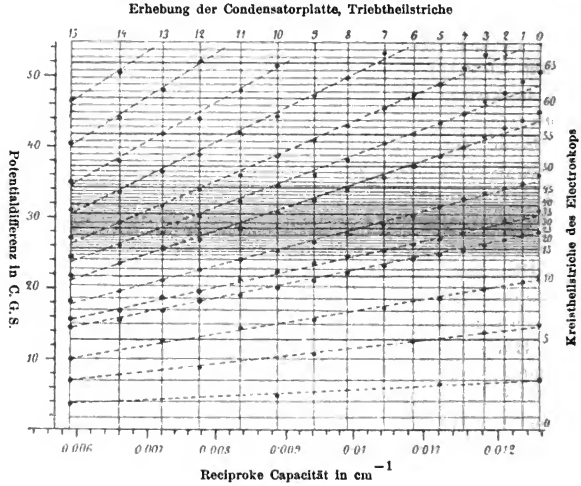


Fig. 5.

fähr 1° Ausschlag für 1 C. G. S., an der empfindlichen Stelle zwischen 28,6 und 30,0 C. G. S.) aber 10° Ausschlag für 1 C. G. S.

Die *Genauigkeit* des Electroskops beträgt für gewöhnlich 1 Proc., jedoch kommen ausnahmsweise Fehler bis zu 4 Proc. vor. Grössere Fehler habe ich niemals beobachtet. Fehler von dieser Grössenordnung sind für das Folgende gleichgültig.

11. *Potentialerhöhung durch Hebung der Condensatorplatte* C_2. Die in Fig. 5 dargestellten Messungen, welche ganz flüchtig

und an verschiedenen Tagen gemacht worden sind, geben ein gutes Bild von der Wirksamkeit der Aufstellung und zeigen, dass ich mich über alle Nebeneigenschaften derselben wohl unterrichtet habe.

Die Isolation ist eine so vortreffliche, dass ein Ladungsverlust auch bei den höheren Potentialen erst nach Stunden bemerkbar wird. Zufolge dessen ordnen sich die Electroskopablesungen bei gegebener Ladung ganz eindeutig den Stellungen der Platte C_2 (an der Theilung des Triebes abzulesen, welcher die Stange T bewegt) zu.

II. Nachwirkung des Funkens. Erholung der Funkenstrecke.

12. *Veränderung der Funkenstrecke durch den Funken.* Es wäre leicht für alles Folgende glatte Gesetzmässigkeiten zu erhalten, wenn die Funken nicht die Funkenstrecke *verändern* würden. Die *Nachwirkung aller vorangegangenen Funken überdecken und verlöschen sich*, sodass der Ausfall der Messungen desto unregelmässiger wird, je länger man eine Messungsreihe fortsetzt.

Man schreibt die Veränderung der Funkenstrecke durch den Funken der *Corrosion der Electroden* zu, jedoch nicht mit Recht.

Die Nachwirkung der Funken besteht kurz gesagt darin, dass sich die Hyperbel Fig. 1 *mehr* oder *weniger* an ihre Asymptoten anschmiegt.

Im { ersten / zweiten } Falle werden die Funkenpotentiale cet. par. { kleiner / grösser } und auch die Empfindlichkeit für Unterschiede der Kraftschwankungen wird { kleiner / grösser }. Das ist, was im Folgenden eine { *verdorbene* / *gute* } Funkenstrecke genannt werden soll.

13. *Ungünstige Nachwirkung der Funken.* Mehrere *kräftige* oder unter *starker Kraftschwankung* erfolgende Funken *verderben* die Funkenstrecke umso *rascher, je kleiner* sie ist. Als auffallendes Beispiel folgende Messungsreihe.

Beob. Nr.	Funkenpotential (starke Kraftschwankungen	
65	28,3 C. G. S.	Funkenlänge 0,8 mm
66	25,6	E_1 +, Radius 0,5 mm
67	29,0	E_2 −, Radius 2,5 mm
68	7,4	
69	13,4	
73	7,4	
76	6,5	

14. *Günstige Nachwirkung der Funken.* Weniger deutlich, aber doch oft merkbar ist eine günstige Nachwirkung der Funken. Schwache, bei *kleinen Kraftschwankungen* erfolgende Funken *verbessern* manchmal die Funkenstrecke. Diese Verbesserung ist besonders deutlich bei frisch polirten Electroden. Diese sind *schlechter* als solche, mit welchen bereits eine Zeit vorsichtig gearbeitet wurde.

Beob. Nr.	Funkenpotential C. G. S. (ruhige Ladung)	
41	26,75	Funkenlänge 0,8 mm
42	26,95	
43	27,3	E_1 +, $r_1 = 0{,}5$
44	27,85	E_1 −, $r_2 = 2{,}5$
45	28,1	
46	28,3	
	Ein Funke bei unvorsichtiger Ladung	
47	26,8	
48	26,85	

Beob. Nr.	Funkenpotential C. G. S. (ruhige Ladung)	
420	21,9	Frisch polirte Electrode
421	24,5	
425	26,6	Funkenlänge 1.8 mm
427	26,2	E_1 +, $r_1 = 20$
428	46,4	E_2 −, $r_2 = 20$
429	53,0	
432	36,8	
434	35,6	

Man merkt die günstige Nachwirkung der Funken zu Anfang der meisten Messungsreihen.

15. *Erholung der Funkenstrecke.* Eine verdorbene Funkenstrecke *erholt sich von selbst* im Laufe einiger Stunden, oft schon einer halben Stunde von der Nachwirkung der Funken.

Die Nachwirkung rührt also nicht von der Corrosion her. Um auch zu zeigen, dass die Nachwirkung nicht von in der Luft schwebendem Metallstaub herrührt, habe ich einen starken

Strom staubfreier trockener Luft zwischen den Electroden durchgeleitet. Dies beschleunigt die Erholung nicht merklich.

Beob. Nr.	Funkenpotential C. G. S. (starke Kraftschwankungen)	
132	13,4	Funkenlänge 0,8 mm E_1+, $r_1=0,5$ E_2-, $r_2=2,5$
Erholung über Nacht		
133	29,9	
134	30,0	
135	17,6	
136	13,4	
137	13,4	

Beob. Nr.	Funkenpotential C. G. S. (starke Kraftschwankungen)	
147	13,4	Funkenlänge 0,8 mm E_1+, $r_1=0,5$ $E_2=$, $r_2=2,5$
149	15,6	
30 Minuten Erholung		
152	37,5	
154	25,6	
155	19,2	
156	13,4	
157	13,4	

16. *Vergleich mit der Hertz'schen Lichtwirkung.* Wenn eine solche Vorstellung befriedigt, so mag man an eine Oberflächenveränderung denken, welche sowohl bei ganz frisch polirten, als bei stark gebrauchten Electroden vorhanden ist, welche sich bei der Erholung von selbst ausgleicht und die Nachwirkung der Funken bedingt. Ich stimme einer solchen Erklärung nicht zu.

Keinesfalls aber darf man deshalb, weil die Empfindlichkeit gegen Kraftschwankungen von der Nachwirkung der Funken abhängt, die Kraftschwankungswirkung selbst trivial erklären. Schon der in Abschnitt 4 erwähnte Zusammenhang der Kraftschwankungswirkung mit der Hertz'schen Lichtwirkung muss beide vor einer Trivialerklärung schützen. [1])

Die Lichtwirkung hängt in ungefähr derselben Weise von der Nachwirkung des Funkens ab, wie die Kraftschwankungswirkung. Verdorbene Funkenstrecken zeigen eine kleinere Empfindlichkeit für das Licht.

---

1) Trivialerklärungen bilden meiner Meinung nach, Risico und Gewinn verglichen, immer einen methodischen Fehler. Man hat vielfach die Hertz'sche Lichtwirkung durch ein Zerstäuben der Electroden durch das Licht „erklärt".

III. Hohe Funkenpotentiale bei ruhiger Ladung.

17. *Verschiedene Ladungsarten unter starken Kraftschwankungen.* Es war anfänglich meine Absicht, das Entladungsgesetz

$$E \cdot \frac{\partial E}{\partial t} = \text{const.}$$

durch absolute Messungen sicherzustellen. Man ladet das System CDE (Abschnitt 8) nicht direct mit der Influenzmaschine, sondern durch Ausladen einer kleinen gemessenen Capacität in den Condensator $C_1 C_2$. Dies gibt eine Kraftschwankung von angebbarer Grösse in der Funkenstrecke.

Man kann in dieser Weise die Ladung bis eben über das Funkenpotential auf einmal oder in mehreren Absätzen herstellen. In je kleineren Sprüngen man die Ladung besorgt, desto grösser soll cet. par. das Funkenpotential sein.

Diese Messungen gaben jedoch der Nachwirkung und der im folgenden Capitel zu beschreibenden Verspätung der Funken wegen kein regelmässiges Resultat. Nur ausnahmsweise ergaben sich bei besonders gutem Zustand der Funkenstrecke bei Abwechslung der Ladungsart entsprechende Aenderungen des Funkenpotentials, welche der Aenderung der Kraftschwankungen zuzuschreiben sind, wie in folgender Reihe:

Beob. Nr.	Funkenpotential in C. G. S. bei Ladung			
	in einem Absatz	in mehreren Absätzen	mit Influenzmaschine	
256		29,0		Funkenlänge 2,0 mm
257	28,3			E_1+, $r_1=0{,}5$
258			25,2	E_2-, $r_2=2{,}5$
259		29,8		
260	20,9			
261			18,5	
262		30,3		
263	25,6			
264			24,8	

18. *Entladung durch Näherung der Electroden.* Im Gegensatze zu der Unregelmässigkeit der Funkenpotentiale bei Ladung unter verschiedenen, aber immer starken Kraftschwankungen ist der Unterschied der Funkenpotentiale bei starken

Kraftschwankungen und bei völliger Vermeidung derselben unter allen Umständen unverkennbar.

Das System CDE (Abschnitt 8) wurde auf 37,2 C. G. S. geladen und dann die Zuleitungen $A_1 A_2$ entfernt. Nun wurden mittels der Schraube S die Electroden $E_1 E_2$ einander genähert, und es wurde constatirt, dass bei 1,2 mm Funkendistanz eben noch kein Funken zu Stande kam.

Diese Funkendistanz wurde beibehalten, das System ausgeladen und nun mittels der Influenzmaschine [1]) geladen. So wurde der starken und zahlreichen Kraftschwankungen wegen der Funke schon bei viel niedrigeren Potentialdifferenzen erhalten.

Beob. Nr.	Funkenpotential		Funkenlänge	
	Näherung der Electroden	Influenzmaschine		
107	37,2		1,2 mm	E_1+, $r_1=0,5$
108		20,4		E_2-, $r_2=2,5$
109		18,6		
126	36,8		0,8 „	
127		22,3		
128		13,4		
129		11,0		
130	38,1		0,8 „	
131		15,5		
132		13,4		

19. *Entladung durch Hebung der Condensatorplatte C_2.* Es wurde verglichen das Funkenpotential, welches durch Ladung mittels Influenzmaschine zu erhalten war, und jenes, welches sich bei Potentialerhöhung durch Hebung von C_2 ergiebt.

Man macht die Capacität $C_1 C_2$ möglichst gross, ladet

1) Es ist unvortheilhaft, die Ladung direct durch die Influenzmaschine zu besorgen. Sie erfolgt dann zu rasch, als dass man das Electroskop ablesen könnte, während bei Nebenschaltung einer Batterie der Funke die Electroden ruinirt. Man verfährt folgendermaassen: Der Hauptstrom der Influenzmaschine fliesst durch eine nebengeschaltete Büschelentladungsstrecke (+Spitze und −Platte), die Maschine wird gleichmässig gedreht, der Potentialanstieg, also die Ladung von $C_1 C_2$ wird durch langsames Entfernen der Spitze von der Platte bewirkt. In die Zuleitungen $A_1 A_2$ ist ein kleines Fünkchen eingeschaltet.

niedrig, entfernt die Zuleitungen A_1 A_2 und wartet 10 Secunden, bevor man die Platte hebt. Das Heben erfolgt in ungefähr 5 Secunden, in derselben Zeit, in welcher man die Ladung mit der Influenzmaschine bewirkt.

Beob. Nr.	Funkenpotential C. G. S. bei Ladung mittels		
	Hebung von C_2	Influenz-maschine	
Zwei Stunden Erholung			Funkenlänge 0,8 mm E_1+, $r_1=0,5$ E_2-, $r_2=2,5$
138		17,6	
139	39,9		
140	51,4		
141		22,3	
142		20,9	
143	34,1		
144		17,6	
145		15,5	
146	24,8		
147		13,4	
147	20,9		Funkenstrecke schon verdorben
149		15,5	
150		13,4	
30 Minuten Erholung			
152		37,5	Erholt, aber sogleich wieder verdorben
153	32,5		
154		25,6	
155		19,2	
156		13,4	
157		13,4	

Bei längeren Funkenstrecken ist die Empfindlichkeit für Kraftschwankungen nicht so gross, aber die Funkenstrecke verdirbt auch nicht so leicht, wie folgende Reihe zeigt:

Beob. Nr.	Funkenpotential in C. G. S.		
	Hebung	Influenz-maschine	
118		38,1	Funkenlänge 3 mm E_1+, $r_1=0,5$ E_2-, $r_2=2,5$
119		38,1	
120	43,3		
121		38,1	
122	52,3		
123		38,4	
124	40,5		
125		38,1	

20. *Vergleich mit dem Siede- und Gefrierverzug.* Es ist (von praktischen Gesichtspunkten abgesehen) noch unrichtiger, einer gegebenen Funkenstrecke ein bestimmtes Funkenpotential zuzuschreiben, als reinem Wasser bei normalem Barometerstand eine bestimmte Siede- und Gefriertemperatur zuzuschreiben.

Je reiner man die Aufstellung macht, um { die Siede- und / das Funken- } Gefriertemperatur / potential } zu bestimmen, umso *weniger* erhält man constante Werthe. Um grosse Abweichungen von den gewöhnlichen Werthen zu erhalten, muss man die kleinsten { Eiskrystalle oder Dampfblasen / Kraftschwankungen } vermeiden. Nur wenn diese in sehr grosser Menge vorhanden sind, erhält man jene Grenzwerthe, welche man *gewöhnliche* { Siede- und Gefriertemperatur / Funkenpotentiale } nennt. Es ist deshalb eine unzulässige Abstraction, sich vorzustellen, dass der Eintritt solcher katastrophischer Vorgänge stattfindet, weil eine bestimmte Temperatur, Potentialdifferenz etc. vorhanden ist.

Die Untersuchung der wahren Bedingungen der electrischen Entladung ist durch die Kenntniss der bestimmt zu fassenden Kraftschwankungswirkung und die sogleich zu beschreibende Verspätung jener über die Bedingungen der Aggregationsänderung, Krystallisation, des Zerreissens etc. voraus.

IV. Verspätung der Entladung.

21. *Abwarten des Funkens.* Wenn etwas an den Entladungsbedingungen fehlt, so hindert dies nur die sofortige Entladung; nach einigem *Abwarten* ohne Verbesserung der Entladungsbedingungen kann die Entladung noch erfolgen.

Eine Wartezeit von einigen Minuten kann einen Mangel an Potentialdifferenz von 20 C. G. S. ersetzen. Eine Entladung, welche bei ruhiger Ladung bei 50 C. G. S. *sogleich* stattfindet, geht bei gleicher ruhiger Ladung auch bei 30 C. G. S. vor sich, aber erst nach mehreren Minuten ruhigen Wartens. Es gibt aber eine untere Grenze der Potentialdifferenz für den gegebenen Zustand der Funkenstrecke, unterhalb welcher die

Entladung auch nach stundenlangem Warten nicht mehr eintritt (bei dem gewählten Beispiele wäre ungefähr 29,8 C. G. S. diese Grenze).

Der Condensator $C_1\,C_2$ wurde niedrig geladen, dann isolirt ($A_1\,A_2$ entfernt), 10 Secunden gewartet und dann die Potentialdifferenz durch Hebung der Platte C_2 bis auf die in folgender Tabelle angegebenen Werthe vergrössert und dann das System solange ruhig stehen gelassen, bis der Funke eintrat.

Die Angabe 0 Secunden für die Verspätung bedeutet, dass die Hebung der Condensatorplatte solange fortgesetzt wurde, bis der Funke eintrat. Das zugehörige Funkenpotential entspricht also nicht der Verspätung 0 Secunden, weil das Heben der Platte C_2 selbst 5 Secunden in Anspruch nimmt.

Die sämmtlichen angegebenen Verspätungen müssten etwa um 2,5 Secungen vergrössert werden.

Beob. Nr.	Funkenpotential in C. G. S.	Verspätung	
239	47,4	0 Sec.	Funkenlänge 3 mm
240	28,2	140	E_1+, $r_1=0{,}5$
241	47,4	0	E_2-, $r_2=2{,}5$
242	33,4	55	
243	45,6	0	
244	28,7	115	
245	40,7	0	
246	29,5	78	
247	38,1	0	
248	32,1	5	Funkenstrecke verdorben
249	29,8	2	
250	41,7	0	
251	33,9	17	

Die Verschlechterung der Funkenstrecke nach heftigeren Funken und die Erholung nach längerem Nichtgebrauch ist bei diesen Experimenten ebenfalls sehr deutlich. Eine verdorbene Funkenstrecke gibt unregelmässige und zu kleine Verspätungen. Eine völlig verdorbene Funkenstrecke gibt überhaupt keine deutliche Verspätung.

22. *Abwesenheit von vorhergehenden Entladungen während der Verspätung.* Man erhält diese Verspätung ganz ohne besondere Aufstellung nicht selten, wenn man eine Leydnerflasche durch einen Auslader nicht völlig schliesst und so

einige Secunden wartet. [1]) Es ist dies bis jetzt nicht so sehr aufgefallen, weil dabei immer Büschelentladungen in der Funkenstrecke vorausgehen, sodass man annehmen konnte, dass diese Büschelentladungen durch Erhitzen der Luft erst dem Funken den Weg bereiten, womit für die Trivialerklärung gesorgt war.

Bei meiner feineren Aufstellung erkennt man jedoch sofort die Unhaltbarkeit einer solchen Erklärung.

Während der Verspätung findet niemals irgend welche Entladung statt, sodass der Funke nach Ablauf der Verspätungszeit *ganz unvermittelt* erscheint.

Die Isolation ist eine vortreffliche, sodass vor dem Funken das Electroskop ganz ruhig einsteht. Es ist auch nicht das geringste Zucken der Electroskopnadel bis zum Eintritt des Funkens, welcher ganz auslädt, bemerkbar. Man kann gewiss sein, dass während der Verspätung nicht 0,2 C. G. S. an Electricitätsmenge sich ausgleichen. Diese Entladung würde man schon an einer Bewegung der Electroskopnadel um $^1/_{10}{}^0$ bemerken, und sie wäre übrigens auch gar nicht im Stande, die Funkenstrecke nennenswerth zu erhitzen.

23. *Stabilität während der Verspätung.* Man muss zunächst vermuthen, dass die Verspätung dadurch ein Ende findet, dass der Funke durch eine zufällige minimale äussere Veranlassung eintritt, denn eine ausgiebige äussere Veranlassung ist doch nicht erfindlich, und so sollte man den Zustand der Funkenstrecke für einen völlig *labilen* halten und vermuthen, dass der geringste absichtlich eingeführte Reiz den Funken auslösen müsste.

Ich hatte die Hoffnung so eine Aufstellung gewonnen zu haben, welche äusserst empfindlich auf Kraftschwankungen und auf Licht reagirt, sah mich aber hierin völlig enttäuscht. Die Aufstellung ist sehr geeignet, die Kraftschwankungs- und Licktwirkung *einwurfsfrei* zu zeigen, aber sie ist auch sehr *wenig empfindlich* hierfür. Es gehören sehr starke Kraftschwankungen oder Beleuchtungen dazu, um den Funken auszulösen.

---

1) Prof. Mach beobachtete vor Jahren die gleiche Erscheinung bei einem Funken in Terpentinöl.

Eine schwächere Kraftschwankung oder Beleuchtung veranlasst nicht selten eine *theilweise Entladung*, wobei die Nadel um $2-3^0$ zurückzuckt, wonach die Verspätung weiter stattfindet und ihrerzeit ohne weiteren Anreiz in dem Funken endigt. Auch diese theilweise Entladung wird von der Funkenstrecke vertragen, ohne dass die Verspätung aufgehoben wird. Es ergänzt dies den Gegenbeweis des Abschnittes 22.

Der Zustand der Funkenstrecke während der ganzen Verspätungszeit mit Ausnahme der letzten Secunden ist also ein *sehr stabiler*, was auch nicht wundern kann, wenn man bedenkt, dass die Potentialdifferenz dabei um 20 C. G. S. niedriger sein kann als jene, welche cet. par. den Funken sofort bewirkt.

24. *Vorprocess der Funkenentladung.* Die Verspätung wird nicht durch eine äussere zufällige Veranlassung aufgehoben, es lässt sich keine solche denken, welche stark genug wäre, um die nachgewiesene Stabilität aufzuheben.

Der Widerspruch dieser Stabilität und des freiwilligen Eintrittes des Funkens nach Ablauf der Verspätung führt zu einem fremdartigen, aber sicheren Schluss: Die Funkenstrecke muss *von selbst gegen Ende der Verspätungszeit aus dem stabilen Zustande heraustreten und in einen labilen übergehen.*

Dies besagt Folgendes: *Während der Verspätungszeit findet ein specifischer Vorprocess in der Funkenstrecke statt*, welcher nach Abschnitt 22 selbst keine Entladung ist, jedoch die Funkenstrecke in einer angebbaren, vergleichsweise grossen Zeit zur Entladung geeignet macht.

Dieser *Vorprocess* darf nicht trivial erklärt werden, denn er hängt in besonderer Weise mit der Kraftschwankungswirkung und mit der Nachwirkung der Funken zusammen.

25. *Unterschied zwischen Verzug und Verspätung.* Die Verspätung der Entladung, weil sie von selbst ein Ende findet, macht auf den ersten Blick den Eindruck einer Erscheinung, welche dem Siedeverzug analog ist. Dies ist jedoch nicht der Fall, sondern die dem Siedeverzug analoge Erscheinung ist eher die in Abschnitt 19 beschriebene Ueberhöhung des Funkenpotentials bei ruhiger Ladung.

Bei dieser Ueberhöhung fehlt als Entladungsbedingung nur eine kleine Kraftschwankung, der Zustand ist daher *labil.*

Die Verspätung hingegen findet bei weitaus niedrigerer Potentialdifferenz und gleicher Ruhe der Ladung statt, der Zustand ist dabei *stabil.* Das Analogon hierzu wäre es, wenn das Sieden um einige Grade *unter* der normalen Temperatur mit einer Verspätung eintreten würde.

26. *Einflusslosigkeit einiger Umstände.* Die Verspätung ist bei der Entladung in Oel, Terpentin, Schwefelkohlenstoff ebenso zu erhalten wie in Luft.

Man macht mir den Einwurf, dass die Verspätung aufgehoben werden könnte durch leitende Staubkörnchen, welche zufällig in die Funkenstrecke kommen. Das Experiment gelingt jedoch in staubfreier Luft eher besser, als in staubhaltiger. Ich habe noch eigens bei einigen Versuchen die Electroden mit einem Mantel umgeben, durch welchen mit Baumwolle und Glycerin staubfrei gemachte Luft geblasen wurde und die Verspätung völlig in gleicher Weise erhalten. Man kann auch während der Verspätung sehr staubhaltige Luft in diesen Mantel blasen, ohne hierdurch die Verspätung vorzeitig aufzuheben.

Wie unempfindlich die Funkenstrecke während der Verspätung für kleine Veränderungen der Luft oder der Electrodenflächen ist, erkennt man auch daran, dass man mittels eines Glasrohres aus dem Mund feuchte Luft zwischen die Electroden blasen kann, sodass sie sich mit Thau beschlagen, ohne die Verspätung aufzuheben.

Beob. Nr.	Funkenpotential in C. G. S	Verspätung	
319	21,5	120 Sec.	Funkenlänge 2 mm
326	25,8	20	E_1+, $r=20$
			E_2-, $r=20$
Erholung über Nacht			
329	45,4	1 Sec.	
330	54,0	0	
333	35,6	20	feuchte Luft und Thau
335	38,9	15	

Beob. Nr. 333 und 335 wurden so angestellt, dass während der ersten zehn Verspätungssecunden feuchte Luft ein-

geblasen wurde. Nach der zehnten Secunde wurde damit eingehalten, der Thau verschwand sogleich, und einige Secunden später kam der Funke.

Dass die Verspätung der Entladung nicht das Abwarten zufällig eintretender günstigerer Umstände ist, sondern der Ablauf eines Vorprocesses, erkennt man sehr schön auch daran, dass nach beendigtem Vorprocess eine Senkung des Potentials die Entladung nicht hindert, wie folgende zwei gelegentlichen Beobachtungen zeigen.

Beob. Nr. 295 (Funkenlänge 2 mm, $E_1+0{,}5$; $E_2-2{,}5$). Das Potential wurde bis 48,5 C. G. S. gehoben und 15 Secunden gewartet, ohne dass ein Funken kam, dann wurde es rasch bis 28,3 C. G. S. gesenkt und nach 5 Secunden kam der Funke.

Beob. Nr. 430. (Funkenlänge 2,8, E_1+20, E_2-20.) Das Potential wurde bis 53,0 gehoben, 15 Secunden gewartet, ohne dass ein Funke kam, dann rasch bis 45,4 gesenkt, und nach 1 Secunde kam der Funke.

27. *Gesetzmässigkeit der Verspätung.* Die Verspätung hat keine zufällige, sondern eine *gesetzmässige Dauer*, welche von der Höhe der Potentialdifferenz und dem Zustande der Funkenstrecke abhängt.

Letztere Bedingung erschwert allerdings diesbezügliche Messungen. Zu Anfang derselben, bei erholter Funkenstrecke, ist der Ausfall gewöhnlich regelmässig, später aber werden die Verspätungen unregelmässig und zu klein.

Immerhin ist bei einiger Kenntniss des Zustandes der Funkenstrecke eine Voraussagung der Verspätung bis auf 50 Proc. ihres Betrages unter allen Umständen möglich.

Die folgende Reihe gibt ein typisches Beispiel für derartige Messungen, von welchen ich viele angestellt habe. Sie beginnt mit einer Verspätung von $4^1/_2$ Min. Dass ich die Geduld hatte so lange zu warten kam daher, dass ich sicher voraussagen konnte, der Funke müsse eintreten, und zwar nach sehr langer Verspätung. Ich hatte tags zuvor bei erholtem Zustande derselben Funkenstrecke den Funken bei 32,5 C. G. S. nach 150 Secunden Verspätung erhalten.

Beob. Nr.	Potentialdifferenz C. G. S.	Verspätung	
	Ueber Nacht erholt		Funkenlänge 2 mm E_1+, $r_1=0{,}5$ E_2-, $r_2=2{,}5$
365	33,4	260 Sec.	
366	36,5	25	
367	34,1	100	
368	42,0	3	
369	34,6	80	
370	33,2	10	Funkenstrecke verdorben
371	37,5	20	30 Minuten Erholung
372	34,4	8	verdorben
373	34,1	25	
374	35,0	45	30 Minuten Erholung
375	34,4	50	
376	33,0	70	
377	37,6	20	
378	40,4	12	
379	46,4	1	
380	36,8	22	
381	35,1	0,1	excitirt
382	37,2	15	
383	40,4	20	
384	34,8	35	
385	35,1	35	
386	34,1	25	verdorben
387	34,1	30	
388	33,6	1	excitirt
389	36,8	40	30 Minuten
390	35,7	30	
391	36,2	40	
392	34,6	0,1	excitirt
393	33,1	110	
394	39,9	5	
395	43,3	10	
396	34,9	2	
397	34,6	2	
398	34,1	38	verdorben
399	34,4	15	
400	35,6	10	
401	35,1	30	30 Minuten Erholung
402	36,6	65	
403	38,4	25	
404	37,1	10	
405	36,8	25	
406	37,0	35	
407	38,8	8	

Fig. 6 stellt diese Beobachtungen dar. Die Verspätungen Beob. Nr. 370, 372, 373, 386—88, 396—400 wurden nicht eingetragen. Es war bereits während der Beobachtungen klar,

dass dabei die Funkenstrecke verdorben war, und es wurde ihr auch immer darauf Zeit zur Erholung gelassen. Ferner wurden auch die Beob. Nr. 381, 388 und 392 nicht eingetragen, weil sie durch zufällige starke Kraftschwankungen excitirt wurden.

Die Beobachtungen 392—407 wurden nur durch schwache Punkte markirt.

Die ersten Beobachtungen Nr. 365—369 und 371—380 fügen sich jedoch in zwei glatte Curven.

Es ist nicht zu verkennen, das die Verspätung *vollkommen*

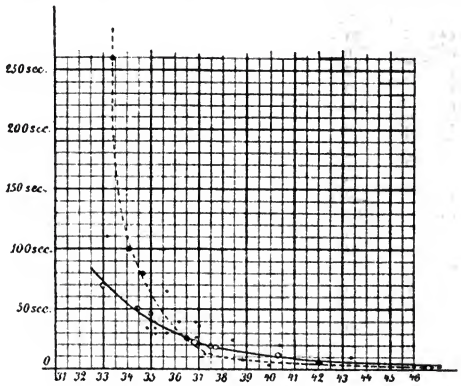


Fig. 6.

gesetzmässig verläuft, also nicht durch Zufälligkeiten beendigt wird. Gleichzeitig erkennt man aber auch den starken Zusammenhang mit der *Nachwirkung der Funken.*

Bei weiteren Untersuchungen über diese Erscheinung müssen zunächst die Bedingungen ausfindig gemacht werden, unter welchen die Funkenstrecke eine möglichst kleine Nachwirkung der Funken zeigt. Diese Funkenstrecken werden vielleicht auch grössere Verspätungen zeigen. Die kleinen Funkenstrecken, welche starke Nachwirkung zeigen, weisen nämlich kleine Verspätungen auf.

V. Verspätung der Excitation.

28. *Excitation durch Kraftschwankungen und Licht.* Während der Verspätung ist, wie schon Abschnitt 23 hervorgehoben wurde, die Funkenstrecke sehr wenig empfindlich für Kraftschwankungen und Licht, doch kann man diese Wirkungen immerhin deutlich machen. Die Excitation hat bei dieser Aufstellung ein besonderes Interesse der *Einwurfsfreiheit* des Experimentes wegen und weil sie eine Eigenschaft erkennen lässt, die sonst nicht zu beobachten ist: die Verspätung der Excitation.

Wenn man die Ladung der Funkenstrecke durch einen *Ruhmkorff* besorgt, wie dies Hertz und Wanka gethan haben, so hätte ich a priori erwartet, dass keine grosse Empfindlichkeit für Licht und Kraftschwankungen sich zeigen kann, denn der Ruhmkorff ladet ja selbst unter einer unvergleichlich höheren Kraftschwankung. Hingegen hätte ich während der *Verspätung* der Entladung, wo gar keine Kraftschwankungen gegeben sind, eine grosse Empfindlichkeit erwartet.

Es verhält sich jedoch umgekehrt. Ruhmkorfffunken reagiren noch auf das Licht eines schwachen Funkens in einigen Metern Entfernung, sie reagiren im Wanka'schen Experiment auf Hertz'sche Strahlen, welche von einem in 1 m Entfernung aufgestellten Excitator ausgehen und lassen dabei noch die Polarisationsrichtung der excitirenden Hertz'schen Strahlen erkennen.

Die Funken während der Verspätung reagiren hingegen erst auf das Licht eines kräftigen Batteriefunkens in 20 cm Entfernung und auf einen Hertz'schen Strahl, welcher von einem in 5 cm Entfernung aufgestellten kleinen Excitator ausgeht. Dieser kleinen Distanz wegen konnte der Einfluss der Polarisationsrichtung des Hertz'schen Strahls nicht aufgezeigt werden.

Es ist jedoch zu bemerken, dass die Excitation bei Ruhmkorfffunken genau rechtzeitig eintreffen muss.

Die im Folgenden zu beschreibende Verspätung der Excitation lässt die starke Wirkung der Kraftschwankungen auf einen Ruhmkorfffunken begreiflicher erscheinen.

Es soll hier auch hervorgehoben werden, dass die Excitation im Wanka'schen Experiment nicht von einer in den Metallbestandtheilen des Excitators verlaufenden Schwingung ausgeht, denn die Stellung derselben ist gleichgiltig, sondern nur von einer zwischen den Electroden des Excitators verlaufenden Schwingung. Ferner müssen die excitirende und die excitirte Funkenstrecke präcis gleich sein. Ich habe versucht den Einfluss einer Abstimmung des Exitators auf die zu excitirende Funkenstrecke nachzuweisen, jedoch vorläufig ohne deutlichen Erfolg.

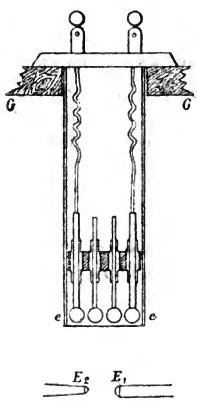


Fig. 7.

29. *Der Excitator.* Als geeignete Form des Excitators ergab sich folgende. Vier Kugeln e von 9 mm Durchmesser und je 1 mm Funkendistanz werden in eine der Funkenstrecke $E_1 E_2$ parallele Reihe in 5 cm Entfernung aufgestellt und von derselben durch einen schwarzen Glasbecher getrennt. Die Zuleitungen zu den äusseren Kugeln durchbrechen die Wand des Schutzkastens G (Fig. 7) und führen zu einem kleinen Plattencondensator. Dieser wird erst niedrig geladen, dann werden seine Platten voneinander entfernt, wobei er sich durch den Excitator auslädt.

Das Vorzeichen der Ladung dieses kleinen Condensators wurde, um einem Einwurf zu begegnen, so gewählt, dass beim Entfernen der Platten desselben durch electrostatische Induction ein kleines *Sinken* der Potentialdifferenz der Funkenstrecke $E_1 E_2$ (um ungefähr 0,1 C. G. S.) eintritt.

30. *Excitation durch Kraftschwankungen.* Die Excitation nach der im vorigen Abschnitt beschriebenen Methode löst bei richtiger Aufstellung mit Sicherheit in Verspätung befindliche Funken aus. Ich zähle dieses Experiment mit zu den einwurfsfreien Beweisen des Vorhandenseins der Kraftschwankungswirkung.

Auch zugeleitete und electrostatisch inducirte Kraftschwan-

kungen lösen den in Verspätung befindlichen Funken $E_1 E_2$ aus. Solche Kraftschwankungen treten auf, wenn man eine der Condensatorplatten $C_1 C_2$ mit einem vorher abgeleiteten Metallstück berührt, oder in der Nähe der Condensatorplatte die Entladung eines geladenen Metallstückes vornimmt.

Derartige Excitationen sind mir oft lästig geworden. Sie kommen natürlich nur bei Unvorsichtigkeiten unbeabsichtigt zu Stande und sind zu vermeiden, weil ein Funke, welcher bei sehr niedrigem Funkenpotential durch eine starke Kraftschwankung erzwungen wird, die Funkenstrecke auffallend stark verdirbt.

31. *Verspätung der Excitation.* Ich habe oftmals beobachtet, dass der verspätete Funke einige Secunden später zu Stande kam, nachdem ich scheinbar vergeblich die Excitation derselben nach einer der im vorigen Abschnitte erwähnten Methoden versucht hatte und hielt dies anfänglich für den Beweis besonderer Unempfindlichkeit.

Als aber einmal bei einem mittleren Werth der Potentialdifferenz und sehr gutem Zustande der Funkenstrecke in allen unmittelbar hintereinander vorgenommenen Experimenten der excitirte Funke *eben hörbar* (etwa 0,1 Secunden) später als der excitirende erfolge, gleichgültig in welcher Phase der Verspätung die Excitation vorgenommen wurde, konnte ich mich der Ueberzeugung nicht länger verschliessen: *dass die Excitation durch eine Kraftschwankung nicht unmittelbar den Funken, sondern einen Vorprocess desselben auslöst,* welcher in 0,1 bis mehreren Secunden abläuft.

Es ist wahrscheinlich, dass es sich dabei um denselben Vorprocess handelt, welcher überhaupt während der Verspätung des Funkens abläuft, sodass man erkennt: *Eine Kraftschwankung hebt den Vorprocess nicht auf, sondern beschleunigt nur seinen Abschluss.*

Bei einer anderen Gelegenheit, als wieder die Aufstellung gut getroffen war, und ziemlich regelmässig 60 Secunden Verspätung erhalten wurden, liess ich mich durch einen Gehülfen den Augenblick vorschreiben, in welchem die Excitation vorgenommen werden sollte. Es geschah dies willkürlich zu Anfang, in der Mitte oder gegen Ende der Verspätung. Die Excitation löst stets nach 0,1 bis 3 Secunden den Funken aus.

Die Aufstellung muss sehr genau so abgeglichen sein, dass die Excitation an der Grenze ist, wo sie überhaupt noch wirkt. Bei Vorhandensein eines halbwegs constanten Zustandes der Funkenstrecke geschieht dieser Ausgleich hauptsächlich durch Wahl der Potentialdifferenz. Es gelingt dieses Experiment aber selbstverständlich oft nicht. Die Verspätung der Excitation durch *Licht* habe ich trotz vielfacher Versuche überhaupt nicht erzielen können, die Excitation war immer entweder momentan oder gar nicht vorhanden.

Die Verspätung der Excitation durch zugeleitete und electrostatisch inducirte Kraftschwankungen ist hingegen *sehr leicht* zu erhalten. Schon unter den mitgetheilten Beobachtungen, z. B. Beob. Nr. 381, 388 und 392 in Abschn. 27 und überhaupt bei der Ladung mit Hülfe der Zuleitungen $A_1 A_2$ kam diese Excitation (als Folge der verschiedenen Umladungen, welche $A_1 A_2$ bei ihrem Hin- und Hergang erfahren) sehr oft vor, und zwar gewöhnlich mit Verspätung. Aus diesem Grunde ist auch die im Abschnitt 19 vorgeschriebene Wartezeit von 10 Secunden vor der Hebung nothwendig.

32. *Addition der Excitationswirkungen.* Aus der Verspätung der Excitation folgt, dass mehrere unmittelbar auf einander folgende Excitationen sich verstärken können. Thatsächlich lässt sich dies beobachten. Mehrere aufeinander folgende Excitatorfunken, welche einzeln zu schwach sind, lösen oft zusammen den Funken aus.

Dieses Experiment ist mir auch mit Licht gelungen. Das Licht mehrerer Funken eines Funkenstromes löst die Entladung aus, während einzelne dieser Funken (bei entsprechender Abblendung des Lichtes der übrigen) cet. par. keine Wirkung haben.

Hieraus erklärt sich auch die starke Wirkung der Kraftschwankungen, welche eine Influenzmaschine oder ein in ihren Stromkreis geschaltetes Fünkchen bewirkt. Es handelt sich nicht allein um die Grösse der Kraftschwankungen, sondern auch um ihre Zahl.

VI. Zusammenfassung.

1. Funken verändern die Funkenstrecke, und zwar kräftige Funken deutlich in ungünstigem, schwache manchmal in

günstigem Sinne. Die Funkenstrecke erholt sich von dieser Nachwirkung der Funken von selbst im Laufe einiger Stunden.

2. Bei Vermeidung der kleinsten Kraftschwankungen sind ungewöhnlich hohe Funkenpotentiale zu erhalten.

3. Bei nicht ganz erfüllten Entladungsbedingungen tritt die Entladung nach einer Verspätung von einigen Secunden bis mehreren Minuten ein. Während dieser Verspätung verläuft ein Vorprocess der Entladung, welcher selbst keine Entladung ist.

4. Während dieser Verspätung kann man einwurfsfrei die excitirende Wirkung der Kraftschwankungen nachweisen.

5. Eine mässige Kraftschwankung löst den Funken nicht momentan aus, sondern erst nach 0,1—5 Secunden. Sie beschleunigt nur den Vorprocess desselben, kürzt also seine Verspätung ab.

Die *Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen* hat das Zustandekommen dieser Arbeit unterstützt, wofür ich hiermit meinen ergebensten Dank sage.

10. *Lichtelectrische Untersuchungen an polarisirtem Lichte; von J. Elster und H. Geitel.*

Der durch Beleuchtung der Kathode in einem verdünnten Gase eingeleitete photoelectrische Strom hat sich als abhängig von der Richtung der Lichtschwingungen gegen die Kathodenfläche erwiesen, und zwar erreicht er sein Maximum, wenn die Polarisationsebene des Lichtes zur Einfallsebene normal ist, sein Minimum für die hierzu senkrechte Lage.[1])

Die weitere Verfolgung dieser Erscheinung war nach zwei Richtungen hin vorzunehmen; man kann fragen, nach welchem Gesetze der photoelectrische Strom sich ändert, wenn man die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes um den Strahl als Axe dreht, oder auch die Abhängigkeit der Intensität desselben Stromes von dem Einfallswinkel des Lichtes aufsuchen.

Wir beschränken uns hier im Wesentlichen auf die Beantwortung der ersten Frage,[2]) zu der Lösung der zweiten, die weit grössere Schwierigkeiten bietet, können wir bis jetzt nur einige Beiträge geben.

Wie wir schon früher bemerkten, wird man durch die Hindernisse, die sich der Herstellung von polarisirtem, ultraviolettem Lichte entgegenstellen, dahin geführt, als lichtelectrisch empfindliche Fläche die flüssige Kalium-Natriumlegirung in einer Atmosphäre eines verdünnten neutralen Gases zu wählen, indem hierdurch die Anwendung von Licht aus dem Bereiche des sichtbaren Spectrums ermöglicht wird. Damit ist man aber zugleich in die Nothwendigkeit versetzt, die dem Versuche unterworfenen Metallflächen in Glasrecipienten einzuschliessen. Es wäre vortheilhaft, diese so einzurichten, dass der polarisirte Lichtstrahl normal durch eine planparallele Glasplatte in sie eintritt. Man würde so jede Intensitäts-

1) J. Elster u. H. Geitel, Sitzungsber. der Berl. Akad. d. Wiss. VI. p. 134. 1894 u. Wied. Ann. 52. p. 440. 1894.

2) Ein Theil der Resultate ist schon in dem Sitzungsbericht der kgl. Akademie zu Berlin, XI. p. 209. 1895 veröffentlicht.

änderung des erregenden Lichtes, die bei schiefer Incidenz gegen die Glaswand mit der Aenderung des Azimuthes verbunden ist, von vornherein ausschliessen. Das Einsetzen solcher planparalleler „Fenster" in die Glasrecipienten erfordert aber die Anwendung eines Kittes, der so beschaffen sein muss, dass er in einem Vacuum bei Gegenwart von Alkalimetalldämpfen weder verdampft noch einen chemischen Angriff erfährt. Es ist uns nicht gelungen, ein Material zu finden, das sich dauernd bewährt hätte. Organische Substanzen, wie Harze, sind von vornherein ausgeschlossen, da sie flüchtige Stoffe enthalten, welche die Kathode mit einer gegen das Licht fast unempfindlichen Schicht überziehen, aber auch anorganische, wie Kalium- oder Natriumsilicat und die aus Phosphorsäure und Metalloxyden zusammengesetzten Kitte bewirkten mit der Zeit eine Abnahme der Lichtempfindlichkeit, vermuthlich in Folge der Erhöhung des Gasdrucks durch den aus dem Wassergehalte der Substanz durch die Alkalimetalldämpfe entwickelten Wasserstoff. Leidlich bewährte sich geschmolzene glasige Phosphorsäure, wenn man die Vorsicht gebrauchte, sofort nach dem Aufkitten der Platte die Fugen der Kittung mit geglühtem und geschlämmtem Zinkoxyd zu bestäuben und sie dann mit einer Schicht eines Gemenges von Wachs und Colophonium zu überziehen. Bei den so behandelten Apparaten sank zwar die Empfindlichkeit ebenfalls innerhalb der ersten Tage nach dem Abschmelzen von der Luftpumpe, doch näherte sie sich bald einer nicht zu tief liegenden Grenze. Wir waren daher im Stande, wenigstens einige Controlversuche an solchen Recipienten mit Planparallelfenstern anzustellen.

Die eben genannten Schwierigkeiten zwangen uns dazu, zu einfachen vor der Lampe geblasenen Glaskugeln (Zellen) zurückzukehren, bei denen das Alkalimetall und seine Dämpfe nur mit den Glaswänden und den Platinelectroden in Berührung stehen. Wir verwandten zu den meisten der im Folgenden mitgetheilten Versuche eine solche von 50 mm Durchmesser, die mit der Na-K-Legirung bis zu ihrem Mittelpunkte angefüllt war. Jeder Strahl, der die Mitte dieses Metallspiegels traf, musste daher auch die Glaswand senkrecht geschnitten haben, war also in seiner Intensität vom Azimuth

unabhängig. Den Querschnitt des Strahles wählten wir dabei so klein, als es die Lichtempfindlichkeit der Zelle zuliess.

Um Lichtstrahlen von kleinem Querschnitt und grosser Intensität zu erhalten, verwandten wir eine Projectionslampe (Skioptikon) mit einem in einer Leuchtgassauerstoffflamme glühenden Zirkonscheibchen als Lichtquelle. Nachdem diese so eingestellt war, dass das Bild des Zirkonstückes in sehr grosser Entfernung deutlich erschien, wurde der Umriss einer zwischen der Condensatorlinse und dem projicirenden Linsensysteme eingeschalteten horizontalen schlitzförmigen Blende (von etwa 3 mm Länge und 1 mm Breite) auf der Wand der Zelle entworfen. Das Skioptikon, dessen Bestandtheile unter sich und mit der Blende fest verbunden waren, konnte in einer verticalen Ebene gedreht und in jeder Lage bis zu einer Neigung von etwa 50° gegen die Horizontale festgehalten werden. Gab man ihm eine solche Stellung, dass der hell erleuchtete Lichtfleck (die Eintrittsstelle des Strahles) bei A auf der Glaswand der Zelle (Fig. 1) erschien, so liess sich auch die Austrittsstelle bei A' nach der Reflexion an M scharf erkennen. Mittels eines Zirkels griffen wir die Entfernungen AB und $A'B'$ entsprechender Ränder dieser Lichtflecke von der natürlichen horizontalen Oberfläche des flüssigen Kathodenmetalls ab und stellten das Skioptikon und die Zelle so zu einander ein, dass AB gleich $A'B'$ war. So waren wir sicher, dass der Lichtstrahl die Mitte der Kathode traf, also die Glaswand unter rechtem Winkel schnitt. Etwa 10 mm oberhalb M befand sich die Anodenspitze S, ein Platindraht (in der Figur als Punkt gezeichnet), dessen Richtung senkrecht zur Ebene $ABA'B'$ stand. Die Alkalimetallfläche muss so rein sein, dass die Stelle, wo sie vom einfallenden Licht getroffen wird, einem Auge, das nicht in der Richtung gegen den reflectirten Strahl hin blickt, durchaus unsichtbar ist.

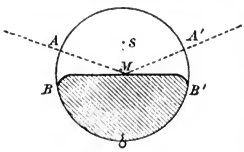


Fig. 1.

Steilere Einfallswinkel, als durch Neigung des Skioptikons erreichbar waren, stellten wir mittels eines um eine horizontale Axe drehbaren Silberspiegels (der metallischen Seite einer

mit Silber belegten Spiegelglasplatte) her, von dem wir den horizontalen Strahl nach unten reflectiren liessen.

Um den Einfallswinkel des Strahles zu der horizontalen Kathode zu bestimmen, benutzten wir ein einfaches Instrument, das auch zur Messung von Sonnenhöhen Anwendung findet. Von dem Mittelpunkte eines in halbe Grade getheilten Kreisquadranten aus Pappe hängt an einem feinen Faden ein Bleiloth herab, der Aufhängefaden spielt vor der Gradtheilung. Auf der Verlängerung des einen der den Quadranten begrenzenden Radien über den Mittelpunkt hinaus ist normal zu seiner Ebene ein Stift befestigt. Der Apparat wird so gehalten, dass der aus dem Skioptikon austretende Strahlencylinder den Schatten des Stiftes in der Richtung des Radius entwirft. Der Einfallswinkel ist dann dem Winkel zwischen dem Radius und dem Faden gleich und kann an der Theilung abgelesen werden.

Wie bei den früher mitgetheilten photoelectrischen Messungen war auch diesmal die Zelle mit dem damals beschriebenen Galvanometer in den Schliessungskreis einer Batterie von 100—400 Zink-Salmiak-Kohleelementen von etwa 450 Volt Gesammtspannung so eingeschaltet, dass die Alkalimetallfläche Kathode war. Die Intensität des photoelectrischen Stromes wurde vermittels Spiegels und Scala abgelesen; es ist wohl kaum nöthig, zu bemerken, dass die Zelle vor den Strahlen der zur Beleuchtung der Scala dienenden Lampe geschützt war, und dass auch aus dem Skioptikon kein störendes Nebenlicht zu ihr dringen konnte.

Unmittelbar vor der Zelle wurde das mit einem Theilkreise versehene, in horizontaler und verticaler Ebene drehbare grosse Nicol'sche Prisma aufgestellt, das uns Hr. Geheimrath Weber in Braunschweig freundlichst geliehen hatte. Der Querschnitt des Lichtstrahles war durch die Blende so bemessen, dass er das Prisma, während es gedreht wurde, stets frei durchsetzte, wie man von unten her blickend an der hell erleuchteten Bahn des Strahles innerhalb des Kalkspathes leicht beurtheilen konnte.

Lässt man nun den durch den Nicol polarisirten Strahl unter anderer als senkrechter Incidenz in der beschriebenen Art auf die Kathodenfläche fallen, so beobachtet man am

Galvanometer während der Drehung des Nicols eine periodisch veränderliche Stromintensität mit 2 Maximis und 2 Minimis. Die ersteren treten ein, wenn der Hauptschnitt mit der Einfallsebene zusammenfällt, die Minima in den um 90^0 verschiedenen Zwischenlagen. Rechnet man den Drehungswinkel α des Prismas von der Stellung der Maxima an, für welche demnach die Polarisationsebene des Strahles zur Einfallsebene senkrecht steht, die electrischen Verschiebungen also in dieser erfolgen, und stellt mit jedem Werthe von α den durch die Ablesung des Galvanometers gefundenen Zahlenwerth der Stromintensität J zusammen, so findet man, dass diese innerhalb der Fehlergrenzen durch die Formel:

$$J = A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha$$

darstellbar ist, wenn A die maximale (für $\alpha = 0$ erhaltene) B die minimale Stromintensität (entsprechend $\alpha = 90^0$) bedeutet. Damit dieser Zusammenhang recht deutlich hervortrete, hat man die Maximal- und Minimalstellung mit möglichster Schärfe zu bestimmen. Nun ist die Veränderlichkeit von J, wie die Natur der Function erkennen lässt, in der Nähe von $\alpha = 0$ und $\alpha = 90^0$ am geringsten, daher ist es nur mit einer Unsicherheit von mehr als einem Grade möglich, diese Hauptlagen durch einen directen Versuch zu ermitteln. Wir zogen es deshalb vor, die Stelle der stärksten Veränderlichkeit von J, nämlich $\alpha = 45^0$ festzulegen. Während der eine von uns das Nicol'sche Prisma langsam drehte, beobachtete der andere am Galvanometer die Stromintensität und las den Maximal- und den Minimalwerth A und B ab. Zugleich wurden die zugehörigen Stellungen am Theilkreis des Nicols notirt. Für $\alpha = 45^0$ lässt die Formel den Werth

$$J = \frac{A + B}{2}$$

erwarten. Dreht man nun den Nicol von einer der soeben notirten Stellungen aus um 45^0, so wird man stets einen Werth von J beobachten, der dem berechneten $A + B/2$ nahe kommt. Durch eine kleine Drehung am Nicol brachten wir es dahin, dass diese Zahl thatsächlich abgelesen wurde und sahen die so erhaltene Stellung als die dem Azimuthe $\alpha = 45^0$ genau entsprechende an. Beim Vor- und Zurückdrehen um

45° findet man dann die corrigirten Hauptlagen und erhält für diese die alten Maximal- und Minimalwerthe A und B wieder.

Wir erwähnen noch, dass bei der Drehung des Prismas die Richtung des austretenden Strahles nicht völlig constant blieb, es wurden vielmehr kleine Verschiebungen der Ein- und Austrittstellen (vgl. Fig. 1) an der Wand der Zelle beobachtet. Die Erscheinung liegt in einer Unvollkommenheit des Nicols begründet, der den Strahl nicht ganz ohne Ablenkung passiren liess. Da es sich um nur sehr kleine Richtungsänderungen handelte und die dadurch bewirkten Verschiebungen der Lichtflecke fast innerhalb der Genauigkeitsgrenze der oben beschriebenen Methode der Abmessung lagen, so haben wir sie vernachlässigt. Der Versuch, sie durch Neueinstellung des Strahles und der Zelle zu eliminiren, würde die Dauer einer Messungsreihe so verlängert haben, dass die Veränderlichkeit des Zirkonlichtes sicher eine weit grössere Fehlerquelle geworden wäre.

Die folgenden Tabellen enthalten unter I A—D die an der oben beschriebenen Zelle bei den Einfallswinkeln 70, 66, 40, 23° beobachteten Werthe der Stromintensität für um 15° fortschreitende Azimuthe. Tabelle II gibt eine Reihe für eine Zelle, in der die Kathodenfläche etwa um den halben Radius von dem Mittelpunkte der Glaskugel entfernt war, III bezieht sich auf einen Recipienten mit planparallelem Fenster.

I.

Zelle I, halb mit der KNa-Legirung angefüllt.

A. Einfallswinkel = 70°.

27. Januar 1895.

Azimuth α	0	15	30	45	60	75	90
Stromintensität (beob.)	149,6	138,0	111,0	74,6	38,9	12,7	3,2
Stromintensisät (ber.) .	147,3	137,6	111,3	75,2	39,3	12,9	3,2
Differenz	+2,6	+0,4	−0,3	−0,6	−0,4	−0,2	—

B. Einfallswinkel = 66°.

Stromintensität (beob.)	144,0	132,5	107,0	72,3	38,3	12,5	4,0
Stromintensität (ber.) .	141,6	132,4	107,2	72,8	38,4	13,2	4,0
Differenz	+2,4	+0,1	−0.2	−0,5	−0,1	−0,7	—

C. Einfallswinkel = 40°.

Azimuth α	0	15	30	45	60	75	90
Stromintensität (beob.)	161,3	149,5	122,0	85,9	47,0	19,0	7,1
Stromintensität (ber.) .	161,7	151,3	123,1	84,5	45,8	17,5	7,1
Differenz	−0,4	−1,8	−1,1	+1,4	+1,2	+1,5	—

D. Einfallswinkel = 23°.

1. Februar 1895.

Stromintensisät (beob.)	96,8	91,8	79,7	63,3	42,9	30,0	28,1
Stromintensität (ber.) .	97,2	92,5	79,9	62,6	45,4	32,7	28,1
Differenz	−0,4	−0,7	−0,2	+0,7	−2,5	−2,7	—

II.

Zelle II, etwa $^1/_4$ mit der KNa-Legirung angefüllt.
Einfallswinkel = 65°.
31. December 1894.

Azimuth α	0	15	30	45	60	75	90
Stromintensität (beob.)	105,4	98,6	79,6	53,8	28,0	8,7	2,1
Stromintensität (ber.) .	105,5	98,6	79,7	53,8	28,0	9,0	2,1
Differenz	−0,1	0,0	−0,1	0,0	0,0	−0,3	—

III.

Zelle III, mit planparallelem Glasverschluss.
Einfallswinkel = 65°.
24. Februar 1895.

Azimuth α	0	15	30	45	60	75	90
Stromintensität (beob.)	63,7	60,1	48,5	33,7	17,3	6,0	1,3
Stromintensität (ber.) .	64,7	60,5	48,9	33,0	17,2	5,5	1,3
Differenz	−1,0	−0,4	−0,4	+0,7	+0,1	+0,5	—

Die als berechnete Stromintensitäten aufgeführten Zahlen sind nach der Formel

$$J = A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha$$

durch ein Ausgleichungsverfahren in folgender Weise gefunden. Man kann die Gleichung in der Gestalt:

$$J = (A - B)\cos^2\alpha + B,$$

oder:

$$A - B = \frac{J - B}{\cos^2\alpha}$$

schreiben. Subtrahirt man daher den Minimalwerth B (ent-

sprechend $\alpha = 90^0$) von allen übrigen Werthen von J und theilt die Differenzen durch das Quadrat des Cosinus der zugehörigen Azimuthe, so müssen die so erhaltenen Zahlen nahe bei einander liegen. Wir nahmen aus ihnen das arithmetische Mittel (M), und führten die nach der Formel

$$J = M\cos^2\alpha + B$$

für alle Azimuthe gefundenen Zahlenwerthe als die berechneten Stromintensitäten auf.

Wie aus den vorstehenden Reihen hervorgeht, bestätigt das an der Zelle mit Planparallelfenster gefundene Resultat das an den kugelförmigen beobachtete, ja selbst wenn der nach der Mitte der Kathode gerichtete Lichtstrahl die Glaswand unter schiefem Winkel schneidet, wie es bei der unter Tabelle II bezeichneten Zelle der Fall war, ist die Gesetzmässigkeit im Verlaufe von J die gleiche. Der Grund ist darin zu suchen, dass die vom Azimuthe abhängigen Intensitätsänderungen, die ein polarisirter Strahl beim schiefen Durchgange durch eine einzige Glasfläche erfährt, nur klein sind, zumal wenn der Einfallswinkel von dem Polarisationswinkel stark abweicht.

Für Einfallswinkel unter 40^0 (Tabelle I D) wurde, wie bemerkt, der Strahl mittels eines Silberspiegels in das Nicol'sche Prisma hineinreflectirt. Streng genommen wäre hier der Betrag an elliptischer Polarisation in Rechnung zu ziehen, die das Licht durch die Reflexion am Silber erleidet und die allein schon die von dem Nicol durchgelassene Intensität für verschiedene Azimuthe verschieden machen würde. Aber auch in diesem Falle liegt der Fehler völlig innerhalb der Genauigkeitsgrenze der Messungen. Wir überzeugten uns davon, indem wir die Helligkeit des austretenden Strahles vermittelst einer Natriumzelle mit starrer, zu ihm senkrechter Kathode während einer Drehung des Nicols um 90^0 maassen; es ergab sich, dass sie fast constant blieb.

Um die Veränderlichkeit des Zirkonlichtes zu eliminiren, wurde nach Schluss jeder Beobachtungsreihe die Anfangsstellung des Nicols wiederholt. Nur solche Reihen sind beibehalten, in denen diese Controlmessung mit der anfänglichen übereinstimmte.

Die in der obigen Formel ausgesprochene Abhängigkeit des photoelectrischen Stromes vom Azimuthe des Lichtes lässt sich unter der, durch frühere Versuche erwiesenen Annahme ableiten, dass die Stromstärke der Lichtintensität proportional ist, wenn man hinzufügt, dass der Proportionalitätsfactor für Licht, parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirt, verschieden ist. Bezeichnet nämlich a die Amplitude eines polarisirten Strahles, dessen Schwingungsebene mit der Einfallsebene den Winkel α bildet, so sind die Intensitäten seiner Componenten parallel und senkrecht zur Einfallsebene bez.: $a^2 \cos^2 \alpha$ und $a^2 \sin^2 \alpha$. Die Stärke des durch diesen Strahl in Bewegung gesetzten photoelectrischen Stromes ist demnach, wenn wir unter x und y die beiden Proportionalitätsfactoren zwischen Licht- und Stromintensität verstehen:

$$J = a^2 x \cos^2 \alpha + a^2 y \sin^2 \alpha.$$

Hierin sind $a^2 x$ und $a^2 y$ die von α unabhängigen Constanten, die wir oben mit A und B bezeichneten. Ein *in* der Einfallsebene schwingender Lichtstrahl erregt daher einen im Verhältniss $x : y$ oder $A : B$ stärkeren photoelectrischen Strom, als ein Strahl gleicher Helligkeit, der normal zu ihr, also parallel der Kathodenfläche schwingt.

Das Verhältniss $A : B$ muss, wie eine einfache Betrachtung lehrt, vom Einfallswinkel abhängig sein. Denn bei senkrechter Incidenz ist die Lage der Einfallsebene unbestimmt, daher ist erforderlich, dass dann der Unterschied von A und B wegfällt. Der Versuch zeigt, dass der gemeinsame Werth der Constanten für diese Richtung des Strahles vergleichsweise klein ist, während dann aber A mit wachsendem Einfallswinkel stark wächst, um nach Erreichung eines Maximums in der Nähe von 60° wieder abzunehmen, wird B durchweg kleiner und scheint sich bei fast streifender Incidenz der Null zu nähern. So erreicht zwischen 60 und 70° das Verhältniss A/B den Werth von etwa 50 : 1 (vgl. obige Tabellen). Versuche, die noch fortzusetzten sind, machen es nicht unwahrscheinlich, dass der Einfallswinkel, für welchen A sein Maximum erreicht, mit dem Polarisationswinkel der Kalium-Natriumlegirung für die electrisch wirksamsten, d. h. die blauen Strahlen, zusammenfällt.

Es liegt nahe, anzunehmen, dass die verschiedene Lichtempfindlichkeit der metallischen Kathodenfläche gegen Licht,

das parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist, mit der grösseren Tiefe zusammenhängt, bis zu der das letztere nach Hrn. Quincke[1]) in Metallflächen eindringt.

Man hat demnach das eigenthümliche Ergebniss, dass ein polarisirter Lichtstrahl bei senkrechter Incidenz eine weit geringere photoelectrische Wirkung äussert, als wenn er unter schiefem Winkel bei zur Einfallsebene senkrechter Polarisationsebene die Kathode trifft. Hierin liegt aber, dass die gleiche Erscheinung auch bei natürlichem Lichte eintreten muss, da man dieses als aus zwei zu einander senkrecht polarisirten Componenten bestehend ansehen kann, deren eine in der Einfallsebene schwingt. Die hierzu normale trägt wegen der Kleinheit der Constante B bei höheren Einfallswinkeln nur unerheblich zu der Unterhaltung des photoelectrischen Stromes bei.

Allerdings muss, damit diese Erwartung zutrifft, die Kathodenfläche so völlig eben sein, wie es bei den Alkalimetallen nur an der flüssigen Substanz erreichbar ist. Starre Natrium- und Kaliumkathoden sind stets von rauher, körnig krystallinischer Beschaffenheit und bieten dem Lichte Flächenelemente von allen möglichen Stellungen dar. Daher zeigt sich die Zunahme des photoelectrischen Stromes mit wachsendem Einfallswinkel nur bei den Zellen mit flüssigen Kathoden aus der Na-K-Legirung, während für die mit starren die Stromstärke vom Einfallswinkel nahezu unabhängig ist.

Diese Unabhängigkeit ist zugleich eine Folge davon, dass die beleuchtete Fläche mit grösser werdendem Einfallswinkel in gleichem Maasse zunimmt, wie die Beleuchtung der Flächeneinheit sich verringert.

Wir führen zum Belege des Gesagten die folgenden beiden Beobachtungsreihen an.

Natürliches Licht.
18. Nov. 1894

	I. Flüssiges Metall (KNa-Legirung)	II. Festes Metall (Körnige aber möglichst ebene Oberfläche)
Einfallswinkel 0°	10,2	34,0
25	15,5	33,5
45	44,2	33,0
60	56,7	30,5
0	8,4	33,1

1) G. Quincke, Pogg. Ann. **129.** p. 117. 1866.

Da es hiernach ohne Zuhülfenahme der Polarisation, allein durch Aenderung des Einfallswinkels möglich ist, die Zunahme der photoelectrischen Wirkung eines Lichtstrahles nachzuweisen, die eintritt, sobald die Lichtschwingungen eine zur Kathode senkrechte Componente enthalten, so lag es nahe, die gleichen Versuche an ultraviolettem Lichte auszuführen, das ja, wie eingangs bemerkt wurde, nur schwer, vielleicht mit den gebräuchlichen Mitteln überhaupt nicht, in rein linear polarisirtem Zustande zu erhalten ist. Man hat dann den Vortheil, die Kathode aus beliebigem metallischen Stoffe wählen und sie in freier Luft aufstellen zu können.

Die Versuchsanordnung war die folgende. (Fig. 2.) Mit einem grossen Inductorium J war ein Condensator C verbunden, dessen hell leuchtende Entladungen zwischen zwei Zink-

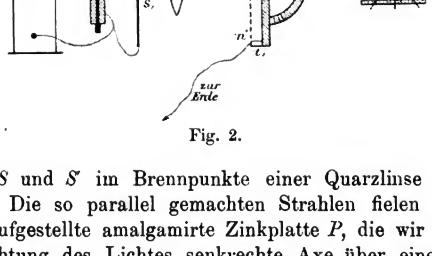


Fig. 2.

spitzen S und S' im Brennpunkte einer Quarzlinse Q übergingen. Die so parallel gemachten Strahlen fielen auf eine isolirt aufgestellte amalgamirte Zinkplatte P, die wir um eine zur Richtung des Lichtes senkrechte Axe über einer Kreistheilung K drehen konnten. Unmittelbar über der Platte trug, durch Siegellackstützen $t\,t'$ an ihr befestigt, ein zur Erde abgeleiteter Drahtrahmen $n\,n'$ einen in grossen Zwischenräumen hin und her gespannten feinen Kupferdraht. Wurden die Funken eine bestimmte Zeit lang bei $S\,S'$ erregt, so entzog das von ihnen ausgehende ultraviolette Licht der Platte, je nach seiner Intensität, einen grösseren oder kleineren Betrag einer ihr mitgetheilten negativen Ladung. Das Sinken des Potentials wurde an einem mit ihr verbundenen Exner'schen Electroskope E beobachtet. Aus den Potentialwerthen V und

V' vor und nach der Belichtung war dann die Lichtintensität mittels der früher [1]) begründeten Formel:

$$J = \log \frac{V}{V'}$$

zu berechnen. Zu Anfang jeder Versuchsreihe stand die blank geputzte Zinkplatte zu den einfallenden Strahlen normal ($\alpha = 0$), dann wurde sie um 50° nach rechts und links gedreht ($\alpha = \pm 50°$) und schliesslich die Anfangslage wiederhergestellt. Dabei betrug das Anfangspotential V stets 258 Volt (25 Scalentheile des Electroskops), die Potentiale V' nach 10 Secunden Expositionszeit sind in folgenden beiden Reihen aufgeführt:

13. April 1895.

Einfallswinkel:		0	+50	−50	0	+50	−50	0	+50	−50	0
V' in Scalentheilen	Reihe I	9,1	7,5	7,5	8,8	7,5	7,9	9,0	7,9	7,8	9,1
	Reihe II	8,9	7,9	7,4	8,5	8,0	8,0	8,9	7,5	7,5	9,0

Als Mittel aus den einschliessenden Beobachtungen ergiebt sich

für senkrechte Incidenz $V_0' = 8{,}9$ Scalentheile = 117 Volt

für schiefe Incidenz $V_{\pm 50°}' = 7{,}7$ Scalentheile = 107 Volt

Hieraus folgt für das Verhältniss der lichtelectrischen Wirkungen:

$$\frac{J_{\pm 50}'}{J_0'} = \frac{\log 258 - \log 107}{\log 258 - \log 117} = 1{,}11.$$

Es ist demnach die photoelectrische Wirksamkeit des schief einfallenden ultravioletten Lichtes in freier Luft ebenfalls der des senkrecht gerichteten überlegen, allerdings sind die Unterschiede weit kleiner als die bei sichtbarem Lichte an Alkalimetallflächen im Vacuum gefundenen. Wir vermutheten, dass diese Abweichung in der Unvollkommenheit der Oberfläche des amalgamirten Zinks ihre Ursache hätte und wiederholten denselben Versuch an einem natürlichen Quecksilberspiegel, unter Abänderung der Versuchsanordnung mit Rücksicht darauf, dass jetzt der Lichtstrahl gegen die nunmehr feststehende Kathodenfläche gedreht werden musste. Aber auch hier erwiesen sich die Unterschiede als in denselben

1) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. **48**. p. 347. 1893.

Grenzen liegend. Es ist daher entweder das Verhältniss der photoelectrischen Wirkung des parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes von der Wellenlänge abhängig, sodass es sich der Einheit nähert, wenn diese klein wird, oder es spielen noch andere Ursachen (wie die Verschiedenheit des Gasdrucks) bei dem Vorgange eine Rolle.

Wir haben auch, veranlasst durch die Bemühungen des Hrn. Wanka[1]), bei dem bekannten Hertz'schen Versuche der Erregung eines electrischen Funkens durch das Licht eines anderen einen Einfluss der Richtung der Lichtschwingungen gegen die beleuchtete Kathode nachzuweisen, nach einer Abhängigkeit derselben Erscheinung vom Einfallswinkel gesucht. Die experimentelle Anordnung war im wesentlichen die vorhin beschriebene, nur dass als die Wirkung des Lichtes nicht der Potentialabfall einer beleuchteten Fläche, sondern die Auslösung des synchronen, sogenannten passiven Funkens eines zweiten mit dem ersten in gleicher Phase befindlichen Inductoriums beobachtet wurde. Dabei kommt der oben genannte Condensator bei dem ersten Inductorium in Wegfall, dagegen verbindet man zweckmässig das zweite mit einer Leydner Flasche, um dem passiven Funken eine grössere Intensität zu geben und dadurch seine Beobachtung zu erleichtern. Wir haben weder mit der Zinkplatte als Kathode noch an der Quecksilberoberfläche irgend einen merklichen Unterschied der (im übrigen deutlich wahrnehmbaren) Wirkung bei verschiedenen Einfallswinkeln (0^0 und 50^0) gefunden.

Es ist dabei indessen zu berücksichtigen, dass die Hertz'sche Erscheinung, die Auslösung eines Funkens durch ultraviolette Beleuchtung der Kathode, nicht als durchaus gleichartig mit der von Hrn. Hallwachs gefundenen Zerstreuung negativer Electricität im ultravioletten Lichte angesehen werden darf. Die letztere ist in weiten Grenzen der Lichtintensität proportional und verschwindet daher erst vollständig bei Ausschluss des Lichtes, während bei der ersteren für einen bestimmten Electrodenabstand eine endliche Lichtstärke nothwendig ist und zugleich ausreicht. Der oben beschriebene Versuch würde deshalb vielleicht ein positives Resultat er-

1) J. Wanka, Mitth. d. deutschen math. Ges. in Prag. p. 63. 1892.

geben, wenn man die Schlagweite des passiven Funkens durch eine Mikrometerschraube jedesmal auf ihren Maximalwerth einstellte.

In Betreff der Natur des photoelectrischen Vorganges sprechen die Ergebnisse der Versuche an polarisirtem Lichte im Ganzen für die Vorstellung, dass man es hier mit einer unmittelbaren Wirkung zu thun hat, welche die Lichtstrahlen durch die Erregung electrischer Schwingungen ausüben. In diesem oder ähnlichem Sinne haben sich früher die Hrn. Wiedemann und Ebert[1]), wir selbst[2]) und Hr. Jaumann[3]) ausgesprochen. Doch bleibt, wenn man nicht wie die erstgenannten Forscher den photoelectrischen Process mit der Erregung von Kathodenstrahlen in Zusammenhang bringen will noch räthselhaft, weshalb er eben auf die Kathode beschränkt ist. Zur Ausfüllung dieser Lücke ist eine weitere Annahme erforderlich, die vor Kurzem von Hrn. J. J. Thomson[4]) eingeführt ist, dass nämlich die Kathodenoberfläche im Contact mit der Luft (oder dem darüber lagernden Gase) mit einer electrischen Doppelschicht überzogen wird, deren positive Seite die Molecüle der Kathode, deren negative die Gasmolecüle bilden.

Denken wir uns nun, dass ein Lichtstrahl die aus Metall bestehende Kathodenfläche so trifft, dass die electrischen Verschiebungen im Strahle eine zu ihr senkrechte Componente haben, so werden in den Metallmolecülen electrische Schwingungen inducirt, in denen eine solche Componente ebenfalls vorhanden ist. Diese bewirken aber, dass die Berührungsstelle zwischen Metall- und Gasmolecül, soweit sie dem ersteren angehört, in sehr schneller Folge abwechselnd positive und negative Ladungen erhält. Es ist vielleicht möglich, dass in *der* Phase der Schwingungen, in der die electrische Dichtigkeit negativ ist, der Zusammenhang des Metallmolecüles mit dem

1) E. Wiedemann u. H. Ebert, Wied. Ann. **33.** p. 263. 1888 u. **35.** p. 259. 1888.

2) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. **41.** p. 175. 1890 u. **44.** p. 736. 1891; ferner Berl. Ber. VI. p. 134 u. 136. 1894.

3) In der oben citirten Abhandlung von Wanka p. 58. 1892; ferner G. Jaumann, Wien. Ber. **104.** Abth. IIa. p. 9. Januar 1895.

4) J. J. Thomson, Phil. Mag. **37.** p. 356. 1894.

ebenfalls negativen Gasmolecüle durch electrostatische Abstossung aufgehoben und das letztere in den freien Gasraum hineingestossen wird, während ein anderes, das nun seine Stelle einnimmt, durch den Contact mit dem Metallmolecüle diesem positive Electricität mittheilt, und sich selbst wieder negativ ladet.

Für diese Auffassung spricht der Umstand, dass Alkalimetallzellen, die anstatt des verdünnten Wasserstoffgases die viel stärker electronegativen Gase Sauerstoff oder Kohlendioxyd enthalten, ganz besonders lichtempfindlich sind und dass bei gleicher Gasatmosphäre die Lichtempfindlichkeit mit dem electropositiven Charakter des Kathodenmetalles steigt. Wir hoffen auf diese Erscheinungen noch zurückkommen zu können.

Allerdings ist der im vorigen angedeuteten Vorstellung gegenüber geltend zu machen, dass die lichtelectrische Wirkung nicht ganz erlischt, wenn die electrischen Verschiebungen parallel der Kathodenfläche erfolgen, also die zu ihr normale Componente null ist. Von besonderer Wichtigkeit für die Kenntniss des photoelectrischen Vorgangs scheinen uns weitere Untersuchungen über die Abhängigkeit desselben vom Einfallswinkel und zwar unter Anwendung polarisirten Lichtes zu sein.

Zu unserm Bedauern sind wir durch einen in seiner Form verletzenden Angriff des Hrn. Jaumann genöthigt, diese Mittheilungen mit folgenden Bemerkungen zu schliessen.

Hr. Jaumann sagt [1]), dass er den Ausfall unserer lichtelectrischen Versuche mit polarisirtem Lichte (citirt ist: Wied. Ann. 52. p. 490) schon 1892 vorhergesagt habe und fügt hinzu, dass *wir diesen uns allerdings wohlbekannten Umstand nicht mitgetheilt hätten.* Er stützt seine Behauptung auf folgende Stellen der oben citirten Abhandlung (Titel: Ueber ein neues Entladungsexperiment) des Hrn. Wanka:

1. p. 57: „Hr. G. Jaumann hält deswegen auch dafür, dass die Hertz'sche Lichtwirkung auf den von ihm aufgefundenen Einfluss der Potentialschwankungen auf den Entladungsvorgang beruhe und hierdurch erklärt sei."

1) Jaumann, Wien. Ber. **104.** Abth. IIa. p. 3. 1895.

2. p. 63: „Da die Wirkung bei einer gewissen Stellung des activen Funkens gänzlich erlosch, weil die electrischen Kräfte desselben polarisirt sind, so ist es auch sehr wahrscheinlich, dass das Hertz'sche Lichtexperiment mit polarisirtem Lichte ausgeführt, zu einem übereinstimmenden Resultate führen müsse."

Zu 1 bemerken wir, dass diese Auffassung, wie oben schon gesagt wurde, nicht neu, sondern, nachdem die Hrn. E. Wiedemann und Ebert (l. c.) zuerst ähnliche Gedanken geäussert hatten, von uns [1]) in der Art ausgedrückt ist, dass wir als Analogon des photoelectrischen Vorganges die Auslösung der Entladung einer Leydner Flasche durch electrische Oscillationen, auf welche sie resonirt, aufstellten. Dabei haben wir, unserer Meinung nach vorsichtiger, wie Hr. Jaumann, bemerkt, dass diese Erklärung, oder vielmehr diese Analogie, mangelhaft ist, da sie die Beschränkung der Lichtwirkung auf die Kathode ausser Acht lässt. Wir hatten deshalb keine Veranlassung, die von Hrn. Wanka citirte Ansicht des Hrn. Jaumann unsererseits noch einmal aufzuführen, um so mehr, da unsere Mittheilung von Versuchen an polarisirtem Lichte handelte und in der Meinungsäusserung des Hrn. Jaumann von solchem überhaupt nicht die Rede ist.

Was die Stelle Nr. 2 anlangt, so ist festzustellen, dass weder darin noch in ihrer Nähe der Name des Hrn. Jaumann genannt wird. Wie sollten wir also dazu kommen, die hierin ausgesprochene Vermuthung einem anderen, als dem Verfasser der Abhandlung, Hrn. Wanka, zuzuschreiben? Wir glauben daher ganz correct gehandelt zu haben, indem wir in unserer ersten Veröffentlichung [2]) über diesen Gegenstand unter Citirung der Abhandlung des Hrn. Wanka sagen: „So gelang es Hrn. Wanka nicht, bei einer verwandten Erscheinung, der von Hrn. Hertz entdeckten Auslösung electrische Funken durch ultraviolettes Licht, den von ihm vermutheten Einfluss der Schwingungsrichtung des Lichtes festzustellen." Die Wanka'sche Abhandlung ist auch in der für diese Annalen ausgeführten Bearbeitung [3]) desselben Stoffes

1) Elster u. Geitel, Wied. Ann. **41.** p. 175. 1890.
2) Elster u. Geitel, Berl. Ber. **6.** p. 134. 1894.
3) Elster u. Geitel, Wied. Ann. **52.** p. 445. 1894.

genannt, nur ist der Zusatz, dass ein solcher Einfluss erwartet war, weggeblieben und zwar ebenso unbeabsichtigter, wie für den Sinn unschädlicher Weise, da ein Versuch rationellerweise doch nur dann angestellt wird, wenn man einen Zusammenhang der Factoren muthmaasst, die man aufeinander wirken lässt. Wir weisen desshalb den in den Worten des Hrn. Jaumann liegenden Vorwurf entschieden zurück.

Wolfenbüttel, im Mai 1895.

11. *Piezo- und Pyroelectricität, dielectrische Influenz und Electrostriction bei Krystallen ohne Symmetriecentrum;* von *W. Voigt.*

(Aus den Nachr. d. k. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen, math.-physik. Klasse. 1894. Heft 4.)

Die Grundlagen zu einer allgemeinen Theorie der piezo- und pyroelectrischen Erscheinungen an Krystallen habe ich in einer Abhandlung über diesen Gegenstand vor 4 Jahren[1]) zu geben mich bemüht, und da die Beobachtungen mit den daraus gezogenen Folgerungen übereinstimmen, auch principielle Widersprüche von keiner Seite erhoben sind, so darf ich dieselben als bisher unerschüttert betrachten. In den Anwendungen habe ich mich aber auf eine *Annäherung* beschränkt, die durch gewisse Beobachtungen gerechtfertigt erschien und darin bestand, dass ich bei der Bestimmung der Erregung eines Krystalls nur die *directen* Einwirkungen der Deformationen bez. der Temperaturänderungen in Rechnung zog, die *indirecten* dagegen, nämlich die electrischen und mechanischen Wirkungen, welche die primär erregte electrische Vertheilung *ihrerseits* übt, vernachlässigte. Eine Berücksichtigung derselben hätte *principielle* Schwierigkeiten nicht geboten, wohl aber die Resultate theilweise erheblich unübersichtlicher gemacht.

Nachdem aber durch die von Riecke und mir angestellten Beobachtungen[2]) eine Prüfung der Theorie in grösserem Umfange als früher durchgeführt ist, scheint es angemessen, nun auch die *strengen*, *allgemeinen* Formeln der Piezo- und Pyroelectricität und die damit in Verbindung stehenden der dielectrischen Influenz und der Electrostriction für Krystalle

1) W. Voigt, Allgemeine Theorie der piezo- und pyroelectrischen Eigenschaften der Krystalle. Abh. der k. Ges. der Wiss. zu Göttingen. **36.** p. 1—99. 1890.

2) E. Riecke u. W. Voigt, Wied. Ann. **45.** p. 523. 1892.

ohne Symmetriecentrum aufzustellen, zu prüfen, bis zu welchem Grade der Genauigkeit die frühere angenäherte Behandlung richtige Resultate zu liefern vermag, und zu untersuchen, welche Probleme einer strengen Behandlung zugänglich sind.

1. Ich gehe aus von der Annahme, die in der Literatur zuerst Duhem[1]) ausgesprochen hat, die ich aber unabhängig von ihm wenig später in meinen Vorlesungen als Ausgangspunkt für die Behandlung dieses Gebietes gemacht habe, dass die genannten electrischen Vorgänge *vollständig umkehrbare* seien, also ein *thermodynamisches Potential* besässen.

Betrachten wir das Volumenelement eines erregbaren Krystalls, und bestimmen wir seinen Zustand durch die Werthe der sechs Deformationsgrössen $x_x, \ldots x_y$, der Componenten der in ihm wirkenden electrischen Kraft X, Y, Z und der Temperatur τ, die wir sämmtlich von einem beliebigen Normalzustand aus rechnen, bezeichnen wir mit ξ das thermodynamische Potential oder die freie Energie, mit η die Entropie der Volumeneinheit, mit α, β, γ ihre electrischen Momente nach den Coordinatenaxen, mit $\Xi_x, \ldots \Xi_y$ die Gesammtcomponenten der inneren Drucke, so gelten bekanntlich die Beziehungen

$$(1)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial \xi}{\partial X} = \alpha, & -\dfrac{\partial \xi}{\partial Y} = \beta, & -\dfrac{\partial \xi}{\partial Z} = \gamma, & -\dfrac{\partial \xi}{\partial \tau} = \eta, \\ -\dfrac{\partial \xi}{\partial x_x} = \Xi_x, & -\dfrac{\partial \xi}{\partial y_y} = H_y, \ldots & -\dfrac{\partial \xi}{\partial x_y} = \Xi_y. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt eine Reihe von Reciprocitätssätzen durch Elimination der Function ξ, z. B.

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Xi_x}{\partial X} = \dfrac{\partial \alpha}{\partial x_x}, & \dfrac{\partial H_y}{\partial X} = \dfrac{\partial \alpha}{\partial y_y}, & \dfrac{\partial \Xi_x}{\partial Y} = \dfrac{\partial \beta}{\partial x_x}, \ldots \\ \dfrac{\partial \Xi_x}{\partial \tau} = \dfrac{\partial \eta}{\partial x_x}, & \dfrac{\partial H_y}{\partial \tau} = \dfrac{\partial \eta}{\partial y_y}, \ldots \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial \tau} = \dfrac{\partial \eta}{\partial X}, & \dfrac{\partial \beta}{\partial \tau} = \dfrac{\partial \eta}{\partial Y}, \ldots \end{cases}$$

Die beiden letzten Reihen dieses Systems gestatten, die Formel

1) Duhem, Leçons sur l'électricité et le magnétisme 2. p. 339 u. f. 1892.

$$d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x_x} dx_x + \ldots \frac{\partial \eta}{\partial x_y} dx_y + \frac{\partial \eta}{\partial X} dX + \frac{\partial \eta}{\partial Y} dY + \frac{\partial \eta}{\partial Z} dZ + \frac{\partial \eta}{\partial \tau} d\tau$$

auf die Gestalt zu bringen:

$$d\eta = \frac{\partial \Xi_x}{\partial \tau} dx_x + \ldots \frac{\partial \Xi_y}{\partial \tau} dx_y + \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} dX + \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} dY + \frac{\partial \gamma}{\partial \tau} dZ + \frac{\partial \eta}{\partial \tau} d\tau.$$

Bezeichnet man mit T die τ entsprechende *absolute* Temperatur, so ist bekanntlich

$$T d\eta = d\omega \tag{4}$$

die mechanisch gemessene Wärmemenge, welche erforderlich ist, um der Volumeneinheit die durch $dx_x, \ldots dx_y, dX, dY, dZ, d\tau$ bestimmte Veränderung zu ertheilen, und

$$\frac{d\omega}{\varrho\, d\tau} = \Gamma, \tag{5}$$

worin ϱ die Dichte des Körpers bedeutet, die mechanisch gemessene specifische Wärme bei dem betrachteten Vorgang. Sind $dx_x, \ldots dx_y, dX, dY, dZ$ gleich Null, so sei Γ mit Γ_d bezeichnet und heisse die *specifische Wärme bei constanter Deformation und constanter Influenz*; es gilt dann ersichtlich

$$\Gamma_d = \frac{T}{\varrho} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = -\frac{T}{\varrho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2}. \tag{6}$$

Von den Reciprocitätssätzen *höherer* Ordnung, die man leicht bilden kann, seien nur diejenigen erwähnt, welche Eigenschaften von Γ_d aussprechen; man erhält aus (6) und (2)

$$\begin{cases} \frac{1}{T} \frac{\partial \varrho \Gamma_d}{\partial x_x} = \frac{\partial^2 \Xi_x}{\partial \tau}, \ldots \\ \frac{1}{T} \frac{\partial \varrho \Gamma_d}{\partial X} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \tau^2}, \ldots \end{cases} \tag{7}$$

2. Setzt man *kleine* Werthe der Variabeln $x_x, \ldots x_y, X, Y, Z, \tau$ voraus, so kann man für ξ eine Reihe nach steigenden Potenzen dieser Grössen bilden und mit einer endlichen Anzahl von Gliedern abbrechen. Nimmt man an, dass die Drucke $\Xi_x, \ldots \Xi_y$, die Componenten X, Y, Z und die Entropie η mit den Argumenten verschwinden, so ist das niedrigste Glied von ξ eine *quadratische* Form. Wir beschränken uns auf dieses und setzen

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} \xi = \varphi + f_d - \tfrac{1}{2} r\,\tau^2 \\ -\tau(q_1 x_x + \ldots + q_6 x_y) - \tau(r_1 X + r_2 Y + r_3 Z) \\ -X(\varepsilon_{11} x_x + \varepsilon_{12} y_y + \ldots + \varepsilon_{16} x_y) \\ -Y(\varepsilon_{21} x_x + \varepsilon_{22} y_y + \ldots + \varepsilon_{26} x_y) \\ -Z(\varepsilon_{31} x_x + \varepsilon_{32} y_y + \ldots + \varepsilon_{36} x_y). \end{array}\right.$$

Hierin ist φ das *rein elastische Potential* oder die freie Energie bei constanter Influenz und constanter Temperatur; sein Werth folgt aus

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} 2\varphi = c_{11} x_x^2 + 2 c_{12} x_x y_y + \ldots\ldots + 2 c_{16} x_x x_y \\ \qquad + c_{22} y_y^2 + \ldots\ldots + 2 c_{26} y_y x_y \\ \qquad\qquad + c_{33} z_z^2 + \ldots + 2 c_{36} z_z x_y + \ldots \end{array}\right.$$

Die Constanten c_{hk} sind die *isothermischen Elasticitäts-constanten* des betrachteten Krystalls. f_d ist das *rein dielectrische Potential* oder die freie Energie bei constanter Deformation oder Temperatur; sein Werth folgt aus

$$(10)\quad -2f_d = \beta_{11} X^2 + \beta_{22} Y^2 + \beta_{33} Z^2 + 2\beta_{23} YZ + 2\beta_{31} ZX + 2\beta_{12} XY,$$

worin die β_{hk} Constanten bezeichnen.

Verstehen wir also unter $X_x, \ldots X_y$ die *rein elastischen Drucke*, welche bei constanter Influenz und Temperatur durch die Deformationen allein bewirkt werden, so ist

$$(11)\quad X_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_x}, \quad Y_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y_y}, \ldots X_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_y};$$

verstehen wir unter α_d, β_d, γ_d die *rein electrisch erregten Momente*, welche bei constanter Deformation und Temperatur durch die Influenz allein hervorgerufen werden, so ist

$$(12)\quad \alpha_d = -\frac{\partial f_d}{\partial X}, \quad \beta_d = -\frac{\partial f_d}{\partial Y}, \quad \gamma_d = -\frac{\partial f_d}{\partial Z}.$$

Bei Einführung dieser Abkürzungen nehmen die allgemeinen Formeln (1) infolge des Werthes (8) die Gestalt an

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} \Xi_x = X_x + q_1 \tau + \varepsilon_{11} X + \varepsilon_{21} Y + \varepsilon_{31} Z, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Xi_y = X_y + q_1 \tau + \varepsilon_{16} X + \varepsilon_{26} Y + \varepsilon_{36} Z; \end{array}\right.$$

$$(14)\qquad \begin{cases} \alpha = \alpha_d + \varepsilon_{11} x_x + \varepsilon_{12} y_y + \ldots + \varepsilon_{16} x_y + r_1 \tau, \\ \beta = \beta_d + \varepsilon_{21} x_x + \varepsilon_{22} y_y + \ldots + \varepsilon_{26} x_y + r_2 \tau, \\ \gamma = \gamma_d + \varepsilon_{31} x_x + \varepsilon_{32} y_y + \ldots + \varepsilon_{36} x_y + r_3 \tau; \end{cases}$$

$$(15)\qquad \eta = q_1 x_x + \ldots + q_6 x_y + r\tau + r_1 X + r_2 Y + r_3 Z.$$

Die innere Energie ε der Volumeneinheit hängt mit ξ und η durch die Formel zusammen

$$(16)\qquad \varepsilon = \xi + \eta T;$$

hieraus folgt in unserem Fall, falls man $T - \tau = T_0$ setzt,

$$(17)\qquad \begin{cases} \varepsilon = q + f_d + \frac{1}{2} r (T^2 - T_0^2) \\ + T_0 (q_1 x_x + \ldots + q_6 x_y) + T_0 (r_1 X + r_2 Y + r_3 Z) \\ - X(\varepsilon_{11} x_x + \ldots + \varepsilon_{16} x_y) - Y(\varepsilon_{21} x_x + \ldots + \varepsilon_{26} x_y) \\ - Z(\varepsilon_{31} x_x + \ldots + \varepsilon_{36} x_y). \end{cases}$$

Vernachlässigt man hierin die Glieder zweiter Ordnung neben denen erster, so erhält man

$$(18)\qquad \varepsilon = T_0 [(q_1 x_x + \ldots + q_6 x_y) + r\tau + (r_1 X + r_2 Y + r_3 Z)],$$

oder unter Rücksicht auf (15)

$$\varepsilon = \eta T_0.$$

Die Constanten q_h heissen wegen der Art ihres Auftretens in (13) die *Coefficienten des thermischen Druckes*, die Constanten ε_{hk} wegen der Verbindung, die sie in (14) zwischen den electrischen Momenten und den Deformationsgrössen herstellen, die *piezoelectrischen Constanten*. Die Grössen r_h wären als die *piezoelectrischen Constanten bei constanter Influenz und Deformation* zu bezeichnen. Sie würden gleich Null zu setzen sein, wenn, wie verschiedene Beobachter geschlossen haben, eine directe Wirkung der Temperatur auf die electrischen Momente nicht existirt, die wahrgenommenen pyroelectrischen Erregungen also nur auf den durch die Temperaturänderungen bewirkten *Deformationen* beruhen. Ich habe mich in meiner ersten Abhandlung jenen Beobachtern angeschlossen, also die Constanten r_h nicht eingeführt, weil auf diese Weise die Theorie die denkbar einfachste Gestalt gewinnt. Wie wenig ich indessen dabei das Verschwinden der r_h für *selbstverständlich* oder durch die früheren Beobachtungen *völlig sichergestellt* betrachtete, zeigt der Umstand, dass die von Riecke und mir

angestellten Messungen an Turmalin ganz speciell zu einer Prüfung dieser Verhältnisse benutzt worden sind. Diese Prüfung hat ergeben, dass jedenfalls bei Turmalin eine primäre pyroelectrische Erregung neben der secundären nicht sicher nachweisbar ist.

Aus dem Gesagten ergiebt sich, dass der von mir eingenommene Standpunkt mit dem von Lord Kelvin [1]) vertretenen im wesentlichen vollständig übereinstimmt. In der That habe ich auch in den oben genannten Vorlesungen die directen pyroelectrischen Wirkungen neben den indirecten zugelassen und die Theorie wesentlich in der Form behandelt, die hier mitgetheilt ist.

Für r erhält man aus (6) die Beziehung

$$r = \frac{\varrho\, \Gamma_d}{T}; \tag{19}$$

hierin ist gemäss den eingeführten Vernachlässigungen für ϱ und T der bezügliche Anfangswerth ϱ_0 und T_0 zu setzen, sodass sich Γ_d als eine Constante ergiebt.

Der in (13) gegebene Werth der Druckkräfte ist, streng genommen, unvollständig, weil bekanntlich die electrischen Kräfte innerhalb ponderabler Körper auch Spannungen ganz unabhängig von deren piezoelectrischer Qualität, von deren Deformation oder Temperatur erregen. Diese müssten zu den obigen Werthen $\Xi_x, \ldots \Xi_y$ hinzugefügt werden, um die *Gesammtdrucke* $(\Xi_x), \ldots (\Xi_y)$ zu ergeben; sie würden das ganze Problem überaus compliciren, da sie Functionen zweiten Grades der X, Y, Z sind.

Zum Glück verlangt aber eben dieser letzte Umstand, dass wir sie bei unseren Entwickelungen, welche sich auf die Grössen niedrigster Ordnung beschränken, *vernachlässigen*. Innerhalb der eingeführten Beschränkungen sind sonach die Werthe (13) als vollständig zu betrachten.

3. Für viele Anwendungen ist es vortheilhaft, die Drucke $\Xi_x, \ldots \Xi_y$ statt der Deformationsgrössen $x_x, \ldots x_y$ als unabhängige Variable einzuführen.

1) Lord Kelvin, Phil. Mag. (5) **36**. p. 453. 1893.

Dazu benutzten wir, dass die *isothermischen Elasticitätsmoduln* s_{hk} mit den Constanten c_{hk} durch die Beziehungen verbunden sind

$$(20)\qquad c_{1h}s_{1k}+c_{2h}s_{2k}+\ldots+c_{6h}c_{6k}\begin{cases}=1 \text{ für } h=k,\\ =0 \text{ für } h\lesseqgtr k.\end{cases}$$

Ferner führen wir neue Constanten a_h ein durch die Beziehungen

$$(21)\qquad a_h=q_1 s_{1h}+q_2 s_{2h}+\ldots . q_6 s_{6h} \text{ für } h=1, 2\ldots 6,$$

welchen entsprechen

$$(22)\qquad q_h=a_1 c_{1h}+a_2 c_{2h}+\ldots a_6 c_{6h};$$

endlich setzen wir

$$(23)\qquad \varepsilon_{h1}s_{k1}+\varepsilon_{h2}s_{k2}+\ldots+\varepsilon_{h6k6}=\delta_{hk}\begin{matrix}\text{für } h=1, 2, 3\\ \text{und } k=1, 2, \ldots 6,\end{matrix}$$

woraus auch folgt

$$(24)\qquad \delta_{h1}c_{k1}+\delta_{h2}c_{k2}+\ldots+\delta_{h6}c_{k6}=\varepsilon_{hk}.$$

Fassen wir dann die Gleichungen (13) mit den Factoren $s_{1h}, s_{2h}, \ldots s_{6h}$ für $h=1, 2, \ldots 6$ zusammen, so resultirt

$$(25)\qquad \begin{cases} x_x=\xi_x+a_1\tau+\delta_{11}X+\delta_{21}Y+\delta_{31}Z,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_y=\xi_y+a_6\tau+\delta_{16}X+\delta_{26}Y+\delta_{36}Z,\end{cases}$$

worin

$$(26)\qquad \begin{cases} -\xi_x=\Xi_x s_{11}+H_y s_{12}+\ldots+\Xi_y s_{16},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ -\xi_y=\Xi_x s_{61}+H_y s_{62}+\ldots+\Xi_y s_{66}\end{cases}$$

die Deformationsgrössen bezeichnen, welche die Gesammtdrucke $\Xi_x, \ldots \Xi_y$ bei constanter Influenz und Temperatur bewirken würden.

Setzen wir weiter

$$(27)\qquad \begin{cases} r_h+a_1\varepsilon_{h1}+a_2\varepsilon_{h2}+\ldots+a_6\varepsilon_{h6}=p_h \text{ für } h=1, 2, 3,\\ \beta_{hi}+\delta_{h1}\varepsilon_{i1}+\delta_{h2}\varepsilon_{i2}+\ldots+\delta_{h6}\varepsilon_{i6}=\gamma_{hi} \text{ für } h \text{ und } i=1, 2, 3,\end{cases}$$

worin wegen (23)

$$\gamma_{hi}=\gamma_{ih}$$

ist, und verstehen wir unter α_s, β_s, γ_s die Functionen

$$(28)\qquad \begin{cases} \alpha_s=\gamma_{11}X+\gamma_{12}Y+\gamma_{13}Z,\\ \beta_s=\gamma_{21}X+\gamma_{32}Y+\gamma_{23}Z,\\ \gamma_s=\gamma_{31}X+\gamma_{32}Y+\gamma_{33}Z,\end{cases}$$

so ergeben die Formeln (14)

$$(29)\quad \begin{cases} \alpha = \alpha_s - (\delta_{11}\,\Xi_x + \delta_{12}\,H_y + \ldots + \delta_{16}\,\Xi_y) + p_1\,\tau\,, \\ \beta = \beta_s - (\delta_{21}\,\Xi_x + \delta_{22}\,H_y + \ldots + \delta_{26}\,\Xi_y) + p_2\,\tau\,, \\ \gamma = \gamma_s - (\delta_{31}\,\Xi_x + \delta_{32}\,H_y + \ldots + \delta_{36}\,\Xi_y) + p_3\,\tau\,. \end{cases}$$

Hierin haben die α_s, β_s, γ_s die Bedeutung der bei constanter Spannung und Temperatur influenzirten Momente und lassen sich auch schreiben

$$(30)\qquad \alpha_s = -\frac{\partial f_s}{\partial X}\,,\quad \beta_s = -\frac{\partial f_s}{\partial Y}\,,\quad \gamma_s = -\frac{\partial f_s}{\partial Z}\,,$$

worin

$$(31)\quad -2f_s = \gamma_{11}X^2 + \gamma_{22}Y^2 + \gamma_{33}Z^2 + 2\gamma_{23}YZ + 2\gamma_{31}ZX + 2\gamma_{12}XY$$

ist, und f_s als das *dielectrische Potential bei constanter Spannung und Temperatur* bezeichnet werden kann.

Benutzt man schliesslich, dass nach (21) und (23)

$$(32)\quad r_h + q_1\,\delta_{h1} + q_2\,\delta_{h2} + \ldots q_6\,\delta_{h6} = p_h \text{ für } h = 1, 2, 3$$

ist, und setzt

$$(33)\qquad r + a_1\,q_1 + a_2\,q_2 + \ldots a_6\,q_6 = p,$$

so wird aus der Gleichung (15)

$$(34)\quad \eta = -(a_1\,\Xi_x + \ldots + a_6\,\Xi_y) + p\,\tau + p_3\,X + p_2\,Y + p_3\,Z.$$

Die Constanten a_h heissen wegen der Art ihres Auftretens in (25) die *thermischen Deformationscoefficienten*, die δ_{hk} wegen der Verbindungen, die sie in (29) zwischen Drucken und Momenten herstellen, die *piezoelectrischen Moduln* der Substanz. Die p_h werden als *pyroelectrische Constanten bei constanter Spannung und Influenz* zu bezeichnen sein; sie verschwinden nicht mit den r_h, was damit zusammenhängt, dass sie neben den directen Wirkungen der Temperatur auch die indirecten, durch die Deformationen vermittelten, mit umfassen.

Für p kann man gemäss (19) bilden

$$(35)\qquad p = \frac{\varrho_0\,\Gamma_s}{T_0}\,,$$

worin Γ_s die mechanisch gemessene specifische Wärme bei constanter Spannung und Influenz bezeichnet und innerhalb der eingeführten Annäherung wie Γ_d constant ist.

4. Der gewöhnlichen Theorie der dielectrischen Influenz werden die Beziehungen zu Grunde gelegt

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} 4\pi\alpha &= (D_{11}-1)X + D_{12}Y + D_{13}Z,\\ 4\pi\beta &= D_{21}X + (D_{22}-1)Y + D_{23}Z,\\ 4\pi\gamma &= D_{31}X + D_{32}Y + (D_{33}-1)Z, \end{aligned}\right.$$

worin D_{hk} als die allgemeinen *Dielectricitätsconstanten* der Substanz bezeichnet werden können und die Beziehung $D_{hk} = D_{kh}$ erfüllen. Bei diesem Ansatz wird stillschweigend vorausgesetzt, dass neben der influenzirenden Kraft keine mechanische Einwirkung auf den Körper stattfindet. Damit ist indessen, genau genommen, keineswegs gesagt, dass von Deformationen oder Spannungen überhaupt abgesehen werden kann, denn ausser den oben ausdrücklich vernachlässigten Maxwell-Kirchhoff'schen Spannungen entstehen nach (13) bez. (25) secundär Drucke und Deformationen infolge der Influenz *von selbst.* Die Coefficienten des obigen Ansatzes (36) sind daher zuuächst weder mit denjenigen des Systems (12), noch mit denen des Systems (28) identisch; sie berechnen sich aus jenen mit Hülfe der allgemeinen elastischen und electrischen Bedingungsgleichungen, auf die wir weiter unten eingehen, für jeden einzelnen Fall dessen speciellen Umständen gemäss, sind also überhaupt, streng genommen, *keine Constanten.* Doch gibt es Fälle, wo mit fehlender äusserer mechanischer Einwirkung trotz der electrischen Erregung die Druckcomponenten $\Xi_x, \ldots \Xi_y$ im ganzen Innern verschwinden, während die Deformationsgrössen endlich sind; hier ist dann ersichtlich dür Ansatz (36) mit (28) *vollkommen* äquivalent, und man kann deshalb die Formeln (36) als eine erste Annäherung betrachten, die bei acentrischen Krystallen einer Ergänzung bedarf, was darauf hinauskommt, dass man γ_{hh} mit $(D_{hh}-1)/4\pi$ und γ_{hk} mit $D_{hk}/4\pi$ wesentlich äquivalent ansieht.

Auch der von mir in der oben citirten Arbeit gemachte Ansatz für die piezoelectrische Erregung

$$(37)\quad \alpha = \varepsilon_{11}x_x + \varepsilon_{12}y_y + \ldots + \varepsilon_{16}x_y \text{ etc.},$$

der bei isothermen Deformationen mit

$$(38)\quad -\alpha = \delta_{11}X_x + \delta_{12}Y_y + \ldots + \delta_{16}X_y \text{ etc.}$$

äquivalent gesetzt ist, stellt, wie ich seinerzeit und jetzt wieder hervorgehoben habe, nur denjenigen Theil des stattfindenden Vorganges dar, den ich den *primären* nannte, und ignorirt die *secundären* Wirkungen.

Indessen kann man hier das Experiment leicht so einrichten, dass dieser Ansatz mit Strenge gilt. Wenn nämlich die Deformation isotherm und homogen ist, sind auch die Momente α, β, γ constant; in diesem Falle ist aber die ganze electrische Vertheilung mit einer Oberflächenbelegung des Krystalls äquivalent, und deren Wirkung auf innere Punkte kann man leicht beliebig verkleinern, ja unter Umständen ganz aufheben.

Um die Vorstellung zu fixiren, denken wir uns, wie dies bei den meisten messenden Beobachtungen geschehen ist, aus dem Krystall ein Parallelepipedon geschnitten, und dieses durch normale Drucke gegen ein Flächenpaar längs einer Kante comprimirt.

Sei demgemäss zur Erfüllung der elastischen Gleichungen gesetzt

$$\Xi_x = H_y = \Xi_y = H_z = \Xi_z = 0, \quad Z_z = \Pi,$$

so wird für $\tau = 0$ nach (28) und (29)

$$\alpha = \gamma_{11} X + \gamma_{12} Y + \gamma_{13} Z - \delta_{13} \Pi,$$
$$\beta = \gamma_{21} X + \gamma_{22} Y + \gamma_{23} Z - \delta_{23} \Pi,$$
$$\gamma = \gamma_{31} X + \gamma_{32} Y + \gamma_{33} Z - \delta_{33} \Pi.$$

Denken wir uns nun jede Fläche mit einem Leiter (Stanniolblatt) belegt und die Belege *gegenüberliegender* Flächen leitend *verbunden*, die *benachbarter* gegeneinander *isolirt*, so wird in den Belegungen je eine der Oberflächenladung der betreffenden Prismenfläche *entgegengesetzte* Ladung gebunden, während die frei werdenden *gleichartigen* Ladungen in der Schliessung einen kurzen Strom erzeugen. Die gebundenen Ladungen in den Belegungen compensiren die scheinbaren Ladungen des Krystalls, X, Y, Z verschwinden demgemäss, und es wird streng

$$\alpha = -\delta_{13} \Pi, \quad \beta = -\delta_{23} \Pi, \quad \gamma = -\delta_{33} \Pi.$$

Bezeichnet man die Flächen normal zu den Coordinatenaxen durch F_x, F_y, F_z, so sind αF_x, βF_y, γF_z die sich in den Schliessungen ausgleichenden Electricitätsmengen, deren Messung die Bestimmung der Moduln δ_{13}, δ_{23}, δ_{33} ermöglichen würde.

Die bisherigen Beobachter, so auch Riecke und ich, haben diesen Weg, welcher die Störung durch secundäre Wirkungen *streng* eliminirt, aus technischen Gründen nicht eingeschlagen, sondern einen, welcher dies nur *angenähert* leistet. Sie haben erstens nur *ein* Flächenpaar, z. B. $F_{\pm z}$, mit einem Leiter belegt, und dann die eine Belegung mit der Erde, die andere mit dem Conductor eines Electrometers verbunden. Von der ersten Belegung wird auf diese Weise die freie Ladung *völlig* beseitigt, von der letzteren um so näher, je grösser die Capacität des Conductors neben derjenigen der Belegung ist.

Auf den belegten Flächen $F_{\pm z}$ kann auf diese Weise die wirksame Ladung zur Unmerklichkeit herabgedrückt werden; auf den unbelegten Flächen, also auf $F_{\pm x}$, $F_{\pm y}$, bleiben dagegen wirksame Ladungen erhalten.

Man kann aber plausibel machen, dass letztere merkliche secundäre Wirkungen auszuüben nicht vermögen. Da nämlich gegenüberliegende Flächen, z. B. F_{+z} und F_{-z}, entgegengesetzt gleiche Ladungen besitzen, so muss deren influenzirende Wirkung sich jedenfalls dann in aller Strenge aufheben, wenn die Z-Axe eine Hauptaxe des Influenzellipsoids ist, denn unter diesen Umständen haben die Flächen F_{+z} und F_{-z}, wie auch F_{+y} und F_{-y}, vollkommen gleichwerthige Lagen. Solche Orientirungen haben Riecke und ich aber ausschliesslich bei unseren Beobachtungen benutzt. Im allgemeinen Falle bleibt allerdings eine influenzirende Wirkung der Seitenflächen übrig; indessen ist dieselbe von der Ordnung des Unterschiedes der verschiedenen Dielectricitätsconstanten, wird also jederzeit sehr klein sein, wenn anders man aus den Unterschieden der optischen Constanten der Krystalle auf die der Dielectricitätsconstanten schliessen darf, und dürfte sich deshalb im allgemeinen der Wahrnehmung entziehen.

Uebrigens sind Mittel vorhanden, um durch die Beobachtung festzustellen, ob jene secundären Wirkungen merklich sind oder nicht; denn da die influenzirende Wirkung der Seitenflächen von deren Grösse abhängt, so wird sie immer dann zu vernachlässigen sein, wenn die Beobachtungen mit Prismen von verschiedenen Verhältnissen der Kantenlängen die gleichen Resultate ergeben.

5. Um nun die strengen Formeln für die betreffenden Vorgänge abzuleiten, denken wir uns den zu erregenden Krystall im unendlichen leeren Raume befindlich, auf seine Oberflächen äussere Drucke mit den Componenten $\bar{\Xi}$, $\bar{H}$, $\bar{Z}$ pro Flächeneinheit, auf sein Inneres räumliche Kräfte mit den Componenten Ξ, H, Z pro Volumeneinheit wirkend. Erstere werden in Wirklichkeit nur durch andere feste Körper, die gegen den Krystall gedrückt werden, hervorgebracht; ein besonders wichtiger Fall ist der, dass diese äusseren Körper *Leiter* sind. Findet eine Influenzirung durch eine äussere electrische Vertheilung statt, so mag letztere sich auf absolut starren Isolatoren befinden.

Unter diesen Umständen gelten folgende Bedingungen.

Die inneren Kräfte haben die Hauptgleichungen

$$(39)\qquad \begin{cases} \Xi = \dfrac{\partial \Xi_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \Xi_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \Xi_z}{\partial z}, \\ H = \dfrac{\partial H_x}{\partial x} + \dfrac{\partial H_y}{\partial y} + \dfrac{\partial H_z}{\partial z}, \\ Z = \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z} \end{cases}$$

und die Oberflächenbedingungen

$$(40)\qquad \begin{cases} \bar{\Xi} = \bar{\Xi}_x \cos(n_i, x) + \bar{\Xi}_y \cos(n_i, y) + \bar{\Xi}_z \cos(n_i, z), \\ \bar{H} = H_x \cos(n_i, x) + H_y \cos(n_i, y) + H_z \cos(n_i, z), \\ \bar{Z} = Z_x \cos(n_i, x) + Z_y \cos(n_i, y) + Z_z \cos(n_i, z). \end{cases}$$

in denen n_i die *innere* Normale bezeichnet, zu erfüllen.

Für $\Xi_x, \ldots \Xi_y$ sind hierin nach dem p. 706 Gesagten die Werthe (13) zu setzen.

Bedingungen, welche die Verrückungen für einzelne Punkte oder Bereiche vorschreiben, kommen nicht in Betracht, wenn es sich nur um die Bestimmung von Deformationsgrösson und Momenten handelt: dagegen müssen erstere noch den sechs Kirchhoff'schen Formeln

$$(41)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 y_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 x_z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 y_z}{\partial y \partial z}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2\,\dfrac{\partial^2 x_x}{\partial y \partial z} + \dfrac{\partial^2 y_z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 y_x}{\partial z \partial x} + \dfrac{\partial^2 x_z}{\partial y \partial x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

genügen, welche die Bedingungen dafür sind, dass $x_x, \ldots x_y$ durch dasselbe System von Verrückungen ausdrückbar sind. Diese Formeln sind identisch erfüllt, wenn die Deformationsgrössen constant oder lineare Functionen der Coordinaten sind.

Die Potentialfunction der ganzen freien Ladungen hat im Krystall die Hauptgleichung

$$\Delta V_i = +4\pi\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right), \tag{42}$$

im äusseren Raum die andere

$$\Delta V_a = -4\pi\varrho_a \tag{43}$$

zu erfüllen; für α, β, γ sind dabei die Werthe (14) oder (29) zu setzen, ϱ_a ist die vorgeschriebene influenzirende Dichte.

Ist ϱ_a nur im Endlichen von Null verschieden, ist $\int \varrho_a dk$ über das gesammte influenzirende System endlich, und hat auch der Krystall endliche Dimensionen, so verhält sich V_a im Unendlichen wie die Potentialfunction endlicher Massen.

In der Grenze des Krystalls nach dem leeren Raume hin muss sein

$$\bar{V}_i = \bar{V}_a, \tag{44}$$

$$\frac{\partial \bar{V}^a}{\partial n_a} + \frac{\partial \bar{V}^i}{\partial n_i} = +4\pi\left(\bar{\alpha}\cos(n_i, x) + \bar{\beta}\cos(n_i, y) + \bar{\gamma}\cos(n_i, z)\right). \tag{44'}$$

Ist der anstossende äussere Raum von einem Conductor erfüllt, so gilt in demselben $V_a = \text{const.}$, also an der betreffenden Grenzfläche $\bar{V}_i = \text{const.}$ Diese Constante wird in praxi meist als gegeben, bez. durch Messung bestimmbar anzusehen sein. In diesem Falle hat die zweite Gleichung (44') mitunter nicht den Charakter einer Oberflächenbedingung für V_i und V_a, sondern dient zur Bestimmung der Ladung des Conductors.

Zu den vorstehenden Formeln kommen, wenn kein Temperaturgleichgewicht herrscht, noch die thermischen Bedingungsgleichungen.

Um das Problem nicht zu sehr zu compliciren, wollen wir weiterhin zunächst *isothermische* Vorgänge voraussetzen, also $\tau = 0$ nehmen.

6. Das einfachste Problem, auf welches die obigen Formeln angewendet werden können, ist das einer gegen ihre

Dicke sehr grossen, seitlich freien planparallelen Platte unter der Wirkung eines normalen Oberflächendruckes in einem homogenen electrischen Felde, da hier alle Variabeln nur von einer Coordinate abhängen.

Wir wählen die Ebenen $z=0$ und $z=H$ zur Begrenzung der Platte, bezeichnen den äusseren Druck mit Π, die äusseren electrischen Kräfte mit X_a, Y_a, Z_a, die inneren mit X_i, Y_i, Z_i und nehmen an, dass mit ersteren auch letztere constant werden. Es wird in diesem Falle

$$(45)\quad \begin{cases} -V_a = X_a x + Y_a y + Z_a z + C_a & \text{für } z > H \\ -V_i = X_i x + Y_i y + Z_i z + C_i & \\ -V_a = X_a x + Y_a y + Z_a z + C_a' & \text{für } z < 0, \end{cases}$$

worin C die Constanten bezeichnen; die Hauptgleichung (42) wird zu

$$\frac{d\gamma}{dz} = 0,$$

woraus sich γ als von z unabhängig ergiebt, während die Oberflächenbedingungen (44) und (44′) lauten

$$(46)\quad \begin{cases} X_i = X_a, \quad Y_i = Y_a \\ Z_a - Z_i = +4\pi\gamma. \end{cases}$$

Zur Befriedigung der elastischen Gleichungen setzen wir

$$\Xi_x = H_y = \Xi_y = H_z = Z_x = 0, \quad Z_z = \Pi;$$

es wird hierdurch

$$(47)\quad \begin{cases} \alpha = \gamma_{11} X_i + \gamma_{12} Y_i + \gamma_{13} Z_i - \delta_{13}\Pi, \\ \beta = \gamma_{21} X_i + \gamma_{22} Y_i + \gamma_{23} Z_i - \delta_{23}\Pi, \\ \gamma = \gamma_{31} X_i + \gamma_{32} Y_i + \gamma_{33} Z_i - \delta_{33}\Pi. \end{cases}$$

Die Combination der letzten dieser Gleichungen mit (46) liefert

$$\frac{1}{4\pi}(Z_a - Z_i) = \gamma_{31} X_a + \gamma_{32} Y_a + \gamma_{33} Z_i - \delta_{33}\Pi,$$

also

$$(48)\quad (1 + 4\pi\gamma_{33}) Z_i = Z_a - 4\pi(\gamma_{31} X_a + \gamma_{32} Y_a - \delta_{33}\Pi),$$

und durch das Einsetzen dieser Werthe erhält man α, β, γ durch X_a, Y_a, Z_a und Π ausgedrückt.

In dem einfachsten Fall, dass nur eine influenzirende Kraft parallel Z wirkt, und auch Π verschwindet, wird

also $$Z_i = \frac{Z_a}{1 + 4\pi\gamma_{33}},$$

(49) $$\alpha = \frac{\gamma_{31} Z_a}{1 + 4\pi\gamma_{33}}, \quad \beta = \frac{\gamma_{23} Z_a}{1 + 4\pi\gamma_{33}}, \quad \gamma = \frac{\gamma_{33} Z_a}{1 + 4\pi\gamma_{33}};$$

und nach (25) auch

(50) $$x_x = \frac{\delta_{31} Z_a}{1 + 4\pi\gamma_{33}}, \quad y_y = \frac{\delta_{32} Z_a}{1 + 4\pi\gamma_{33}}, \ldots x_y = \frac{\delta_{36} Z_a}{1 + 4\pi\gamma_{33}}.$$

Hier üben also auf die influenzirten Momente α, β, γ die secundären mechanischen Wirkungen keinen Einfluss; der Ansatz (36) ist demgemäss in diesem Falle mit (28) äquivalent.

Wirkt hingegen Π allein, so ist

also $$Z_i = \frac{4\pi\delta_{33}\Pi}{1 + 4\pi\gamma_{33}},$$

(51) $$\begin{cases} \alpha = -\left(\delta_{13} - \frac{4\pi\delta_{33}\gamma_{13}}{1 + 4\pi\gamma_{33}}\right)\Pi, \ \beta = -\left(\delta_{23} - \frac{4\pi\delta_{33}\gamma_{23}}{1 + 4\pi\gamma_{33}}\right)\Pi, \\ \gamma = -\left(1 - \frac{4\pi\gamma_{33}}{1 + 4\pi\gamma_{33}}\right)\delta_{33}\Pi = -\frac{\delta_{33}\Pi}{1 + 4\pi\gamma_{33}}; \end{cases}$$

(52) $$x_x = -\left(s_{13} - \frac{4\pi\delta_{33}\delta_{31}}{1 + 4\pi\gamma_{33}}\right)\Pi, \ldots x_y = -\left(s_{63} - \frac{4\pi\delta_{33}\delta_{36}}{1 + 4\pi\gamma_{33}}\right)\Pi.$$

Die zweiten Glieder in den sämmtlichen Klammern enthalten den Einfluss der secundären Wirkungen.

Ist die Krystallplatte beiderseitig mit Leitern in Berührung, die auf das Potential V_0 bez. V_1 geladen sind und kurz die *Belegungen* der Platte heissen mögen, so muss im Innern der Platte

(53) $$V_i = V_0 + (V_1 - V_0)\frac{z}{\Pi}$$

sein, also

(53′) $$X_i = Y_i = 0, \ Z_i = \frac{V_0 - V_1}{\Pi};$$

wirkt zudem wieder ein normaler Druck Π, so ist

(53″) $$\Xi_x = H_y = \Xi_y = H_z = \Xi_z = 0, \ Z_z = \Pi.$$

Demnach wird hier

(54) $$\begin{cases} \alpha = \gamma_{13}\frac{V_0 - V_1}{\Pi} - \delta_{13}\Pi, \\ \beta = \gamma_{23}\frac{V_0 - V_1}{\Pi} - \delta_{23}\Pi, \\ \gamma = \gamma_{33}\frac{V_0 - V_1}{\Pi} - \delta_{33}\Pi. \end{cases}$$

Die ersten Glieder verschwinden, wenn die beiden Leiter miteinander verbunden sind, also $V_0 = V_1$ ist; daher verschwindet in diesem Falle, wie schon oben p. 710 gesagt, auch die Selbstinfluenz des Dielectricums mit aller Strenge.

Die freien Ladungen der Grenzflächen $z = 0$ und $z = H$ folgen aus der allgemeinen Gleichung

$$\frac{\partial V_i}{\partial n_i} + \frac{\partial V_a}{\partial n_a} = -4\pi\sigma',$$

worin σ' die freie Flächendichte bezeichnet; da die aussen an das Dielectricum grenzenden Körper Leiter sind und V_i den durch (53) gegebenen Werth hat, so reducirt sich diese Formel auf

$$\frac{\partial V_i}{\partial n_i} = -4\pi\sigma' = \mp\frac{V_1 - V_0}{H},$$

worin das obere Zeichen für die Fläche $z = H$, das untere für die Fläche $z = 0$ gültig ist. σ' liegt zum Theil im Dielectricum, zum Theil im Leiter. Den ersteren Antheil σ'' können wir aus der Thatsache folgern, dass bei constanten Momenten α, β, γ das erregte Dielectricum mit einer Oberflächenbelegung von der Dichte

$$\sigma'' = -\left(\bar{\alpha}\cos(n_i, x) + \bar{\beta}\cos(n_i, y) + \bar{\gamma}\cos(n_i, z)\right)$$

äquivalent ist; dies ergiebt in unserem Falle

$$\sigma'' = \pm\gamma.$$

Hiernach erhält man für die innerhalb des *Leiters* an der Grenzfläche liegende Dichte die Formel

$$\sigma = \sigma' - \sigma'' = \pm\frac{V_1 - V_0}{4\pi H} \mp \gamma,$$

d. h. unter Rücksicht auf die dritte Gleichung (54)

$$(55) \qquad \sigma = \pm\frac{1 + 4\pi\gamma_{33}}{4\pi H}(V_1 - V_0) \pm \delta_{33}\Pi,$$

wobei das obere Vorzeichen die Dichte σ_1 der Fläche $z = H$, das untere die Dichte σ_0 der Fläche $z = 0$ bestimmt.

Diese Resultate zeigen, dass die in den *Leitern* an die Grenzfläche nach dem Dielectricum gebundenen Dichten denen, welche im *Dielectricum* an der gleichen Fläche liegen, keineswegs allgemein entgegengesetzt gleich sind; dies findet vielmehr *nur dann* statt, wenn $V_1 = V_0$ ist, die beiden Belegungen also leitend verbunden sind.

Wir wollen die Betrachtung noch in der Richtung erweitern, dass wir an die beiden Belegungen *Capacitäten* angehängt denken. Dies können wir erreichen, ohne die Potentiale von mehr Coordinaten, als von z allein, abhängig zu machen, indem wir den Belegungen des Krystalls die Form von Platten mit den beiläufigen Dicken d_1 und d_0 geben und ihnen wiederum von aussen her parallele und zur Erde abgeleitete plattenförmige Leiter nähern; dadurch entstehen zwei Condensatoren, deren Capacitäten wir C_1 und C_0 nennen.

Ist die Entfernung der beiden Condensatorplatten auf der Seite $+z$ gleich h_1, auf der Seite $-z$ gleich h_0, so wird in den Zwischenräumen die Potentialfunction die Werthe besitzen

$$V_+ = V_1 \frac{H + h_1 + d_1 - z}{h_1} \quad \text{und} \quad V_- = V_0 \frac{z + h_0 + d_0}{h_0},$$

woraus folgt

$$\frac{\partial V_+}{\partial z} = -\frac{V_1}{h_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial V_-}{\partial z} = +\frac{V_0}{h_0}.$$

Hiernach liegen auf den äusseren Flächen der beiden Belegungen die Dichten

$$\sigma_+ = \frac{V_1}{4\pi h_1}, \quad \sigma_- = \frac{V_0}{4\pi h_0},$$

die sich, wenn wir mit der Grösse F der Flächen erweitern und die Capacitäten der angehängten Condensatoren

$$\frac{F}{4\pi h_1} = C, \quad \frac{F}{4\pi h_0} = C_0$$

einführen, auch schreiben lassen

$$\sigma_+ = \frac{V_1 C_1}{F}, \quad \sigma_- = \frac{V_0 C_0}{F}. \tag{55'}$$

Haben die Belegungen ursprünglich keine Ladungen mitgetheilt erhalten, so muss

$$\sigma_+ = -\sigma_1, \quad \sigma_- = -\sigma_0$$

sein, und da $\sigma_1 = -\sigma_0$ ist, erhält man aus (55')

$$V_1 - V = -F\sigma_1 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0}\right).$$

Setzt man für σ_1 den aus (55) folgenden Werth ein, so ergiebt dies

$$V_1 - V_0 = \frac{\delta_{33} H F \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0}\right)}{1 + \frac{1 + 4\pi\gamma_{33}}{4\pi} \frac{F}{H} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0}\right)}, \tag{56}$$

was in Verbindung mit (54) auch die entsprechenden Werthe von α, β, γ zu bestimmen gestattet.

Nach dem p. 709 Gesagten kann man angenähert γ_{33} mit dem Ausdruck $(D_{33}-1)/4\pi$, also $1+4\pi\gamma_{33}$ mit D_{33} identificiren, wobei D_{33} die der Z-Axe entsprechende Dielectricitätsconstante des Krystalls bezeichnet. Dann ist

$$\frac{1+4\pi\gamma_{33}}{4\pi}\frac{F}{H}=C \tag{56'}$$

die Capacität des aus den zwei Belegungen und dem Dielectricum bestehenden Condensators, und die Formel (56) nimmt die Gestalt an

$$V_1-V_0=-\frac{\delta_{33}\Pi F\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_0}\right)}{1+C\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_0}\right)}. \tag{56''}$$

Dies zeigt, dass in allen Fällen, wo die beiden angehängten Capacitäten C_1 und C_0 gross sind gegen die Capacität C des ursprünglichen Systems, die obige strenge Formel mit der angenäherten

$$V_1-V_0=-\delta_{33}\Pi F\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_0}\right)$$

vertauscht werden kann; die letztere lässt sich auch direct aus der letzten Gleichung (54) ableiten, wenn man darin das erste Glied, d. h. die secundären Wirkungen vernachlässigt.

Hiermit ist das in 4. allgemein Bemerkte in einem speciellen Falle mit voller Strenge erwiesen.

Es erscheint unbedenklich, die erhaltenen Resultate auf die Fälle zu übertragen, wo die angehängten Capacitäten auf andere Weise erhalten werden, als oben vorausgesetzt worden. Die Formeln liefern dann die strenge Theorie einer Methode zur Bestimmung des piezoelectrischen Moduls δ_{33} durch die Beobachtung der Potentialdifferenz V_1-V_0, welche bei der Compression einer Krystallplatte auf den Belegungen ihrer Grundflächen entsteht. —

Waren die Belegungen nicht ursprünglich unelectrisch, sondern mit den Ladungen s_0 und s_1 pro Flächeneinheit versehen, so ist

$$\sigma_+=s_1-\sigma_1,\quad \sigma_-=s_0-\sigma_0,$$

und es folgt aus (55')

$$F\left(\frac{s_1-\sigma_1}{C_1}-\frac{s_0-\sigma_0}{C_0}\right)=V_1-V_0.$$

Bezeichnet man die gesammten Ladungen der Belege Fs_1 mit E_1, Fs_0 mit E_0 und setzt für σ_1 und σ_0 die aus (55) folgenden Werthe, indem man Π gleich Null wählt, so erhält man

$$(57)\qquad V_1-V_0=\frac{\frac{E_1}{C_1}-\frac{E_0}{C_0}}{1+\frac{1+4\pi\gamma_{33}}{4\pi}\frac{F}{H}\left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_0}\right)},$$

oder bei Benutzung der Abkürzung (56')

$$(57')\qquad V_1-V_0=\frac{\frac{E_1}{C_1}-\frac{E_0}{C_1}}{1+C_1\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_0}\right)}.$$

Diese Formel gibt das strenge Gesetz für die Potentialdifferenz eines Condensators, der aus einer Krystallplatte mit zwei Belegungen und zwei angehängten Capacitäten besteht.

Ist die Belegung $z=0$ zur Erde abgeleitet, so kann man sowohl V_0 gleich Null, als C_0 gleich unendlich setzen und erhält dadurch einfacher

$$V_1=\frac{E_1}{C+C_1},$$

in Uebereinstimmung mit der gewöhnlichen Theorie.

Was die Deformationen angeht, so folgt aus (25) und (53')

$$(58)\quad x_x=\delta_{13}\frac{V_0-V_1}{H}-s_{13}\Pi,\ldots x_y=\delta_{36}\frac{V_0-V_1}{H}-s_{36}\Pi;$$

wird ein Druck nicht ausgeübt, so gilt einfacher

$$(58')\qquad x_x=\delta_{31}\frac{V_0-V_1}{H},\ldots x_y=\delta_{36}\frac{V_0-V_1}{H};$$

secundäre Vorgänge sind hier also ohne Einfluss, und man darf die *Electrostriction* in dem vorausgesetzten Falle in aller Strenge nach den Formeln berechnen, die Hr. P. Curie angewandt hat.

Neben dem Problem der Platte ist das einer *Kugel* im homogenen Felde, die mechanischen Kräften nicht ausgesetzt ist, das denkbar einfachste. Man erkennt nämlich leicht, dass man für V_i und V_a dieselben Ansätze machen kann, wie bei

der *angenäherten* Theorie, welche die secundären Wirkungen ignorirt, nämlich

$$(59)\quad \begin{cases} V_i = Ax + By + Cz, \\ V_a = Lx + My + Nz + l\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + m\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + n\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}, \end{cases}$$

und daneben so verfügen, dass

$$(59')\qquad \Xi_x = \ldots = \Xi_y = 0$$

wird; denn diese Werthe erfüllen die Gleichungen (39), (40), (42), (43) und, bei geeigneter Verfügung über die Constanten A, B, C, l, m, n, auch die Grenzbedingungen (44); überdies werden die Deformationsgrössen $x_x, \ldots x_y$ nach (25) constant, befriedigen also auch die Bedingungen (41). Somit wird die Aufgabe der Influenzirung einer Kugel im homogenen Felde durch die frühere angenäherte Methode streng gelöst, und der Ansatz (36) ist auch hier mit (28) äquivalent; die Ergänzung, welche die strenge Theorie liefert, besteht in der Bestimmung der die Influenzirung begleitenden Electrostriction.

Es mag hier nochmals daran erinnert werden, dass die vorstehenden Resultate nur auf Krystalle ohne Symmetriecentrum anwendbar sind, und zwar bei Beschränkung auf die durch den Ansatz (8) für die freie Energie ξ gegebene Genauigkeit.

Wenn, wie bei diesem und einem der früheren Probleme die sämmtlichen Drucke $\Xi_x, \ldots \Xi_y$ verschwinden, so reducirt sich die Formel (34) auf

$$\eta = p\tau + p_1 X_i + p_2 Y_i + p_3 Z_i;$$

aus ihr folgt, dass bei plötzlichem Erregen des electrischen Feldes eine Temperatursteigerung eintritt, gegeben durch

$$-p\tau = p_1 X_i + p_2 Y_i + p_3 Z_i.$$

Da in den genannten Fällen X_i, Y_i, Z_i constant sind, so gilt Gleiches von τ. *Allgemein* findet diese einfache Beziehung aber keineswegs statt, da, wie gezeigt, auch bei verschwindenden mechanischen Einwirkungen innere Spannungen secundär entstehen; diese sind dann nothwendig mit dem Ort variabel, und Gleiches gilt nach den Formeln (29) auch von τ.

7. Ein besonders eigenartiges Interesse bietet, wie ich schon in der ersten Abhandlung[1]) ausgeführt habe, das Problem der gleichförmigen Dehnung, Drillung und Biegung eines gegen seinen Durchmesser langen Kreiscylinders durch Einwirkungen auf seine Endquerschnitte wegen der Beobachtungen, welche über die dabei auftretenden electrischen Verhältnisse vorliegen. Es ist sehr überraschend, dass auch dieser Fall sich mit der grössten Leichtigkeit in aller Strenge durchführen lässt.

Wir denken den Cylinder von unendlich grosser Länge, legen die Z-Axe in die Cylinderaxe, bezeichnen die auf den positiven Endquerschnitt wirkenden Momente um die X-, Y-, Z-Axe mit A, M, N, die resultirende Zugkraft parallel der Z-Axe mit Z, und machen die Annahme, dass, wie *elastisch*, so auch *electrisch* alle Querschnitte einander *gleichwerthig* sein sollen. Dem scheint zunächst zu widersprechen, dass die Endquerschnitte des Cylinders bei der vorausgesetzten Deformation im allgemeinen entgegengesetzt erregt werden und hierdurch eine influenzirende electrische Kraft parallel der Cylinderaxe entstehen muss. Da wir indessen den Cylinder unendlich lang, aber von endlichem Querschnitt vorausgesetzt haben, so wird, so lange die Ladungen der Endflächen endlich sind — was wir voraussetzen dürfen —, diese Kraft als unendlich klein zu vernachlässigen, also auch das electrische Potential als Function von x und y allein zu betrachten sein. Das Problem ist daher vollständig durch Betrachtung der XY-Ebene zu erledigen.

Da unter den gemachten Voraussetzungen bei dem rein elastischen Problem alle Druckcomponenten als lineare Functionen von x und y gefunden werden[2]), so machen wir jetzt den analogen Ansatz, der die Gleichungen (39) und (40) identisch befriedigt; speciell setzen wir

$$(60)\quad \begin{cases} \Xi_x = H_y = \Xi_y = 0, \\ -Z_z = A_3 x + B_3 y = C_3, \quad -H_z = A_4 x, \quad \Xi_z = B_5 y, \end{cases}$$

worin dann, falls $Q = \pi R^2$ den Querschnitt, $\varkappa = \frac{1}{2} R$ seinen Trägheitsradius um einen Durchmesser bezeichnet,

1) W. Voigt, l. c. p. 55 u. f.

2) W. Voigt, Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle, Abh. der k. Ges. der Wiss. zu Göttingen **34**. p. 53 u. f. 1887.

$$(61)\qquad \begin{cases} Q A_3 x^2 = -M,\ Q B_3 x^2 = -A,\ Q C_3 = Z \\ Q A_4 x^2 = -Q B_5 x^2 = \frac{1}{2} N \end{cases}$$

ist. Ferner setzen wir, um, wie die Drucke, so auch die electrischen Kräfte lineare Functionen von x und y gleich zu machen,

$$(62)\qquad V_i = \tfrac{1}{2} A_1 x^2 + A x y + \tfrac{1}{2} A_2 y^2 + B_1 x + B_2 y + C,$$

woraus folgt

$$(62')\qquad -X_i = A_1 x + A y + B_1,\ -Y_i = A x + A_2 y + B_2,\ -Z_i = 0.$$

Da hierdurch alle Deformationsgrössen in x und y linear werden, so sind auch die Bedingungen (41) identisch erfüllt.

Bei Einführung von Polarcoordinaten r und ϑ nimmt V_i die Gestalt an

$$(63)\qquad \begin{cases} V_i = \frac{1}{4}(A_1 + A_2) r^2 + C + (B_1 \cos\vartheta + B_2 \sin\vartheta) r \\ \qquad + \frac{1}{4}(A_1 - A_2) r^2 \cos 2\vartheta + \frac{1}{2} A r^2 \sin 2\vartheta. \end{cases}$$

Dies gibt die Veranlassung, für V_a die bekannte Reihe für das logarithmische Potential einer Belegung der Randcurve des Cylinderquerschnitts einzuführen, welche die Gleichung $\Delta V_a = 0$ befriedigt, und dieselbe mit dem dritten Glied abzubrechen.

Die Bedingung $\overline{V_i} = \overline{V_a}$ bestimmt ihre Constanten durch diejenigen von V_i und gibt V_a dadurch die Form

$$(64)\qquad \begin{cases} V_a = \left(\frac{1}{4}(A_1 + A_2) R^2 + C\right) \frac{l(r)}{l(R)} + \frac{R^2}{r} (B_1 \cos\vartheta + B_2 \sin\vartheta) \\ \qquad + \frac{R^4}{r^2} \left(\frac{1}{4}(A_1 - A_2) \cos 2\vartheta + \frac{1}{2} A \sin 2\vartheta\right). \end{cases}$$

Zur Bestimmung der Constanten von V_i dient einerseits die Hauptgleichung (42), welche hier lautet

$$(65)\qquad A_1 + A_2 = 4\pi[\gamma_{11} A_1 + 2\gamma_{12} A + \gamma_{22} A_2 - \delta_{13} A_3 - \delta_{14} A_4 - \delta_{23} B_3 - \delta_{25} B_5],$$

ausserdem die zweite Grenzbedingung (44'), welche die Gestalt annimmt

$$(66)\qquad \begin{cases} \left(\frac{1}{4}(A_1 + A_2) R^2 + C\right) \frac{1}{R l(R)} - \frac{1}{2}(A_1 + A_2) R - 2(B_1 \cos\vartheta + B_2 \sin\vartheta) \\ \qquad - R\left((A_1 - A_2)\cos 2\vartheta + 2A \sin 2\vartheta\right) \\ = -4\pi\{(\gamma_{11} A_1 + 2\gamma_{12} A + \gamma_{22} A_2 - \delta_{13} A_3 - \delta_{14} A_4 - \delta_{23} B_3 - \delta_{25} B_5) \frac{1}{2} R \\ \qquad + (\gamma_{11} B_1 + \gamma_{12} B_2 - \delta_{13} C_3) \cos\vartheta \\ \qquad + (\gamma_{21} B_1 + \gamma_{22} B_2 - \delta_{23} C_3) \sin\vartheta \\ + (\gamma_{11} A_1 - \gamma_{22} A_2 - \gamma_{13} A_3 - \delta_{14} A_4 + \delta_{23} B_3 + \delta_{25} B_5) \frac{1}{2} R \cos 2\vartheta \\ + ((\gamma_{11} + \gamma_{22}) A + \gamma_{12}(A_1 + A_2) - \delta_{13} B_3 - \delta_{15} B_5 - \delta_{23} A_3 - \delta_{24} A_4) \frac{1}{2} R \sin 2\vartheta. \end{cases}$$

Setzt man die Coefficienten gleicher trigonometrischer Functionen auf beiden Seiten einander gleich, so erhält man sechs Gleichungen, welche die Bestimmung der sechs Unbekannten A, A_1, A_2, B_1, B_2, C gestatten.

Der Werth von C hat kein specielles Interesse, dagegen ist es wichtig, dass in V_a der Factor des logarithmischen Gliedes, nämlich

$$\tfrac{1}{4}(A_1 + A_2)\, R^2 + C,$$

sich gleich Null findet.

Die drei Constanten A_h sind nur in den folgenden Formeln enthalten

$$(67)\quad \begin{cases} A_1(4\pi\gamma_{11}-1) + A_2(4\pi\gamma_{22}-1) + A\,8\pi\gamma_{12} = G_1, \\ A_1(4\pi\gamma_{11}-2) - A_2(4\pi\gamma_{22}-2) \qquad\qquad = G_2, \\ A_1\,4\pi\gamma_{12} + A_2\,4\pi\gamma_{12} + A(4\pi(\gamma_{11}+\gamma_{22})-4) = G_3; \end{cases}$$

in denen mit den G_h folgende nach (61) gegebene Grössen bezeichnet sind

$$(67')\quad \begin{cases} G_1 = 4\pi(\delta_{13}A_3 + \delta_{14}A_4 + \delta_{23}B_3 + \delta_{25}B_5), \\ G_2 = 4\pi(\delta_{13}A_3 + \delta_{14}A_4 - \delta_{23}B_3 - \delta_{25}B_5), \\ G_3 = 4\pi(\delta_{13}B_3 + \delta_{15}B_5 + \delta_{23}A_3 + \delta_{24}A_4). \end{cases}$$

Die Constanten B_1 und B_2 folgen aus

$$(68)\quad \begin{cases} B_1(4\pi\gamma_{11}-2) + B_2\,4\pi\gamma_{12} = 4\pi\delta_{13}C_3, \\ B_1\,4\pi\gamma_{21} + B_2(4\pi\gamma_{22}-2) = 4\pi\delta_{23}C_3. \end{cases}$$

Nach (61) bestimmt sich C_3 allein durch die Zugkraft Z, dagegen A_3, B_3, A_4, B_5 nur durch die ausgeübten Momente A, M, N.

Das für V_a erhaltene Resultat zerfällt hiernach in zwei Theile verschiedener Natur V_a' und V_a'', die sich in praxi sondern lassen; denn nach (67) und (68) hängt B_1 und B_2 nur von Z, dagegen A, A_1, A_2, C nur von den A, M, N ab.

Wirkt also nur eine Zugkraft Z, so gilt

$$(69)\qquad V_a' = \frac{R^2}{r}(B_1\cos\vartheta + B_2\sin\vartheta_0),$$

oder unter Einführung eines Hülfswinkels ϑ_0 und einer neuen Constante B

$$(69')\qquad V_a' = \frac{B}{r}\sin(\vartheta - \vartheta_0).$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass der äussere Raum durch die Ebene $\vartheta = \vartheta_0$ in zwei Hälften getheilt wird, in deren einander spiegelbildlich entsprechenden Punkten die Potentialwerthe einander entgegengesetzt gleich sind. Daraus folgt, dass in entsprechenden Punkten des Raumes auch die wirkenden Kräfte einander spiegelbildlich entsprechen und dass an entsprechenden Punkten der Oberflächen die Dichten entgegengesetzt gleich werden.

Es gilt also der Satz, *dass ein unendlich langer Kreiscylinder, aus einem acentrischen Krystall in beliebiger Orientirung hergestellt, durch longitudinalen Zug oder Druck, wenn überhaupt, jederzeit derartig erregt wird, dass er den äussern Raum in zwei Hälften von entgegengesetzt gleichem electrischen Verhalten theilt.*

Wirkt auf die Endquerschnitte keine Zugkraft, sondern wirken nur die Momente A, M, N, so nimmt V_a die Form an

$$V_a'' = \frac{R^4}{r^2}\left(\tfrac{1}{4}(A_1 - A_2)\cos 2\vartheta + \tfrac{1}{2} A \sin 2\vartheta\right), \tag{70}$$

die äquivalent ist mit

$$V_a'' = \frac{B_0}{r^2}\cos 2(\vartheta - \Theta), \tag{70'}$$

worin B_0 und Θ Constanten bezeichnen.

Dieser Ausdruck zeigt, dass der äussere Raum durch die Ebenen

$$\vartheta = \Theta \text{ und } \vartheta = \Theta + \frac{\pi}{2}$$

in vier Quadranten zerlegt wird, in deren spiegelbildlich einander entsprechenden Punkten das Potential V_a entgegengesetzt gleiche Werthe besitzt.

Es gilt demnach der weitere Satz, *dass ein unendlich langer Kreiscylinder, aus einem acentrischen Krystall in beliebiger Orientirung hergestellt, durch gleichförmige Biegung und Drillung, wenn überhaupt, stets derartig electrisch erregt wird, dass er den äussern Raum in vier gleiche Theile von entgegengesetzt gleichem electrischen Verhalten theilt.*

Das ist derselbe merkwürdige Satz, den ich bereits in meiner ersten Arbeit mitgetheilt habe; er gilt nach dem Vorstehenden also auch bei Berücksichtigung der secundären Vorgänge.

Beide Sätze gelten *angenähert*, auch wenn der Cylinder eine *endliche* Länge besitzt, so lange nur sein Durchmesser klein gegen seine Länge ist, und sein Verhalten und seine Wirkung bloss in der Nähe seiner Mitte untersucht wird.

Welche Bedeutung die Function V_a für die Theorie gewisser bequemer Beobachtungsmethoden besitzt, habe ich in meiner ersten Abhandlung auseinandergesetzt.

Die Combination der erhaltenen Resultate für $\Xi_x, \ldots \Xi_y$, X_i, Y_i, Z_i mit den allgemeinen Formeln (25) und (29) gestattet nun auch die Berechnung der Deformationsgrössen $x_x, \ldots x_y$ und der Momente α, β, γ; doch bieten die hierfür sich ergebenden Resultate minderes Interesse, als der gefundene Werth von V_a.

8. Von den Problemen der *pyroelectrischen* Erregung acentrischer Krystalle erledigt sich überaus einfach dasjenige einer Kugel vom Radius R bei constanter Temperatur.

Hier kann man alle Drucke

$$\Xi_x = \ldots = \Xi_y = 0 \tag{71}$$

und

$$\begin{cases} V_i = Ax + By + Cz, \\ V_a = L\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + M\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + N\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \end{cases} \tag{71'}$$

ersetzen. Die erste Grenzbedingung (44) ergiebt dann

$$L = -AR^3, \quad M = -BR^3, \quad N = -CR^3, \tag{72}$$

und da

$$\begin{cases} -\alpha = \gamma_{11}A + \gamma_{12}B + \gamma_{13}C - p_1\tau, \\ -\beta = \gamma_{21}A + \gamma_{22}B + \gamma_{23}C - p_2\tau, \\ -\gamma = \gamma_{31}A + \gamma_{32}B + \gamma_{33}C - p_3\tau \end{cases} \tag{72'}$$

wird, so nimmt die zweite Grenzbedingung (44') die Form an

$$\begin{aligned} A\bar{x} + B\bar{y} + C\bar{z} = -\tfrac{4\pi}{3}[&(\gamma_{11}A + \gamma_{12}B + \gamma_{13}C - p_1\tau)x \\ &+ (\gamma_{21}A + \gamma_{22}B + \gamma_{23}C - p_2\tau)\bar{y} \\ &+ (\gamma_{31}A + \gamma_{32}B + \gamma_{33}C - p_3\tau)\bar{z}]. \end{aligned} \tag{73}$$

Aus ihr folgen die Werthe von $A = -X_i$, $B = -Y_i$, $C = -Z_i$ und durch deren Einführung in (25) schliesslich auch die Deformationsgrössen.

Ist die Z-Axe eine ausgezeichnete polare Symmetrieaxe, so ist $\gamma_{23} = \gamma_{31} = \gamma_{12} = 0$, $\gamma_{11} = \gamma_{22}$, $p_1 = p_2 = 0$; hier wird also

$$(74) \qquad A = B = 0, \; C = \frac{\frac{4}{3}\pi p_3 \tau}{1 + \frac{4}{3}\pi \gamma_{33}}, \quad \gamma = \frac{p_0 \tau}{1 + \frac{4}{3}\pi \gamma_{33}},$$

wo das zweite Glied des Nenners die Wirkung der secundären Vorgänge darstellt.

In diesem Falle nehmen die Deformationsgrössen die einfache Gestalt an

$$(74') \qquad \begin{cases} x_x = a_1 \tau - \delta_{31} C = y_y, \quad z_z = a_3 \tau - \delta_{33} C, \\ y_z = z_x = x_y = 0; \end{cases}$$

hierin geben die in δ_{31} und δ_{33} multiplicirten Glieder den Effect der secundären Electrostriction. —

Diesem Problem ist sehr nahe verwandt dasjenige der Deformation einer Kugel durch einen allseitig gleichen Druck Π.

Hier genügt man den mechanischen Bedingungen, indem man

$$\Xi_x = H_y = Z_z = \Pi, \quad H_z = Z_x = \Xi_y = 0$$

setzt; die Ansätze (71') für V_i und V_a kann man beibehalten und die Rechnung leiten, wie oben; nur tritt in den Formeln (72') bez. $(\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13})\Pi$, $(\delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23})\Pi$, $(\delta_{31} + \delta_{32} + \delta_{33})\Pi$ an die Stelle von $-p_1\tau$, $-p_2\tau$, $-p_3\tau$. —

Neben dem Falle constanter Temperatur erregt besonderes Interesse derjenige der nur *oberflächlichen Erwärmung*. Mit diesem Namen habe ich in meiner ersten Abhandlung eine Temperaturvertheilung bezeichnet, die sich nur in einer unendlich dünnen Oberflächenschicht von der normalen ($\tau = 0$) unterscheidet. Sie gestattet deshalb eine besonders einfache Behandlung, weil die Deformation durch den grossen Kern von constanter Temperatur, dem die Spannungen innerhalb der unendlich dünnen Oberflächenschicht nichts anhaben können, in ganz bestimmter Weise behindert wird.

Wir gehen aus von dem Falle des Halbraumes $z < 0$, der für kleine Werthe z ein endliches, von x und y unabhängiges τ besitzt, während im übrigen $\tau = 0$ ist. Es wird dann der ganze Zustand von x und y unabhängig werden.

Die Hauptgleichungen (39) liefern hier

$$\frac{\partial \Xi_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0,$$

die Oberflächenbedingungen (40)

$$\bar{\Xi}_z = 0, \quad \bar{H}_z = 0, \quad \bar{Z}_z = 0;$$

es muss also überall Ξ_z, H_z, Z_z gleich Null sein.

Von den Deformationsgrössen müssen x_x, y_y, x_y verschwinden, z_z, y_z, x_z sind nur Functionen von z und genügen dadurch den Bedingungen (41); von den electrischen Componenten sind X und Y gleich Null, deshalb nehmen die Gleichungen $\Xi_z = H_z = Z_x = 0$ die Form an

$$(75) \quad \begin{cases} q_3 \tau = c_{33} z_z + c_{34} y_z + c_{36} z_x - \varepsilon_{33} Z_i, \\ q_4 \tau = c_{43} z_z + c_{44} y_z + c_{45} z_x - \varepsilon_{34} Z_i, \\ q_5 \tau = c_{53} z_z + c_{54} y_z + c_{55} z_x - \varepsilon_{35} Z_i. \end{cases}$$

Die Hauptgleichung (42) lautet hier

$$\frac{dZ}{dz} = -4\pi \frac{d\gamma}{dz},$$

woraus folgt

$$(76) \qquad Z_i = C - 4\pi\gamma, \quad Z_a = C',$$

unter C und C' Constanten verstanden. C' muss verschwinden, da eine unendliche ebene Schicht, die ebensoviel positive als negative Electricität in parallelen Ebenen mit constanter Dichte enthält, auf äussere Punkte eine Wirkung nicht üben kann. Die Grenzbedingung (44) bestimmt nur die Integrationsconstante in V_i, die Grenzbedingung (44′) liefert

$$(76') \qquad C = 0, \quad \text{also} \quad Z_i = -4\pi\gamma.$$

Aus dieser Beziehung, den drei Formeln (75) und der dritten Gleichung (14), welche lautet

$$(77) \qquad -r_3 \tau = \varepsilon_{33} z_z + \varepsilon_{34} y_z + \varepsilon_{35} z_x + \beta_{33} Z_i - \gamma,$$

erhält man dann leicht z_z, y_z, z_x, Z_i, γ durch τ ausgedrückt, und mit Hülfe der erhaltenen Werthe gemäss (14) auch α und β.

Die somit für den Halbraum erhaltene Lösung gestattet nun die Anwendung auf beliebig gestaltete Körper, wenn nur deren Oberfläche stetig gekrümmt ist, und die Temperatur τ bloss in einer unendlich dünnen Schicht einen von Null verschiedenen Werth besitzt, der entweder längs der ganzen Oberfläche in derselben Tiefe constant ist oder wenigstens sehr allmählich variirt. Man hat dann die Richtung der äusseren Normalen an jeder Stelle für z einzuführen und die obigen

Lösungen für α, β, γ auf sie zu transformiren, sodann nach der Grundformel

$$V_a = \int \left(\alpha_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right) d k_1$$

die Potentialfunction für äussere Punkte zu berechnen. Die Resultate werden ziemlich complicirt, doch bietet ihre Ableitung, wie ich seinerzeit gezeigt habe, keine principielle Schwierigkeit.

9. Die Bedingungen für das Problem der dielectrischen Influenzirung werden gewöhnlich in der Form aufgestellt, dass man von den Polarisationen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{N}$ nach den Richtungen von x, y, z, n ausgeht und die räumlichen und flächenhaften *wahren* Dichten ϱ und σ durch diese Grössen ausdrückt.

Es ist nämlich nach Hertz[1])

$$\text{(78)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{X} = D_{11} X + D_{12} Y + D_{13} Z, \\ \mathfrak{Y} = D_{21} X + D_{22} Y + D_{23} Z, \\ \mathfrak{Z} = D_{31} X + D_{32} Y + D_{33} Z, \end{cases}$$

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{X} \cos(n, x) + \mathfrak{Y} \cos(n, y) + \mathfrak{Z} \cos(n, z)$$

und

$$\text{(79)} \qquad 4 \pi \varrho = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z},$$

$$\text{(79')} \qquad 4 \pi \sigma_{hk} = \bar{\mathfrak{N}}_h + \bar{\mathfrak{N}}_k,$$

wobei durch (h) und (k) zwei in einer Fläche o_{hk} aneinander grenzende Dielectrica bezeichnet sind.

Dieser Weg ist in dem hier gestellten allgemeinen Problem nicht anwendbar und daher von mir in 5. durch einen anderen ersetzt, welcher an die *freien* Dichten ϱ' und σ' und die Kraftcomponenten X, Y, Z, bez. die Potentialfunction V anknüpft. Ein Grund für diese Abweichung ist sofort ersichtlich: er liegt in der Thatsache, dass bei Berücksichtigung der mechanisch-electrischen Umsetzungen die D_{hk} überhaupt ihren Sinn als der Substanz individuelle *Constanten* verlieren.

Daneben kommt aber noch ein Umstand in Betracht, der zwar schon in 6. gestreift wurde, aber so wichtig ist, dass er hier am Schluss dieser Mittheilung ausführlich dargelegt zu werden verdient.

1) H. Hertz, Wied. Ann. **40.** p. 517. 1890; statt der Hertz'schen ε_{hk} sind oben die D_{hk} gesetzt.

Man wird vielleicht zunächst geneigt sein, nach Analogie mit dem Verhalten eines ursprünglich unelectrischen, durch blosse Influenz erregten Dielectricums, auch einem piezo- oder pyroelectrisch erregten Krystall *nur freie* oder *scheinbare*, aber *keine wahren* Dichten ϱ und σ beizulegen. Indessen ist leicht nachzuweisen, *dass ein piezo- oder pyroelectrisch erregter Körper eine wahre Ladung besitzen muss.*

In der That ist nach Hertz[1]) das innere Potential eines electrisirten Systems

$$\Phi = \tfrac{1}{2} \int d e_w \int \frac{d e_f}{r},$$

wobei das eine Integral über alle *wahren* Ladungen e_w, das andere über alle *freien* e_f zu erstrecken ist. Aus den Entwickelungen Kirchhoff's[2]) geht hervor, dass, obwohl scheinbar in dem obigen Ausdruck Wechselwirkungen zwischen zwei nur durch Influenz erregten, *also wahrer Ladung baaren* Körpern *nicht* enthalten sind, doch die zwischen solchen wirkenden Kräfte durch eine Variation von Φ, welche der Dislocation jener Körper entspricht, d. h. durch die Bestimmung der betreffenden virtuellen Arbeit, richtig erhalten werden. Es liegt dies daran, dass bei diesen Dislocationen auch das Potential der Wechselwirkung zwischen dem influenzirenden System und den influenzirten Körpern sich verändert.

Aber in unserem Falle kann ein solches influenzirendes System ganz fehlen, und wenn man die Ladungen der piezo- und pyroelectrischen Körper als nur *scheinbar* annimmt, so erhält man dann weder eine Wechselwirkung zwischen ihnen, noch eine Selbstinfluenz in einem einzelnen von ihnen.

Also müssen diese Körper in jedem Falle einen Antheil wahrer Ladung mitgetheilt erhalten.

Dieser Antheil lässt sich bestimmen, wenn man, worüber p. 9 gesprochen ist, den Ansatz (28) mit (36) identificirt, also

$$D_{hh} - 1 = 4\pi\gamma_{hh}, \quad D_{hk} = 4\pi\gamma_{hk}$$

setzt.

Denn aus (79) und (42) folgt durch Subtraction

$$4\pi\left(\varrho + \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) = \frac{\partial(\mathfrak{X}-X)}{\partial x} + \frac{\partial(\mathfrak{Y}-Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\mathfrak{Z}-Z)}{\partial z};$$

1) H. Hertz, l. c. p. 606.

2) Kirchhoff, Ges. Abh. Nachtrag. p. 99 u. f.

hier ist aber die rechte Seite nach (28)

$$= 4\pi\left(\frac{\partial \alpha_s}{\partial x} + \frac{\partial \beta_s}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_s}{\partial z}\right)$$

und somit

$$-\varrho = \frac{\partial(\alpha-\alpha_s)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta-\beta_s)}{\partial y} + \frac{\partial(\gamma-\gamma_s)}{\partial z}, \tag{80}$$

worin $(\alpha-\alpha_s)$, $(\beta-\beta_s)$, $(\gamma-\gamma_s)$ die Differenzen der *gesammten* und der bei constanter Spannung und Temperatur *allein durch Influenz erregten* Momente sind. Diese bestimmen sich aus (29), sodass man schliesslich für die wahre räumliche Dichte ϱ erhält:

$$\begin{cases} \varrho = \dfrac{\partial}{\partial x}(\delta_{11}\Xi_x + \ldots \delta_{16}\Xi_y - p_1\tau) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\delta_{21}\Xi_x + \ldots \delta_{26}\Xi_y - p_2\tau) \\ \qquad + \dfrac{\partial}{\partial z}(\delta_{31}\Xi_x + \ldots \delta_{36}\Xi_y - p_3\tau). \end{cases} \tag{80'}$$

Ganz ebenso liefert die Differenz der Formeln (79') und (44'), da $\mathfrak{N}_a = N_a$ ist,

$$4\pi\left(\sigma + \bar{\alpha}\cos(n_i, x) + \bar{\beta}\cos(n_i, y) + \bar{\gamma}\cos(n_i, z)\right) = \mathfrak{N}_i - N_i.$$

Hierin wird die rechte Seite nach (28)

$$= 4\pi\left(\bar{\alpha}_s\cos(n_i, x) + \bar{\beta}_s\cos(n_i, y) + \bar{\gamma}\cos(n_i, z)\right),$$

woraus folgt

$$-\sigma = (\bar{\alpha}-\bar{\alpha}_s)\cos(n_i, x) + (\bar{\beta}-\bar{\beta}_s)\cos(n_i, y) + (\bar{\gamma}-\bar{\gamma}_s)\cos(n_i, z). \tag{81}$$

Setzt man hier endlich die Werthe (29) ein, so erhält man die Grösse der wahren Oberflächendichte

$$\sigma = (\delta_{11}\bar{\Xi}_x + \ldots \delta_{16}\bar{\Xi}_y - p_1\bar{\tau})\cos(n_i, x) + (\delta_{21}\bar{\Xi}_x + \ldots \delta_{26}\bar{\Xi}_y - p_2\tau)\cos(n_i, y) + (\delta_{31}\bar{\Xi}_x + \ldots \delta_{36}\bar{\Xi}_y - p_3\tau)\cos(n_i, z). \tag{81'}$$

Hieraus ergiebt sich, *dass die bei constanter Influenz durch blosse mechanische und thermische Einwirkungen erregten Momente wahre Ladungen repräsentiren.*

Diese frappirenden Resultate haben ein naheliegendes Analogon in der Theorie des Magnetismus. Wie schon Hertz[1]) ausgesprochen hat, repräsentirt influenzirter *vergänglicher* Magnetismus *scheinbare* oder *freie* Ladungen, *permanenter* aber

1) H. Hertz, l. c. p. 608.

wahre, — ein Resultat, welches zwar neuerdings angefochten ist, aber meines Erachtens nicht umgestossen werden kann, solange man mit diesen Namen dieselben Bedeutungen verbindet, wie Hertz.

Dass man auf derartige Schwierigkeiten gerathen kann, ist im Grunde nicht zu verwundern; denn die Definitionen und Bezeichnungen der „wahren“ und der „freien“ Ladungen knüpfen an specielle Vorgänge an, die vielleicht weder mit der permanenten Magnetisirung, noch mit der piezo- und pyroelectrischen Erregung innerliche Verwandtschaft besitzen; demgemäss ist es nur natürlich, dass die speciellen Vorstellungen, die in *jenen* Fällen für die Wahl der Bezeichnungen maassgebend gewesen sind, in den letzteren ihre Anwendbarkeit verlieren.

Göttingen, November 1894.

12. *Selbstthätige Kolbenquecksilberluftpumpe; von F. Neesen.*

Unter einer Kolbenquecksilberluftpumpe verstehe ich die Gattung, bei welcher wie in der Geissler'schen oder Töpler'schen Ausführung ein grösserer Behälter durch aufsteigendes und dann wieder fallendes Quecksilber luftleer gemacht wird. Zum selbstthätigen Betriebe einer solchen Pumpe kann eine Ventileinrichtung, welche ich für eine andere Pumpenart (Tropfenpumpe) früher angegeben habe und die sich sehr bewährt hat, benutzt werden. Man erhält so eine einfache, compendiöse und dementspreckend billige Anordnung.

A Fig. 1 ist der Quecksilberbehälter, in welchem sich eine nachher näher beschriebene und in Fig. 2 im besonderen dargestellte Ventileinrichtung befindet. Von *A* führt ein Glasrohr zur Kugel *C*. Letztere geht in die doppelt gebogene Capillare *c* über, welche nach der zweiten Umbiegung an ein weiteres Röhrchen *d* angeschmolzen ist, das zu einem noch weiteren horizontal liegenden Rohre *e* führt. Dieses ist durch eine wieder doppelt gebogene Capillare *f*, die gleichfalls in ein weiteres Röhrchen *g* mündet, mit einem zweiten horizontal liegenden Rohre *h* verbunden. Von letzterem geht eine Leitung *z* unter Einschaltung eines Rückschlagsventils *v* zur Wasserpumpe. Zum Ein- und Auslassen des Abflussquecksilbers ist das Rückschlagventil am Boden mit einem Hahn versehen.

Vor dem Ansatz der Kugel *C* zweigt sich ein Rohr *E* ab, das zu dem auszupumpenden Recipienten führt. Ein in *E* eingeschaltetes Glasventil verhindert den Uebertritt von Quecksilber in den Recipienten. Trockengefäss und Manometer werden mittels der von mir angegebenen Quecksilberdichtungsgefässe angeschlossen.

Der Behälter *A* ist gleichfalls durch das Rohr *i* an die Wasserpumpe angeschlossen unter Einschaltung eines Zweiweghahnes, der gestattet, die Wasserpumpe oder *A* mit der äusseren Luft zu verbinden.

Das Ventil hat folgende durchaus sicher wirkende Einrichtung:

Behälter A wird durch einen Deckel B verschlossen, in welchem sich zwei Ventile k_1 und k_2 befinden, die fest miteinander verhunden sind. Der eine Ventilsitz steht durch Rohr i mit der Wasserpumpe, der andere mit der äusseren Luft in Communication. An B ist ein Glasgefäss G angekittet, welches einen von einem Rohr M umgebenen Canal N enthält. Dieser Canal dient dazu, die Stange s, an der die

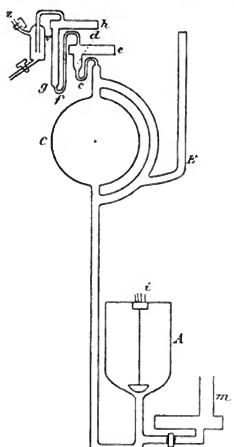


Fig. 1.

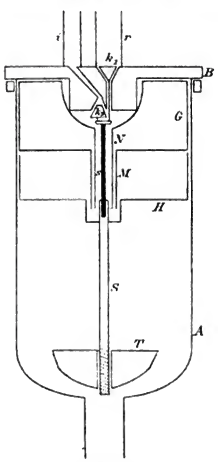


Fig. 2.

Ventilkörper k_1 und k_2 befestigt sind, durchzulassen. Auf s ist eine zweite Stange S aufschraubbar, an welcher das hohe Holzgefäss H und der Schwimmer T, beide verschiebbar, sitzen. In das Gefäss H wird Quecksilber gefüllt. Behälter A enthält das zum Betriebe der Pumpe nöthige Quecksilber.

Tritt nun die Wasserpumpe in Thätigkeit, so saugt dieselbe durch z vor. Luft, welche durch das, vermöge des Auftriebes von T und H hochgedrückte Ventil k_1 eintritt, drückt das Quecksilber aus A nach C, bis der Schwimmer T frei wird.

Dann zieht die Schwere der an den Ventilen hängenden Theile das Ventil k_1 herunter, schliesst es und öffnet k_2, sodass die Wasserpumpe die Luft in A verdünnt. Das Quecksilber fällt nach A zurück und lässt in C einen leeren Raum. Nachdem das Gefäss H vom Quecksilber erreicht ist, wird durch den vergrösserten Auftrieb das Ventil wieder umgesteuert, k_1 geöffnet, k_2 geschlossen. Die eindringende äussere Luft drückt das Quecksilber nach C, das Spiel wiederholt sich. Durch Einstellen des Schwimmers T lässt sich die Umsteuerung des Ventiles bei jedem beliebigen Stande des Quecksilbers in C erreichen; zunächst ist die Einstellung derart, dass die Umsteuerung erst erfolgt, wenn das Gefäss h gefüllt ist. Die Capillaren c und f dienen in der früher von mir angegebenen Weise dazu einen Abschluss der Räume h und e gegeneinander und die Kugel C durch den in diesen Capillaren zurückbleibenden Quecksilbertropfen herzustellen, sodass die aus C durch das aufsteigende Quecksilber herausgedrückte Luft in die luftverdünnten Räume e und h übertritt. Das Zurückbleiben des Abschlusstropfens wird dadurch gesichert, dass die Capillare in ein weiteres Röhrchen übergeht.

Gleichzeitig mit dem eben geschilderten Spiel geht ein Uebergang von Quecksilber von Gefäss G nach H und umgekehrt vor sich. Bei der ersten Verdünnung der Luft in A entweicht zum Theil die Luft in G; wird nun Ventil k_1 geöffnet, so drückt die eindringende äussere Luft des Quecksilber aus H in das luftverdünnte Gefäss G, sodass die Belastung der Ventile k_1 k_2 vermindert wird, also der Auftrieb von T genügt, die Ventile hoch zu halten. Ist das Quecksilber unter T gesunken, so tritt Umsteuerung der Ventile ein; wegen der hiernach eintretenden Luftverdünnung in A fällt das Quecksilber aus G nach dem Holzgefäss H zurück, beschwert dadurch die Ventile, sodass der Auftrieb von T nicht ausreicht die Ventile zu heben; dieses geschieht erst, wenn das Gefäss H von dem Quecksilber erreicht wird.

Ist ein ziemlicher Grad von Luftverdünnung erreicht, so kann das Anschlagen des aufsteigenden Quecksilbers gegen die Wand der Abschlusscapillaren oder das Ventil in E ein Zerbrechen der Glastheile oder Festsetzen des Ventiles bewirken. Da es dann nicht mehr erforderlich ist, dass das Quecksilber

bis zum Anfüllen von *h* aufsteigt, sondern dasselbe nur eben in *e* eindringen muss, so wird *T* nun so hoch geschraubt, dass die Umsteuerung der Ventile kurze Zeit bevor das Quecksilber die Capillare *c* erreicht, eintritt. Das Beharrungsvermögen des in Bewegung befindlichen Quecksilbers genügt, um letzteres noch durch die Capillare *e* zu treiben. Gleichzeitig wird wegen der in *A* eintretenden Luftverdünnung der Bewegung des Quecksilbers so verlangsamt, dass ein Schlagen nicht mehr stattfindet.

Anstatt den Schwimmer *T* zu verstellen, wozu natürlich die Platte *B* abgenommen werden muss, kann man den gleichen Zweck erreichen, wenn man den Hahn *n* zu dem seitlich unter *A* angebrachten kleinem Gefässe öffnet, während *A* mit der äussern Luft in Verbindung steht. Man lässt aus *A* nach *m* so viel Quecksilber übertreten, als vorher zur Füllung der Räume *h* und *e* nöthig war. Eine an *m* angebrachte Marke dient hierzu als Anhalt. Soll dieses nach *m* übergegangene Quecksilber für das Spiel der Pumpe im Anfange der Luftverdünnung wieder zurück nach *A*, so braucht selbstverständlich der Hahn *n* nur geöffnet werden, während *A* luftverdünnt ist. Diese Verminderung der in *A* befindlichen Quecksilbermenge bringt auch den Vortheil mit sich, das zur Umsteuerung des Ventiles durch Heben von *H* das Quecksilber in *A* tiefer sinken muss, also die Kugel *C* längere Zeit mit dem luftleer zu machenden Recipienten in Verbindung steht, was gerade bei vorgeschrittener Verdünnung von der grössten Bedeutung ist.

Ein zweiter Gewinn dieser früheren Ventilumsteuerung liegt in einer wesentlichen Zeitersparniss, da zur Auffüllung der Gefässe *l* und *h* wegen des hier zur Gebote stehenden geringen Druckes und des Widerstandes in den Capillaren verhältnissmässig viel Zeit gebraucht wird.

Das Ventil habe ich bei einer anderen Ausführung durch einen Hahn ersetzt. Hierbei ist das Gefäss *G* unnöthig und *N* durch einen vollen Hohlcylinder ersetzbar, weil man die Anordnung so trifft, dass der an dem Hahnküken befestigte Arm, an welchem auch die Stange *S* hängt, nach dem Herunterziehen dnrch das Gewicht *T* so steht, dass der Hebelarm für die Drehung des Hahnes klein ist, während dieser

Hebelarm bei dem Heben des Armes durch den Quecksilberauftrieb grösser wird. Das dem Auftriebe entgegen wirkende Gegengewicht ist an dem Hahnküken ausserhalb des Gefässes *A* angebracht, sodass eine Regulirung während des Spieles der Pumpe erfolgen kann.[1])

Der Grad der Luftverdünnung, welcher mit dieser Pumpe erzielt wird, ist derselbe wie bei allen Pumpen dieser Art, also den Kolbenluftpumpen. Ueber eine vergleichende Untersuchung zwischen den Kolben- und Tropfenluftpumpen habe ich in den Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft (Mai 1895) berichtet.

1) Ausgeführt werden die Pumpen vom Glasbläser W. Niehls, Berlin N., Schönhäuser Allee 168a.

13. *Ueber einen neuen Compensationsapparat; von A. Raps.*

(Hierzu Taf. V Fig. 1—4.)

Die grossen Vervollkommnungen, welche die electrischen Messinstrumente in den letzten Jahren erfuhren, machten immer mehr das Bedürfniss nach Normalapparaten für Spannungs- und Strommessungen fühlbar, welche in der Zeit unveränderlich und von der Temperatur oder Störungen des äusseren Feldes unabhängig waren; dabei muss deren Bedienung so einfach sein, dass sie ohne besondere Rechnungen die Resultate sofort abzulesen gestatten.

Die sogenannten Compensationsmethoden, wie sie zuerst von Poggendorff und du Bois-Reymond angegeben wurden, haben sich für derartige Zwecke seit langem als sehr brauchbar bewiesen.

Schon du Bois-Reymond [1]) liess sich von Halske für diese Zwecke ein Instrument mit rund angeordnetem Schleifdraht herstellen, welches er Compensator nannte. Aus dieser Construction ist das bekannte Universalgalvanometer der Firma Siemens & Halske hervorgegangen.

Auch der Universalcompensator von Beetz [2]) dient zu ähnlichen Zwecken.

Einer durch den Gebrauch zweier Galvanometer umständlicheren Methode bediente sich Latimer Clark [3]) bei der Vergleichung von electromotorischen Kräften. Er gibt auch schon ein Verfahren an, welches die Spannungen direct abzulesen gestattet. Dieselbe, etwas modificirtere Methode wandte Fleming [4]) zur Untersuchung von Daniellelementen an, und führte dafür den Namen Potentiometer ein.

Die Verbesserungen, welche die Widerstandsmessungen

1) Wiedemann, Electricität **1.** p. 645. 1882.
2) Beetz, Wied. Ann. **1.** p. 1. 1878.
3) Latimer Clark, Phil. Transactions **164.** p. 1 ff. 1874.
4) Fleming, Phil. Mag. **20.** p. 126. 1885.

durch Anwendung von Legirungen erfuhren, welche ihren Widerstand mit der Temperatur nicht ändern, liessen eine grössere Genauigkeit erreichen, als es durch Schleifdrähte möglich war. Eine Construction, welche statt der Schleifdrähte zwei Reihen durch Widerstände verbundener Knöpfe anwendet, auf welchen zwei Kurbeln schleifen, wurde in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt von Hrn. Feussner[1]) ausgearbeitet und hierdurch ein sehr brauchbarer, bereits vielfach eingeführter Apparat erhalten. Die Resultate sind dabei ohne weiteres an dem Apparate abzulesen oder sie ergeben sich durch einfache Rechnungen.

Der Apparat besitzt jedoch nur zwei Kurbeln; da aber die Stromstärke in dem Hülfsstromkreise, an welchem einmal das Normalelement und dann die zu untersuchende Spannung angelegt wird, unverändert bleiben soll, so musste zur Erreichung von mehr als zwei Stellen im Resultat entweder Ballastwiderstand eingeschaltet und hierdurch eine sehr grosse Hülfsbatterie verwendet werden oder beim Messen ein Umstöpseln vorgenommen werden, welches die Einstellung sehr erschwerte. Hierbei wurde nämlich der Widerstand, welcher zwischen den Kurbeln ausgeschaltet wurde, ausserhalb derselben wieder in den Hülfsstromkreis eingeschaltet, damit die Summe der Widerstände und damit auch die Stromstärke gleich blieb. Dieses Umstöpseln kann zwar automatisch geschehen und ist auch in dem Compensationsapparate von Weston ausgeführt worden. Es führt jedoch zu umständlichen Einrichtungen, welche viele Widerstände erfordern.

Ferner gestattete die Ausbildung des Cadmiumelementes, dessen Angaben nahezu unabhängig von der Temperatur sind, das Normalelement an einen festen Widerstand des Compensationskreises anzulegen, wodurch eine ungemeine Vereinfachung bei der Messung erzielt wird.

Diese Punkte bewogen die Firma Siemens & Halske einen Compensationsapparat auszuarbeiten, welcher bei einer sehr kleinen Messbatterie die automatische Vertauschung der Widerstände in einer sehr einfachen Weise umgeht.

Der Apparat, welcher neben einer sehr bequemen und

1) Feussner, Zeitschr. für Instrumentenkunde p. 117. 1890.

übersichtlichen Bedienung Messungen gestattet, welche bis auf 0,1 Proc. genau sind, soll im folgenden beschrieben werden.

In Fig. 1 sind die Stromläufe des Apparates schematisch dargestellt.

Man muss hierbei zwei Stromläufe vollständig gesondert betrachten, welche durch starke bez. schwache Linien angedeutet sind; in den Fällen, in welchen die beiden Stromläufe gemeinsame Leitungen haben, sind die Linien doppelt gezeichnet, obschon in Wirklichkeit nur einfache Leitungen vorhanden sind.

Der stark gezeichnete Stromkreis wird benutzt, wenn Spannungen über 1 bez. 10 Volt zu messen sind, der schwach gezeichnete, wenn Spannungen unter 1 bez. 10 Volt gemessen werden sollen. Die zu messende Spannung wird in beiden Fällen nun an die beiden mit $X(+\ -)$ bezeichneten Klemmen angelegt und durch einfaches Umlegen des dreipoligen Umschalters L der betreffende Stromlauf eingeschaltet.

Betrachten wir zunächst den stark gezeichneten Stromlauf, welcher der Schaltstellung „Hohe Spannung" entspricht.

Der Strom tritt bei $+X$ ein, geht durch den mittleren Arm des Umschalters L, durch die Widerstände bez. 10200, 1020, 102,0 Ω, durch einen Widerstandskasten, welcher bis 150 000 Ω einzuschalten gestattet, dann durch den oberen Arm des Umschalters L zur Klemme $-X$.

Parallel zu einem der durch Stöpsel auszuwählenden Widerstände von 10 200, bez. 1020, bez. 102,0 Ω liegt ein Kreis, welcher das Normalelement W, das Galvanometer G und einen Taster T enthält, welcher diesen Kreis zu schliessen gestattet (Hebel L^1 liegt auf N, wie Fig. 1 zeigt). Man kann nun den Strom im Hauptstromkreis auf 0,0001 bez. 0,001 bez. 0,01 Amp. bringen, indem man den Stöpsel 10 200 bez. 1020 bez. 102,0 zieht und den Widerstand des zwischen den Klemmen AA' eingeschalteten Widerstandskastens solange ändert, bis das Galvanometer G beim Drücken des Tasters T keinen Strom anzeigt. Es ist dann die an den Enden des einen der drei Widerstände w herrschende Spannung gleich der des Normalelementes e, also $iw = e$. Nun ist e nahezu gleich 1,020 int. Volt. Wenn wir also

$$w = \left\{\begin{matrix} 10\,200 \\ 1\,020 \\ 102 \end{matrix}\right\} \Omega \text{ machen, ist } i = \left\{\begin{matrix} 0{,}0001 \\ 0{,}001 \\ 0{,}01 \end{matrix}\right\} \text{Amp.}$$

Da die electromotorische Kraft des Cadmiumelementes praktisch von der Temperatur unabhängig ist, können die Widerstände fest sein.

Da aber die zu bestimmende Spannung $E = iw$ ist, entspricht den drei Stöpseln die Empfindlichkeit $E = 0{,}0001,\ 0{,}001,\ 0{,}01\ w$, wobei der Widerstand des betreffenden der drei Stöpsellöcher selbstverständlich mitzuzählen ist.

Auf diese Weise können Messungen von 1,020 Volt bis 1500 Volt ausgeführt werden und zwar ist die Genauigkeit dieser Messungen so gross, wie die, mit welcher die electromotorische Kraft des Normalelementes bestimmt ist.

Will man die electromotorischen Kräfte messen, welche unter 1 Volt (bis zu 0,00001 Volt) liegen, so wird der Umschlag L auf „Niedere Spannung" geworfen (Stellung Fig. 1). Hierdurch wird die Hülfsbatterie H eingeschaltet und wir müssen nun den in der Fig. 1 dünn eingezeichneten Stromlauf verfolgen.

Von dem Pole der Hülfsbatterie $+ H$ geht der Strom durch den unteren Hebel des Umschalters L durch die 1000 Ω Widerstände bei K, dann durch die 0,1 Ω Widerstände bei B, durch die 10 Ω Widerstände bei K_2. Er passirt dann die Widerstände zum Einstellen der Empfindlichkeit 10 200, bez. 1020. bez. 102 Ω, den Regulirwiderstand 150 000 Ω und gelangt zum — Pol der Hülfsbatterie H.

Ganz wie eben beschrieben kann nun die Stromstärke in diesem Hülfsstromkreis durch Compensation mit dem Normalelement (Hebel L^1 liegt auf N, wie Fig. 1 zeigt) auf 0,0001 bez. 0,001 bez. 0,01 Amp. gebracht werden. An diesen Hülfsstromkreis wird nun die zu suchende Spannung angelegt durch Umschalten der Kurbel L^1 auf x und Stromlosmachung des Galvanometerkreises G, indem derselbe durch Einstellen der Kurbeln K, K^1, K^2, K^3, B an einen Widerstande w des Hülfsstromkreises angelegt wird.

Wir haben dann wieder, wenn i die Stromstärke im Hülfsstromkreise bedeutet: $E = iw$, also $E = 0{,}0001,\ 0{,}011,\ 0{,}01\ w$.

Die Schaltung der Kurbeln ist nun die Folgende:

Die Kurbeln K und K^2 besitzen je zwei Schleiffedern, mittels deren die zwischen je zwei Knöpfen der K bez. K^2 Reihe noch eine Reihe von Widerständen der K^1 bez. K^3 Reihe parallel geschaltet werden kann. Von diesen letzteren nehmen dann die Kurbeln K^1 bez. K^2 das zu messende Potential ab.

Legen wir nämlich an zwei Punkten eines Stromkreises, welche einen Widerstand w zwischen sich haben, einen Widerstand w^1 parallel an, constante Stromstärke im unverzweigten Kreise vorausgesetzt, so sinkt die Spannung zwischen diesen beiden Punkten von e auf

$$\frac{e\,w'}{w + w'}$$

Besteht nun w' aus n gleichen Unterabtheilungen w_0, so ist die Spannung

$$e\,\frac{n\,w^0}{w + n\,w_0}$$

Am $a$ten dieser n-Widerstände ist die Spannung

$$e_a = \frac{e\,a\,w^0}{w + n\,w^0}$$

Der Widerstand w_0 kann beliebig gross gewählt werden, um Uebergangswiderstände beliebig unschädlich zu machen. Es ist dann unter Umständen noch ein Vorschaltswiderstand vor dem ersten Knopf in den Kurbelreihen K' und K^3 nöthig.

In unserem Falle sind nun zwischen zwei Knöpfen des Kurbelkreises R je 1000 Ω eingeschaltet, zwischen den Federn der Kurbel R liegen 9 mal 1000 Ω. Demnach ist

$$e_a = a\,e\,\frac{1000}{1000 + 9 \cdot 100} = a\,\frac{e}{10}.$$

Am dritten Knopf der Kurbel K' herrscht daher nur 0,3 e.

Bezeichnen wir die zwischen zwei Knöpfen der K-Reihe herrschenden Spannung mit 1000, so herrscht zwischen zwei Knöpfen der K'-Reihe nur eine Spannung von 100.

Allerdings sind die Stellen, in welchen die beiden Federn der Kurbeln $K K^2$ auf den Knöpfen aufliegen nicht stromlos, sodass der Uebergangswiderstand in Betracht kommt. Dieser kann das Resultat aber in den von uns gesteckten Grenzen (0,1 Proc.) nicht beeinflussen, wie eine einfache Ueberlegung zeigt, um so weniger, als auf die Ausführung der Contacte und

Schleiffedern grosses Gewicht gelegt ist, wie nachher noch näher auseinandergesetzt werden soll. Ausserdem sind die reibenden Flächen durch angelöthete, biegsame Schnüre verbunden, sodass deren Widerstand gar nicht in Betracht kommt. Der Uebergangswiderstand kann übrigens, wie schon eben erwähnt wurde, durch Parallelschalten von genügend hohen Widerständen beliebig klein gemacht werden, ohne dass die Empfindlichkeit des Instrumentes praktisch leidet.

Ebenso verhält es sich mit den beiden anderen Kurbeln. Zwischen je zwei Knöpfe der K^2-Reihe sind 10 Ω eingeschaltet, es herrscht also eine Spannung von 10 Ω zwischen je zweien. Parallel zu einem dieser Widerstände liegt die Reihe K^3, welche 9 mal 10 Ω enthält. Es herrscht also dort analog der Betrachtungen bei der K- und K'-Reihe nur die Spannung 1.

Eine ähnliche Schaltung mit einem Kurbelpaar ist übrigens zu anderen Zwecken auch bei der bekannten Thomson-Varley'schen Brücke angewandt.

Auf diese Weise ist es möglich mit Hülfe von einer verhältnissmässig geringen Anzahl von Widerständen eine Bestimmung der Spannung bis auf die 4. Stelle zu machen, ohne dass man eine Umstöpselung vorzunehmen braucht. Die 5. Stelle wird durch Verstellen der Kurbel B erhalten. Hierdurch wird allerdings der Gesammtwiderstand des Hülfsstromkreises geändert und hiermit auch dessen Stromstärke. Diese Aenderung geht aber in das Resultat in Maximo nur mit einem Fehler von 0,1 Proc. hinein. Man kann diesen übrigens dadurch auch noch ganz vermeiden, dass man den Widerstand bei AA^1 entsprechend ändert. Als Hülfsbatterie wurde bisher mit einer grösseren Type von Hellesen's Trockenelementen gearbeitet, welche sich zu diesem Zwecke sehr gut bewährt haben.

Man kann bei diesem Apparate Trockenelemente um so mehr verwenden, als sich die Richtigkeit der Stromstärke im Hülfsstromkreise jeden Augenblick dadurch controlliren lässt, dass man den Hebel L' und X nach N wirft und eventuelle kleine Fehler durch Widerstandsänderungen bei AA' verbessert.

Der Apparat lässt sich auch durch eine einfache Vorrichtung für jedes andere Normalelement gebrauchen, auch

für solche, deren electromotorische Kraft mit der Temperatur variirt. Es ist dann nur nöthig, dieses Element an die Stelle von W hinzubringen, und den doppelpoligen Umhalter U nach rechts umzuschlagen. Dann liegt das Normalelement nicht mehr an den festen Empfindlichkeitswiderständen, sondern es liegt an den Kurbeln K' und K^3, sodass durch Einstellung der Kurbeln der Hülfsstromkreis durch jede beliebige electromotorische Kraft auf eine bestimmte Stromstärke gebracht werden kann.

Fig. 2 zeigt in Oberansicht die Ausführung des Apparates, dessen einzelne Theile mit denselben Buchstaben bezeichnet sind, wie diejenigen der schematischen Fig. 1. Die Umschalter liegen an den Seiten des Kastens bequem zur Hand, ohne Platz wegzunehmen.

Der Widerstand von 150 000 Ω wird an die Laschen $A\,A'$ angelegt und kann hierzu ein gewöhnlicher Widerstandskasten Verwendung finden, der im Laboratorium vorhanden ist. Der Taster T gestattet dem Galvanometerkreis entweder nur für einen Augenblick oder dauernd zu schliessen, und den Galvanometerkreis kurz oder mit 100 000 Ω als Ballastwiderstand einzuschalten, um dem Normalelemente beim Messen unbekannter Spannungen nicht zuviel Strom zu entnehmen. Die Einrichtung dieses Tasters zeigt Fig. 4. Durch einfachen Druck auf den Knopf b wird die Contactfeder d heruntergedrückt, indem der Stift c in seinen Führungen abwärts gleitet; nach dem Loslassen federt er wieder hoch. Sobald man aber den Knopf etwas nach vorn drückt, sodass die schräge Fläche h horizontal zu liegen kommt, bleibt die Feder dauernd herabgedrückt.

Besondere Sorgfalt wurde den Schleifflächen der Kurbeln K und K^2 zugewendet.

Die Construction der Doppelkurbeln geht aus Fig. 3 hervor.

Die Federn f, f', f'' werden durch Kupferstreifen gebildet, deren rechtwinklig umgebogene, auf den Knöpfen $K\,K'$ aufliegende Stirnseiten so gebogen sind, dass sie fast die ganze Fläche der Knöpfe $K\,K'$ bestreichen um Riefenbildungen zu vermeiden. Die Schleiffedern sind zwischen Cylinder und Scheiben passend isolirt eingeklemmt, welche erstere gleichzeitig die Stromleitung besorgen. Die Zuleitung der Feder f

liegt in der Mutter b der Schraube a, die der Feder f' in dem federnden Ring c, die der Feder f'' an der Schraube d. Wie aus der Figur leicht ersichtlich kann durch Lösung der gemeinsamen Befestigungsschraube das ganze System herausgezogen werden und ist nun der Reinigung leicht zugänglich.

Selbstverständlich lassen sich mit dem Apparate auch Stromstärken in Ampère messen, wenn man den zu messenden Strom durch einen änderungsfreien Widerstand leitet, die Spannung an dessen Enden bestimmt und die Angaben des Apparates in Volt durch den Widerstand in Ω theilt.

Die einfache Gebrauchsanweisung für den Apparat würde lauten wie folgt:

1. Spannungen über 1 Volt.

Umschalter L auf „Hohe Spannung". Die zu messende Spannung an X angelegt, die richtige Empfindlichkeit $E = 0{,}0001$, bez. 0,001, bez. 0,01 gezogen. Umschalter L' auf N. Taster (auf 100 000 Ω, dann auf 0) gedrückt und solange an dem Widerstande von 150 000 Ω geändert, bis der Galvanometer keinen Strom anzeigt. Der im Kasten gezogene Widerstand + dem, welcher unter der gewählten Empfindlichkeit steht (10 200, bez. 1020, bez. 102), getheilt durch die Decade der Empfindlichkeit ist die gesuchte Spannung.

2. Spannungen unter 1 Volt. (An H liegen jetzt 4 bez. 12 Volt.)

Hebel L auf „Niedere Spannung", Empfindlichkeit gezogen, Hebel L' auf N, Taste gedrückt, in dem Widerstandskasten bei AA' so lange geändert, bis Galvanometer ruhig.

Dann L' auf X, an den Kurbeln $KK'K^2K^3B$ so lange gedreht, bis Galvanometer wieder stromlos. Dann ergeben die an den Kurbeln stehenden Zahlen, dividirt durch die Empfindlichkeit, die gesuchte Spannung.

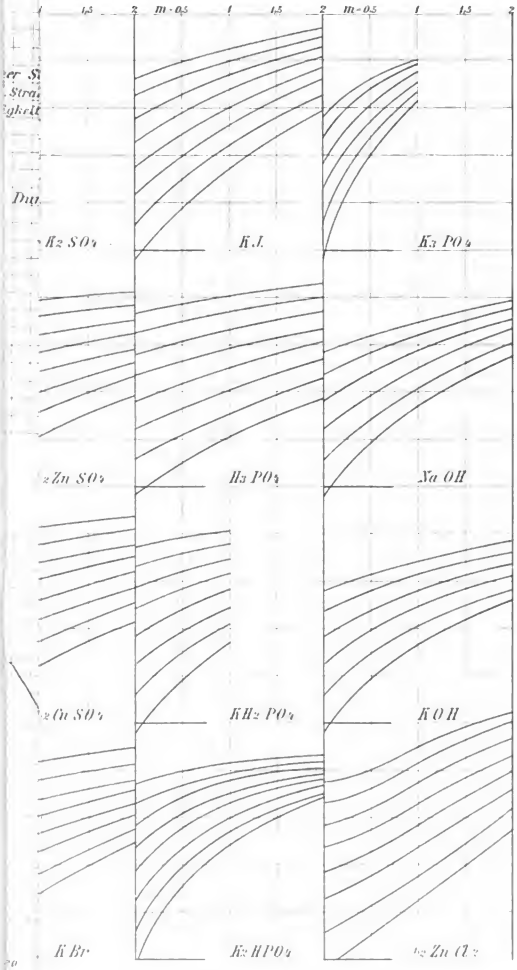
Schliesslich habe ich noch die angenehme Pflicht, Hrn. Dr. Lindeck, welcher mir bei der Construction dieses Apparates wesentliche Dienste geleistet hat, meinen besten Dank auszusprechen.

Berlin, im Mai 1895.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

g. 5.



Lith. Inst. v. G. Kreul, Leipzig

RETURN PHYSICS LIBRARY
TO → 351 LeConte Hall 642-3122

LOAN PERIOD 1	2	3
2-HR		
4	5	6

RESERVE

2 HOUR BOOKS MAY NOT BE RENEWED BY PHONE
Overdue books are subject to replacement bills

DUE AS STAMPED BELOW

UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY
BERKELEY, CA 94720

FORM NO. DD25A.

U.S.A.